BULLETIN OFFICIEL

ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
RECHERCHE ET INNOVATION

Bulletin officiel spécial n°1 du 11 février 2021

SOMMAIRE

Programmes de l'option informatique des classes préparatoires scientifiques Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI) et Mathématiques et physique (MP)

arrêté du 5-1-2021 - JO du 7-2-2021 (NOR : ESRS2035775A)

Programmes d'informatique, de physique-chimie et de sciences industrielles de l'ingénieur de la classe préparatoire scientifique Mathématiques, physique, ingénierie et informatique (MP2I), le programme d'informatique de la classe préparatoire scientifique Mathématiques, physique et informatique (MPI), et relatif au programme de sciences industrielles de l'ingénieur de la classe préparatoire scientifique Physique et sciences de l'ingénieur (PSI)

arrêté du 5-1-2021 - JO du 7-2-2021 (NOR : ESRS2035777A)

Programmes de la classe préparatoire scientifique Physique, chimie et sciences de l'ingénieur (PCSI) et au programme de sciences industrielles de l'ingénieur de la classe Physique et sciences de l'ingénieur (PSI)

arrêté du 5-1-2021 - JO du 7-2-2021 (NOR : ESRS2035780A)

Programmes de la classe préparatoire scientifique Physique, technologie et sciences de l'ingénieur (PTSI) et au programme de sciences industrielles de l'ingénieur de la classe Physique et technologie (PT)

arrêté du 5-1-2021 - JO du 7-2-2021 (NOR : ESRS2035781A)

Programme d'informatique des classes préparatoires scientifiques Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI), Physique, chimie et sciences de l'ingénieur (PCSI), Physique, technologie et sciences de l'ingénieur (PTSI), Mathématiques et physique (MP), Physique et chimie (PC), Physique et sciences de l'ingénieur (PSI), Physique et technologie (PT)

arrêté du 5-1-2021 - JO du 7-2-2021 (NOR : ESRS2035774A)

Objectifs de formation en langues vivantes étrangères des classes préparatoires scientifiques Mathématiques, physique, ingénierie et informatique (MP2I), Mathématiques, physique, informatique (MPI), Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI), Physique, chimie et sciences de l'ingénieur (PCSI), Physique, technologie et sciences de l'ingénieur (PTSI), Technologie et sciences industrielles (TSI), Technologie, physique et chimie (TPC), Mathématiques et physique (MP), Physique et chimie (PC), Physique et sciences de l'ingénieur (PSI), Physique et technologie (PT), Biologie, chimie, physique et sciences de la Terre (BCPST) et Technologie et biologie (TB)

arrêté du 5-1-2021 - JO du 7-2-2021 (NOR : ESRS2035772A)

Admission et régime des études dans les classes préparatoires aux grandes écoles organisées dans les lycées relevant du ministre chargé de l'éducation ou fonctionnant sous contrat d'association dans des établissements privés : modification

NOR : ESRS2035752A
arrêté du 5-1-2021 - JO du 7-2-2021
MESRI - DGESIP A1-2

Vu Code de l'éducation, notamment articles D. 612-1, D. 612-1-2 et D. 612-19 à D. 612-29 ; arrêté du 23-11-1994 modifié ; avis du CSE du 10-12-2020 ; avis du Cneser du 15-12-2020

Article 1 - L'article 1er de l'arrêté du 23 novembre 1994 susvisé est remplacé par les dispositions suivantes :
« Art. 1er - En application de l'article D. 612-20 du Code de l'éducation, deux commissions sont instituées dans chaque établissement comportant une ou plusieurs divisions de classes préparatoires aux grandes écoles et pour chacune des trois catégories prévues par l'article D. 612-22 du même Code : une commission d'examen des vœux et une commission d'évaluation. Ces commissions sont présidées par le chef d'établissement ou son représentant.
« Chaque commission se réunit à l'initiative de son président, qui en fixe l'ordre du jour et les modalités de réunion, en présentiel ou à distance, et, pour la commission d'évaluation, en formation plénière ou en formation restreinte. Les séances ne sont pas publiques. Le président peut, de sa propre initiative ou à la demande d'un membre, inviter toute personne dont la présence paraît utile à participer aux séances avec voix consultative. Les votes ont lieu à main levée. Un scrutin secret est organisé de droit sur demande du président ou de l'un des membres. Un relevé des votes est dressé par le président.

Article 2 - L'article 2 du même arrêté est remplacé par les dispositions suivantes :
« Art. 2 - I - La commission d'examen des vœux comprend les membres suivants : le chef d'établissement ou son représentant, un conseiller principal d'éducation et au moins deux professeurs qui enseignent dans les classes de la catégorie concernée désignés par le président.
« La commission d'examen des vœux procède à l'examen des dossiers de candidature à l'admission en première année de formation, après en avoir défini les modalités et les critères. Elle donne un avis sur les réponses à faire aux candidats. Lorsque le nombre de candidatures excède les capacités d'accueil de la formation à la date de confirmation des vœux prévue par le calendrier mentionné à l'article D. 612-1-2 du code de l'éducation, elle établit un classement des dossiers. La décision d'admission est prise par le chef d'établissement ou son représentant.
« II - La commission d'évaluation comprend les membres suivants : le chef d'établissement ou son représentant, l'adjoint au chef d'établissement chargé des classes préparatoires aux grandes écoles, les conseillers principaux d'éducation chargés des classes préparatoires aux grandes écoles, les professeurs qui enseignent dans les classes de la catégorie concernée, et, avec voix consultative, un enseignant-chercheur désigné par le recteur de région académique, sur proposition du chef d'établissement, après avis des présidents d'université concernés.
« La commission d'évaluation traite des questions d'évaluation en vue du passage dans la classe supérieure, de l'autorisation de redoublement et de l'établissement de l'attestation d'études prévue à l'article D. 612-25 du code de l'éducation. Lorsqu'il existe dans l'établissement plusieurs divisions d'une même classe, elle veille pour toutes ces questions à l'harmonisation des critères.
« Lorsque toutes les classes ne sont pas concernées par l'ordre du jour, la commission d'évaluation est réunie en formation restreinte à l'initiative du chef d'établissement. Elle comprend alors le chef d'établissement ou son représentant, un conseiller principal d'éducation, au moins deux professeurs, désignés par le président et qui enseignent dans les classes concernées, et, avec voix consultative, un enseignant-chercheur désigné par le recteur de région académique, sur proposition du chef d'établissement, après avis des présidents d'université concernés. »

Article 3 - L'article 6 du même arrêté est abrogé.

Article 4 - Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie.

Article 5 - Les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021-2022 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023 pour les classes de seconde année.
Dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie, les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022 pour les classes de seconde année.

Article 6 - Le directeur général de l'enseignement scolaire, la directrice générale des outre-mer et la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle sont chargés, chacun en ce qui le concerne, de l'exécution du présent arrêté, qui sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait le 5 janvier 2021

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
Édouard Geffray

Pour le ministre des Outre-mer et par délégation,
La directrice générale des outre-mer,
Sophie Brocas

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Pour la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle,
Le chef de service, adjoint de la directrice générale,
Brice Lannaud

Nature des classes composant les classes préparatoires économiques et commerciales aux grandes écoles : modification

NOR : ESRS2035755A
arrêté du 5-1-2021 - JO du 7-2-2021
MESRI - DGESIP A1-2

Vu Code de l'éducation, notamment articles D. 612-19 à D. 612-29 ; arrêté du 23-3-1995 modifié ; avis du CSE du 10-12-2020 ; avis du Cneser du 15-12-2020 ; avis de la ministre des Armées du 15-12-2020

Article 1 - I. Le paragraphe 1 de l'article 1er de l'arrêté du 23 mars 1995 susvisé, « Classes préparatoires accessibles aux titulaires du baccalauréat ou d'un titre admis en équivalence ou d'une dispense obtenue en application du premier alinéa de l'article 4 du décret susvisé », est ainsi modifié :
1° Les quatrième et cinquième alinéas sont remplacés par l'alinéa suivant :
« Classe préparatoire économique et commerciale générale » ;
2° Les dixième et onzième alinéas sont remplacés par l'alinéa suivant :
« Classe préparatoire économique et commerciale générale » ;
3° Aux sixième et douzième alinéas, le mot : « , option » est supprimé ;
4° Le septième alinéa est remplacé par l'alinéa suivant :
« Classe préparatoire à l'École normale supérieure de Rennes (département Droit, économie, management). » ;
5° Le treizième alinéa est remplacé par l'alinéa suivant :
« Classe préparatoire à l'École normale supérieure de Rennes (département Droit, économie, management). ».
II. Le paragraphe 2 de l'article 1er de l'arrêté du 23 mars 1995 susvisé est remplacé par le paragraphe suivant :
« 2. Classe préparatoire accessible aux titulaires de diplômes obtenus après deux années d'études supérieures :
Classe d'ATS *[1]* économie-gestion. ».

Article 2 - Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie.

Article 3 - Les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021-2022 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023 pour les classes de seconde année.
Dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie, les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022 pour les classes de seconde année.

Article 4 - Le directeur général de l'enseignement scolaire, la directrice générale des outre-mer et la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle sont chargés, chacun en ce qui le concerne, de l'exécution du présent arrêté, qui sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait le 5 janvier 2021

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
Édouard Geffray

Pour le ministre des Outre-mer et par délégation,
La directrice générale des outre-mer,
Sophie Brocas

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Pour la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle,
Le chef de service, adjoint de la directrice générale,
Brice Lannaud

[1] ATS : adaptation de techniciens supérieurs

Organisation générale des études et les horaires des classes préparatoires économiques et commerciales aux grandes écoles : modification

NOR : ESRS2035759A
arrêté du 5-1-2021 - JO du 7-2-2021
MESRI - DGESIP A1-2

Vu Code de l'éducation, notamment articles D. 612-19 à D. 612-29 ; décret n° 2018-172 du 9 mars 2018 ; arrêté du 23-11-1994 modifié, notamment articles 2, 4 et 5 ; arrêtés du 23-3-1995 modifiés ; avis du CSE du 10-12-2020 ; avis du Cneser du 15-12-2020 ; avis de la ministre des Armées du 15-12-2020

Article 1 - Le titre Ier de l'arrêté du 23 mars 1995 définissant l'organisation générale des études et les horaires des classes préparatoires économiques et commerciales aux grandes écoles est ainsi modifié :
1° Les articles 2, 4, 5 et 7 sont remplacés par les dispositions suivantes :
« Art. 2 - Les classes préparatoires économiques et commerciales générales (ECG) sont destinées à accueillir les titulaires d'un baccalauréat général.
« Art. 4 - Les classes préparatoires économiques et commerciales technologiques (ECT) sont destinées à accueillir les titulaires d'un baccalauréat technologique, série Sciences et technologies du management et de la gestion.
« Art. 5 - L'horaire hebdomadaire des classes préparatoires économiques et commerciales générales de première et de seconde années est fixé à l'annexe I du présent arrêté.
« Art. 7 - L'horaire hebdomadaire des classes préparatoires économiques et commerciales technologiques de première et de seconde années est fixé à l'annexe II du présent arrêté ».
2° Les articles 3 et 6 sont abrogés.

Article 2 - Les tableaux relatifs à l'horaire hebdomadaire des classes préparatoires économiques et commerciales, option scientifique et option économique, figurant aux annexes I et II de l'arrêté du 23 mars 1995 susmentionné, sont remplacés par le tableau relatif à l'horaire hebdomadaire des classes préparatoires économiques et commerciales générales (ECG) figurant à l'annexe I du présent arrêté.
Le tableau relatif à la durée hebdomadaire des interrogations orales dans les classes préparatoires économiques et commerciales, options scientifique, économique et technologique (1ère et 2e années), figurant à l'annexe VIII du même arrêté, est remplacé par le tableau relatif à la durée hebdomadaire des interrogations orales dans les classes préparatoires économiques et commerciales générales (ECG) et technologiques (ECT) figurant à l'annexe II du présent arrêté.

Article 3 - Le titre II du même arrêté est ainsi modifié :
1° Le premier alinéa de l'article 14 est remplacé par l'alinéa suivant :
« A l'issue de la première année d'études, les étudiants sont admis en seconde année par décision du chef d'établissement, prise après avis du conseil de classe ou de la commission d'évaluation mentionnée à l'article D. 612-20 du Code de l'éducation ».
2° Aux alinéas 1, 2 et 3 de l'article 15, les mots : « d'admission et » et « ,compte tenu de ses compétences, notamment définies à l'alinéa 2 de l'article 2 de l'arrêté du 23 novembre 1994 susvisé » sont supprimés.

Article 4 - Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie.

Article 5 - Les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021-2022 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023 pour les classes de seconde année.
Dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie, les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022 pour les classes de seconde année.

Article 6 - Le directeur général de l'enseignement scolaire, la directrice générale des outre-mer et la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle sont chargés, chacun en ce qui le concerne, de l'exécution du présent arrêté, qui sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait le 5 janvier 2021

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
Édouard Geffray

Pour le ministre des Outre-mer et par délégation,
La directrice générale des outre-mer,
Sophie Brocas

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Pour la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle,
Le chef de service, adjoint de la directrice générale,
Brice Lannaud

Annexe 1

↳ *Horaire hebdomadaire des classes préparatoires économiques et commerciales générales (ECG)*

Annexe 2

↳ *Durée hebdomadaire des interrogations orales dans les classes préparatoires économiques et commerciales générales et technologiques (1re et 2e années)*

Annexe 1 - Horaire hebdomadaire des classes préparatoires économiques et commerciales générales (ECG)

Disciplines	**1re année**		**2e année**	
	Cours	TD	Cours	TD
Lettres et philosophie	6	-	6	-
Langue vivante étrangère (LVE) I	3	-	3	-
Langue vivante étrangère (LVE) II	3	-	3	-
Mathématiques approfondies Ou Mathématiques appliquées	7 ou 6	2 ou 2	7 ou 6	2 ou 2
Histoire-géographie-géopolitique (HGG) Ou Économie-sociologie-histoire du monde contemporain (ESH)	7 ou 8	- -	7 ou 8	- -
Total	**25, 26 ou 27**	**2**	**25, 26 ou 27**	**2**

Annexe 2 - Durée hebdomadaire des interrogations orales dans les classes préparatoires économiques et commerciales générales et technologiques (1re et 2e années)

Classes	Interrogations orales									
	Lettres et philosophie	Langues vivantes étrangères		Mathématiques	Informatique	HGG	ESH	Economie	Droit	Management et sciences de gestion
ECG 1ère année 2e année	10 mn 10 mn	10 mn 10 mn		Approfondies ou appliquées 10 mn 10 mn	5 mn 5 mn	10 mn 10 mn	10 mn 10 mn	- -	- -	- -
ECT 1ère année 2e année	10 mn 10 mn	LVE1 10 mn 10 mn	LVE2 10 mn 10 mn	10 mn 10 mn	5 mn 5 mn	- -	- -	10 mn 10 mn	10 mn 10 mn	20 mn 20 mn

Programmes de la classe préparatoire économique et commerciale générale (ECG)

NOR : ESRS2035776A
arrêté du 5-1-2021 - JO du 7-2-2021
MESRI - DGESIP - A1-2

Vu Code de l'éducation, notamment articles D. 612-19 à D. 612-29 ; arrêtés du 23-3-1995 modifiés ; arrêtés du 3-7-1995 modifiés ; avis du CSE du 10-12-2020 ; avis du Cneser du 15-12-2020 ; avis de la ministre des Armées du 15-12-2020

Article 1 - Les programmes de première et seconde années de mathématiques appliquées - informatique, de mathématiques approfondies - informatique, d'économie, sociologie et histoire du monde contemporain (ESH), d'histoire, géographie et géopolitique du monde contemporain (HGG), de lettres et philosophie, de langues vivantes étrangères (LVE) de la classe préparatoire économique et commerciale générale (ECG) figurent respectivement aux annexes 1, 2, 3, 4, 5 et 6 du présent arrêté.

Article 2 - Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie.

Article 3 - Les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021-2022 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023 pour les classes de seconde année.
Dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie, les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022 pour les classes de seconde année.

Article 4 - Le directeur général de l'enseignement scolaire, la directrice générale des outre-mer et la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle sont chargés, chacun en ce qui le concerne, de l'exécution du présent arrêté, qui sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait le 5 janvier 2021

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
Édouard Geffray

Pour le ministre des Outre-mer et par délégation,
La directrice générale des outre-mer,
Sophie Brocas

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Pour la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle,
Le chef de service, adjoint de la directrice générale,
Brice Lannaud

Annexes

Annexes 1 à 6

- Annexe 1 : programme de mathématiques appliquées - informatique
- Annexe 2 : programme de mathématiques approfondies - informatique
- Annexe 3 : programmes d'économie, sociologie, histoire du monde contemporain - 1re et 2de années
- Annexe 4 : programmes d'histoire, géographie et géopolitique du monde contemporain - 1re et 2de années
- Annexe 5 : programme de lettres et philosophie - 1re et 2de années

- Annexe 6 : programmes de langues vivantes étrangères - 1re et 2de années

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie générale
ECG

Annexe I
Programmes de mathématiques appliquées - informatique

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques appliquées – informatique de la classe d'ECG 1ère année

Table des matières

INTRODUCTION

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, sciences sociales...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent également certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif de ce programme est de permettre de façon équilibrée :

— une formation par les mathématiques : une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthése, ...) ;

— l'acquisition d'outils utiles notamment en sciences sociales et en économie (probabilités statistiques, optimisation) ;

— une culture sur les enjeux actuels et sur les techniques afférentes de l'informatique en lien avec des problématiques issues des sciences sociales ou économiques et l'acquisition mesurée de la démarche algorithmique pour résoudre un problème ou simuler une situation non triviale en lien avec la pratique d'un langage de programmation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'intérêt et l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques ou informatiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.

- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique ou une démarche algorithmique.

3 Architecture des programmes

Le niveau de référence à l'entrée de la filière EC est celui du cours de mathématiques complémentaires de la classe de terminale. Le programme de mathématiques appliquées s'inscrit dans le même esprit, résolument tourné vers l'utilisation d'outils mathématiques et informatiques pour résoudre des problématiques concrètes, tout en maintenant un apprentissage mathématique solide et rigoureux. On privilégie autant que possible les références aux autres disciplines pour motiver l'introduction d'outils mathématiques ou informatiques et en souligner l'efficacité.

Il est indispensable que chaque enseignant ait une bonne connaissance des programmes du cours de spécialité mathématiques de la classe de première et du cours de mathématiques complémentaires de terminale, afin que ses approches pédagogiques ne soient pas en rupture avec l'enseignement qu'auront reçu les étudiants.

Le programme s'organise autour de points forts qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- L'algèbre linéaire est abordé par le biais du calcul : systèmes d'équations linéaires, calcul matriciel. Les espaces vectoriels présentés sont tous équipés d'une base naturelle. L'espace vectoriel, comme objet abstrait, n'est pas au programme.
- La théorie des graphes est un outil de modélisation très utilisé. Elle permet de mettre en œuvre le calcul matriciel et de le mettre en situation sur des algorithmes.
- L'analyse vise à mettre en place les méthodes courantes de travail sur les suites et les fonctions et permet de développer la rigueur. On s'attache principalement à développer l'aspect opératoire. On n'insiste donc ni sur les questions trop fines ou spécialisées ni sur les exemples pathologiques. On évite les situations conduisant à une trop grande technicité calculatoire.
  L'étude des séries va permettre l'étude des variables aléatoires discrètes. Celle des intégrales généralisées n'est pas au programme de la première année. Il est à noter que, dans ce programme, les comparaisons des suites, séries et des fonctions en termes de négligeabilité et d'équivalents ne seront traitées qu'en seconde année.
- Les équations différentielles sont présentées dans le cadre d'études de phénomènes d'évolution en temps continu, adossées si possible à leur version discrète en termes de suites. On met en avant les aspects mathématiques de la notion d'équilibre.
- Les probabilités s'inscrivent dans la continuité de la formation initiée dès la classe de troisième et poursuivie jusqu'en terminale.
  On considèrera des espaces probabilisés finis au premier semestre, plus généraux au second semestre.
- L'algorithmique s'inscrit naturellement dans la démarche de résolution de problèmes. Les activités de programmation qui en résultent constituent un aspect essentiel de l'apprentissage de l'informatique. Des exemples ou des exercices d'application sont choisis pour leur intérêt dans les autres disciplines ou pour leur importance stratégique (l'analyse de données).

L'utilisation du langage Python est enseigné tout au long de l'année en lien direct avec le programme. Cette pratique régulière permettra aux étudiants de visualiser concrètement les résultats obtenus grâce aux concepts et outils mathématiques enseignés et de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple l'analyse de graphes, de la simulation de lois de probabilité, de la recherche de valeurs approchées en analyse, du traitement de calculs matriciels en algèbre linéaire.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. Les probabilités permettent en particulier d'utiliser certains résultats d'analyse (suites, séries, intégrales, ...) et d'algèbre linéaire et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Dans le contenu du premier semestre, figurent les notions nécessaires et les objets de base qui serviront d'appui à la suite du cours. Ces éléments sont accessibles à tous les étudiants quelles que soient les pratiques antérieures et potentiellement variables de leurs lycées d'origine, et la spécialité choisie en classe de terminale. Ces contenus vont, d'une part, permettre une approche plus approfondie et rigoureuse de concepts déjà présents mais peu explicités en classe de terminale, et d'autre part, mettre en place certaines notions et techniques de calcul et de raisonnement fondamentales pour la suite du cursus.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de la formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme admis, la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les séances de travaux dirigés permettent de privilégier la prise en main, puis la mise en œuvre par les étudiants, des techniques usuelles et bien délimitées, inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Les créneaux horaires dédiés à l'informatique sont consacrés au programme d'informatique. L'objectif est, en continuité avec les apprentissages du lycée, de permettre aux étudiants d'acquérir les bases de la démarche algorithmique, puis une mise en œuvre tournée vers la résolution de problèmes ainsi que l'illustration ou la modélisation de situations concrètes en lien avec les problématiques des sciences économiques et sociales. Le langage de programmation de référence choisi pour ce programme est Python. Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les notions de mathématiques pouvant être traitées en liaison avec l'informatique.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PREMIER SEMESTRE

I - Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Ce chapitre présente des points de vocabulaire, des notations, ainsi que certains types de raisonnement (par l'absurde, par contraposée, par récurrence...) et de démonstrations (d'implications, d'équivalences, d'inclusions...) dont la maîtrise s'avère indispensable à une argumentation rigoureuse sur le plan mathématique.

Le contenu de ce chapitre ne doit pas faire l'objet d'un exposé théorique. Les notions seront introduites progressivement au cours du semestre en utilisant celles déjà acquises au lycée, et à l'aide d'exemples variés issus des différents chapitres étudiés, pourront être renforcées au-delà, en fonction de leur utilité.

1 - Eléments de logique

Les étudiants doivent savoir :

• utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » ;

• utiliser à bon escient les quantificateurs universel et existentiel ; repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;

Notations : $\exists$, $\forall$.
Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs pour formuler de façon précise certains énoncés et leur négation. En revanche, l'emploi des quantificateurs à des fins d'abréviation est exclu.

• distinguer dans le cas d'une proposition conditionnelle la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;

• utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;

• formuler la négation d'une proposition ;

• utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;

• reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

2 - Raisonnement par récurrence

Apprentissage et emploi du raisonnement par récurrence.

On commence par le mettre en œuvre sur des exemples élémentaires. Tout exposé théorique sur le raisonnement par récurrence est exclu.

Notations $\sum$, $\prod$.	Illustration par manipulation de sommes et de produits. $\boxed{\blacktriangleright}$ Formules donnant : $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Les étudiants doivent savoir employer les notations $\sum_{i=1}^{n} u_i$ et $\sum_{\alpha \in A} u_\alpha$ où A désigne un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$ ou de $\mathbf{N}^2$.

3 - Ensembles, applications

L'objectif de cette section est d'acquérir ou de consolider le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications, mais tout exposé théorique est exclu.

a) Ensembles, parties d'un ensemble

Ensemble, élément, appartenance. Sous-ensemble (ou partie), inclusion. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Réunion. Intersection.	On fera le lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques usuels (« et », « ou »).
Complémentaire. Complémentaire d'une union et d'une intersection.	Le complémentaire d'une partie A de E est noté $\bar{A}$.
Produit cartésien.	On introduira les notations $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$.

b) Applications

Définition.	
Composition. Injection, surjection, bijection, application réciproque.	Ces notions seront introduites sur des exemples simples, toute manipulation trop complexe étant exclue. La notion d'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée n'est pas un attendu du programme.
Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	On pourra donner des exemples issus du cours d'analyse.

II - Calcul matriciel et résolution de systèmes linéaires

L'objectif de cette partie du programme est :
− d'une part d'initier au calcul matriciel afin de permettre la résolution de problèmes issus, notamment, des probabilités ;
− d'autre part de parvenir à une bonne maîtrise de la résolution des systèmes linéaires et de les interpréter sous forme matricielle.
L'étude de ce chapitre sera menée en lien avec l'informatique. $\boxed{\blacktriangleright}$
On introduit la problématique des systèmes linéaires, puis on présente l'utilité de l'écriture matricielle en utilisant des exemples simples de tableaux entrée-sortie ou des tableaux de Leontieff.

Tout développement théorique est hors programme.

1 - Systèmes linéaires

Définition d'un système linéaire.	
Système homogène, système de Cramer.	
Résolution par la méthode du pivot de Gauss.	La méthode sera présentée à l'aide d'exemples. On donnera des exemples où il existe une solution unique, où il n'existe pas de solution et où il existe plusieurs solutions.
Ensemble des solutions d'un système linéaire.	On insiste sur les propriétés de stabilité de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène en vue de l'introduction de la notion de sous-espace vectoriel au second semestre

2 - Calcul matriciel

a) Définitions

Définition d'une matrice réelle à n lignes et p colonnes. Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. Matrices colonnes, matrices lignes. Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Matrices triangulaires, diagonales. Matrice identité.	
Transposée d'une matrice. Matrices symétriques.	Notation ${}^tA$. On caractérisera les matrices symétriques à l'aide de la transposée.

b) Opérations matricielles

Somme, produit par un nombre réel, produit. Propriétés des opérations. Transposée d'une somme, d'un produit de matrices carrées.	On pourra faire le lien entre le produit AB et le produit de A avec les colonnes de B. ▶
Opérations sur les matrices carrées ; puissances.	Exemples de calcul des puissances n-èmes d'une matrice carrée ; application à l'étude de suites réelles satisfaisant à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants. ▶ La formule du binôme n'est pas un attendu du programme du premier semestre.
Matrices inversibles. Inverse d'un produit.	On admettra que pour une matrice carrée, un inverse gauche ou droit est l'inverse.

Écriture matricielle $AX = Y$ d'un système linéaire. Unicité de la solution lorsque la matrice A est inversible.	On pourra illustrer sur des exemples la recherche de l'inverse d'une matrice A par résolution du système $AX = Y$. Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Exemples d'utilisation d'un polynôme annulateur pour déterminer l'inverse.
Déterminant d'une matrice $(2, 2)$.	Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2.

III - **Théorie des graphes**

Un graphe fini est un outil simple et efficace de modélisation. Les graphes sont utilisés en sciences sociales pour la modélisation des réseaux sociaux et en économie pour des modèles d'évolution. On introduit des exemples importants comme le graphe du web ou ceux de différents réseaux sociaux en indiquant dans la mesure du possible la taille. Un graphe est peut être représenté par sa matrice d'adjacence et le calcul matriciel en permet une analyse qui peut s'interpréter concrètement. Cette analyse est choisie en première approche $\boxed{\blacktriangleright}$.

Graphes, sommets, sommets adjacents, arêtes.	Un graphe peut être orienté ou non.
Matrice d'adjacence.	La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique. On donne des exemples (graphe eulérien, graphe complet,...) avec leurs matrices.
Chaîne (chemin). Longueur d'une chaîne (d'un chemin). Si A est la matrice d'adjacence d'un graphe orienté G, le $(i, j)-$ème coefficient de la matrice A^d est le nombre de chemins de longueur d du sommet i au sommet j.	
Graphe connexe.	Si A est la matrice d'adjacence d'un graphe orienté G à n sommets, A est connexe si et seulement si la matrice $I_n + A + \cdots + A^{n-1}$ a tous ses coefficients strictement positifs.
Degré d'un sommet.	Formule d'Euler (dite des poignées de main).
Analyse des réseaux sociaux	On introduira sur des exemples simples quelques mesures utilisées dans l'analyse de réseaux sociaux et leur interprétation (recherche d'influenceurs...) comme le degré de centralité ou le degré d'intermédiarité de chaque sommet. Ces notions ne sont pas exigibles.

IV - **Suites de nombres réels**

L'étude des suites numériques au premier semestre permet aux étudiants de consolider la notion de suite réelle et de convergence abordée en classe terminale. Tout exposé trop théorique sur ces notions est à exclure.
Cette première approche des suites élargit la conception de la notion de fonction.
Les calculs d'intérêts, d'amortissement ou de multiplicateurs keynesiens peuvent les mettre en situation.
L'étude des suites classiques pourra être motivée puis se faire en lien étroit avec la partie probabilités

pour mettre en avant l'utilité de cet outil numérique.
On utilisera autant que possible la représentation graphique des suites pour illustrer ou conjecturer leur comportement, en particulier pour illustrer la notion de convergence. ▶

1 - Généralités sur les suites réelles

Définitions, notations.
Exemples de définitions : par formules récursives ou explicites, par restriction d'une fonction de variable réelle aux entiers.

2 - Suites usuelles : formes explicites

Suite arithmétique, suite géométrique.	Formule donnant $\sum_{k=0}^{n} q^k$. Calculs de sommes portant sur les suites arithmétiques et géométriques.
Suite arithmético-géométrique.	Les étudiants devront savoir se ramener au cas d'une suite géométrique.
Suite vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2.	On se limitera au cas où l'équation caractéristique a des racines réelles. ▶

3 - Convergence d'une suite réelle

Aucune démonstration concernant les résultats de cette section n'est exigible.

Limite d'une suite, suites convergentes.	$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ, élément de $\mathbf{R}$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient les termes u_n pour tous les indices n, hormis un nombre fini d'entre eux.
Généralisation aux limites infinies. Unicité de la limite.	
Opérations algébriques sur les suites convergentes. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.	Aucune technicité sur ces opérations ne sera exigée.
Existence d'une limite par encadrement. Suites monotones.	
Théorème de la limite monotone.	Toute suite croissante (respectivement décroissante) et majorée (respectivement minorée) converge. Toute suite croissante (respectivement décroissante) non majorée (respectivement non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) .
Suites adjacentes.	Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.
Si les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes vers une même limite ℓ, la suite (u_n) converge vers ℓ.	

4 - Comportement asymptotique des suites usuelles

Croissances comparées.	Comparaison des suites (n^a), (q^n), $((\ln(n))^b)$. Résultats admis.

V - Fonctions réelles d'une variable réelle

Il s'agit, dans ce chapitre, de fournir aux étudiants un ensemble de connaissances de référence sur les fonctions usuelles et quelques théorèmes sur les fonctions d'une variable réelle. On utilisera autant que possible la représentation graphique des fonctions pour illustrer ou conjecturer ces résultats, qui prennent tout leur sens dans une synthèse récapitulative.
Le champ des fonctions étudiées se limite aux fonctions usuelles et à celles qui s'en déduisent de façon simple. On se restreindra aux fonctions définies sur un intervalle de $\mathbf{R}$. *Les fonctions trigonométriques sont hors programme.*
L'analyse reposant largement sur la pratique des inégalités, on s'assurera que celle-ci est acquise à l'occasion d'exercices.

Aucune démonstration concernant les résultats de ce chapitre n'est exigible.

1 - Compléments sur les fonctions usuelles

a) Fonctions polynômes

La construction des polynômes formels n'est pas au programme. On confond un polynôme avec sa fonction polynomiale.

Degré, somme et produit de polynômes.	Par convention, $\deg 0 = -\infty$.
Ensemble $\mathbf{R}[x]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$, ensembles $\mathbf{R}_n[x]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$ de degré au plus n.	
Racines d'un polynôme. Factorisation par $(x-a)$ dans un polynôme ayant a comme racine.	Application : un polynôme de $\mathbf{R}_n[x]$ admettant plus de $n+1$ racines distinctes est nul. Pratique, sur des exemples, de la division euclidienne. ▶
Trinômes du second degré.	Discriminant d'un trinôme du second degré. Factorisation dans le cas de racines réelles. Lorsqu'il n'y a pas de racine réelle, le signe du trinôme reste constant sur $\mathbf{R}$. Relation entre les coefficients du polynôme et la somme et le produit des racines. Relation entre les signes des coefficients du polynôme et les signes de ses racines.

b) Fonction racine carrée, fonction inverse, fonctions puissances $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{x}^{\alpha}$

Définitions ; notations, propriétés, représentations graphiques.	On fera une étude détaillée des fonctions puissances. Les étudiants doivent connaître les règles de calcul sur les puissances.

c) Fonction valeur absolue

Définition. Propriétés, représentation graphique.

Lien avec la distance sur **R**.
On insistera sur la fonction valeur absolue.

d) Fonction partie entière

Définition. Représentation graphique.

Notation $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.
La notation E est réservée à l'espérance mathématique.

e) Fonctions logarithme et exponentielle

Rappel des propriétés. Positions relatives des courbes représentatives de $\ln, \exp, x \longmapsto x$.

Par le biais d'exercices, étude de fonctions du type $x \longmapsto u(x)^{v(x)}$.

2 - Limite et continuité d'une fonction en un point

Définition de la limite d'une fonction en un point et de la continuité d'une fonction en un point.
Unicité de la limite.
Limite à gauche, limite à droite. Extension au cas où la fonction est définie sur $I \setminus \{x_0\}$.

Extension de la notion de limite en $\pm\infty$ et aux cas des limites infinies.

On adoptera la définition suivante : f étant une fonction définie sur un intervalle I, x_0 étant un réel élément de I ou une extrémité de I, et ℓ un élément de **R**, on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$; dans ce cas, lorsque x_0 appartient à I, cela signifie que f est continue au point x_0 et, dans le cas contraire, que f se prolonge en une fonction continue au point x_0.

Opérations algébriques sur les limites.
Compatibilité du passage à la limite avec les relations d'ordre.
Existence d'une limite par encadrement.
Limite d'une fonction composée.
Si f est une fonction définie sur un intervalle I admettant une limite ℓ en un point x_0, et si (u_n) est une suite d'éléments de I convergeant vers x_0, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ.

Études asymptotiques des fonctions exponentielle et logarithme.

Comparaison des fonctions exponentielle, puissance et logarithme au voisinage de $+\infty$ et des fonctions puissance et logarithme au voisinage de 0.

Croissances comparées

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^a \ln(x)^b$, $\lim\limits_{x \to 0} x^a |\ln(x)|^b$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |x|^a \mathrm{e}^{bx}$.

Les notions d'équivalence et de négligeabilité ne seront abordées qu'en deuxième année.

3 - Étude globale des fonctions d'une variable sur un intervalle

On insistera sur les représentations graphiques. On s'appuiera sur les fonctions de référence pour illustrer les notions de cette section.

Fonctions paires, impaires.	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	
Fonctions monotones.	
Théorème de la limite monotone.	Toute fonction monotone sur $]a, b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de $]a, b[$. Comportement en a et b.
Fonctions continues sur un intervalle. Opérations algébriques, composition.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Résultat admis.
L'image d'un intervalle (respectivement un segment) par une fonction continue est un intervalle (respectivement un segment).	Notations : $\max\limits_{t\in[a,b]} f(t)$ et $\min\limits_{t\in[a,b]} f(t)$. On illustrera ces résultats par des représentations graphiques et on montrera comment les mettre en évidence sur un tableau de variations.
Théorème de la bijection.	Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.
Continuité et sens de variation de la fonction réciproque.	On utilisera ces résultats pour l'étude des équations du type $f(x) = k$.
Représentation graphique de la fonction réciproque.	En liaison avec l'algorithmique, méthode de dichotomie. ▶.

4 - Représentations de graphes des fonctions d'une variable sur un intervalle. Régionnements du plan

Il s'agit de revenir et d'utiliser les notions du paragraphe d'analyse en les illustrant sur des exemples. On pourra utiliser quelques exemples issus du cours de micro-économie (modèle de l'équilibre entre offre et demande, économies d'échelle...) ▶

Utilisation récapitulative des notions précédentes pour l'étude graphique de fonctions.	Etude locale, variations, monotonie ou convexité.
Positions relatives de deux courbes.	On pourra utiliser des exemples issus du cours de micro-économie, comme la loi de l'offre et la demande, et donner des interprétations de déplacement des courbes.
Représentations graphiques dans le plan de l'ensemble des solutions d'une inéquation du type $y > f(x)$ ou $y \geqslant f(x)$.	Exemples de régionnements.

VI - **Probabilités et stastistiques**

1 - Stastistiques univariées

a) Généralités

La plupart des notions abordées dans ce paragraphe ont été abordées les années précédentes. Il s'agira ici d'encourager les étudiants à choisir les représentations graphiques et les indicateurs étudiés pour leur pertinence et de travailler leur esprit critique. L'enseignement de ce chapitre doit impérativement avoir lieu en lien étroit avec l'informatique afin de manipuler des données réelles issues du domaine de l'économie ou des sciences sociales. ▶

Introduction.	On introduira brièvement le chapitre en expliquant les rôles des différentes étapes d'une étude statistique : statistique descriptive, statistique inférentielle.
Population, individu, échantillon, variable statistique. Variable quantitative discrète, continue, variable qualitative.	Il s'agit ici d'introduire le vocabulaire adapté pour l'étude d'une série statistique.
Série statistique associée à un échantillon.	Série statistique de taille n portant sur un caractère. n-uplet des observations.

b) Etude d'une variable quantitative discrète

Dans cette section, les séries statistiques étudiées seront des séries quantitatives discrètes.

Description d'une série statistique discrète : effectifs, fréquences, fréquences cumulées.	Diagramme des fréquences cumulées.
Fonction de répartition et quantiles.	Boîte à moustaches. (on pourra comparer des échantillons grâce au résumé de leurs séries statistiques).
Indicateurs de tendance centrale : moyenne $\bar{x}$ et médiane d'une série statistique. Définitions et propriétés de la moyenne et de la médiane.	Propriétés de la moyenne et la médiane par transformation affine.
Caractéristiques de dispersion : étendue, écart interquartile.	On discutera selon les données étudiées de la pertinence des différents indicateurs choisis.
Variance s_x^2 et écart-type s_x d'une série statistique : définitions et propriétés. Formule de Koenig.	Pour un n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ on définit la variance empirique par : $s_x^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

2 - Événements

Expérience aléatoire. Univers Ω des résultats observables.	On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples où l'univers Ω des résultats possibles est fini, et où $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements.

Événements, événements élémentaires, opérations sur les événements, événements incompatibles.	On fera le lien entre ces opérations sur les événement et les connecteurs logiques.
Système complet d'événements fini.	Une famille $(A_i)_{i\in I}$, où I est un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$, est un système complet si elle vérifie les deux conditions suivantes : • $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ • $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$.

3 - Coefficients binomiaux

Factorielle, notation $n!$.	Interprétation de $n!$ en tant que nombre de bijections d'ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments $\boxed{\blacktriangleright\ .}$
Coefficients binomiaux, notation $\binom{n}{p}$. Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. Formule du triangle de Pascal.	Nombre de chemins d'un arbre réalisant p succès pour n répétitions. Relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$. La formule de Pascal fournit un algorithme de calcul efficace pour le calcul numérique des coefficients binomiaux. $\boxed{\blacktriangleright}$
$\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.	On pourra démontrer cette formule par récurrence à partir de la formule du triangle de Pascal.

4 - Probabilité

Définition d'une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.	On restreint, la notion de probabilité à une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant : • pour tous A et B de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A\cap B=\emptyset$, $P(A\cup B) = P(A)+P(B)$ • $P(\Omega)=1$. Cas de l'équiprobabilité.
$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.	Généralisation à la réunion de 3 événements.

5 - Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle.	Notation P_A.
Formule des probabilités composées.	• Si $P(A)\neq 0,\ P(A\cap B) = P(A)P_A(B)$. • Si $P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})\neq 0$, $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\,P_{A_1}(A_2)\ldots P_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)$.

Formule des probabilités totales

Si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements fini, alors pour tout événement B : $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$.
Si de plus, pour tout i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $P(A_i) \neq 0$, on a : $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)$.

Formule de Bayes.

On donnera de nombreux exemples d'utilisation de ces formules.

6 - Indépendance en probabilité

Indépendance de deux événements.

Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Indépendance mutuelle de n événements ($n \in \mathbf{N}^*$).
Si n événements A_i sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i, avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU SECOND SEMESTRE

I - L'espace $\mathbf{R}^n$, sous-espaces vectoriels et applications linéaires

Ce chapitre ne doit pas donner lieu à un exposé théorique ; on donne ici une approche concrète à des notions. Pour simplifier ce premier contact, l'étude se limitera à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, en privilégiant les exemples pour $n \in \{2, 3, 4\}$.

a) Espace $\mathbf{R}^n$

Définition de $\mathbf{R}^n$.
Loi interne $+ : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.
Loi externe $\cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.
Propriétés d'associativité et de distributivité.
Combinaisons linéaires.

On privilégiera le travail sur les espaces $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3, \mathbf{R}^4$.
On introduira un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ comme matrice des coordonnées d'un vecteur de $\mathbf{R}^n$ dans la base canonique.

Base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Les espaces vectoriels ci-dessus sont naturellement équipés de leur base canonique.

b) Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$

Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$.	Un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs. On remarque qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ est stable par combinaisons linéaires. On classifiera les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$.
L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un sous-espace vectoriel.	On reviendra sur l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à $2, 3, 4$ inconnues.
Sous-espace vectoriel engendré.	Notation $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.
Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.	
Base d'un sous-espace vectoriel.	$(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une base du sous-espace vectoriel F de E si et seulement si tout vecteur de F se décompose de manière unique sous forme d'une combinaison linéaire de $(u_1, u_2, \dots, u_p)$.
Si un sous-espace vectoriel admet une base constituée de p vecteurs, toute autre base a p vecteurs. Dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.	Théorème admis.
Famille libre d'un sous-espace vectoriel de dimension n. Résultats admis.	Cardinal d'une famille libre (respectivement génératrice) d'un sous-espace vectoriel de dimension n.
Une famille libre (respectivement génératrice) à n vecteurs d'un sous-espace vectoriel de dimension n est une base.	Résultats admis.
Rang d'une famille de vecteurs.	

c) Applications linéaires de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$.

Noyau.	Le noyau d'une matrice est un sous-espace vectoriel.
Rang d'une matrice.	Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.
$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.	Résultat admis.
Etude de l'application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$ définie par une matrice M.	$(X \to MX)$
Composition.	Produit matriciel.
Noyau et image d'une application linéaire.	
Théorème du rang.	Résultat admis.

II - Calcul différentiel et intégral

Le but de ce chapitre est de mettre en place les méthodes courantes de travail sur les fonctions. Aucune démonstration concernant les résultats de ce chapitre n'est exigible.

1 - Calcul différentiel

a) Dérivation

Dérivée en un point.
Tangente au graphe en un point.
Dérivée à gauche, à droite.

Notation $f'(x)$.
$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h)$.
On fera le lien entre cette formule et l'équation de la tangente au point x.
Limites des taux d'accroissement de la fonction exponentielle, de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ et des fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.

Fonction dérivable sur un intervalle, fonction dérivée.

Notation f'.

Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonctions puissances.
Dérivée des fonctions composées.

On évitera tout excès de technicité dans les calculs de dérivées.

Inégalités des accroissements finis.

Si $|f'| \leqslant k$ sur un intervalle I, alors :
$$\forall (a,b) \in I^2, \quad |f(b) - f(a)| \leqslant k|b-a|.$$
Application, sur des exemples, à l'étude de suites récurrentes du type : $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque $|f'| \leqslant k < 1$. $\boxed{\blacktriangleright}$
Tout exposé théorique sur les suites récurrentes générales est exclu.

Caractérisation des fonctions constantes et monotones par le signe de la dérivée.

Résultat admis.
Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f' \geqslant 0$ sur I, f' ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.

Extremum local d'une fonction dérivable.

Une fonction f, dérivable sur un intervalle ouvert I, admet un extremum local en un point de I si sa dérivée s'annule en changeant de signe en ce point.

b) Dérivées successives

Fonctions 2 fois dérivables.
Fonctions de classe C^1, C^2, C^∞.
Opérations algébriques.

c) Convexité

Les fonctions convexes sont des outils de modélisation en économie. On pourra s'appuyer sur un exemple simple (par exemple, une fonction de coût) pour en motiver la définition. Tous les résultats de cette section seront admis. Les fonctions étudiées sont au moins de classe C^2.

Définition d'une fonction convexe.	Une fonction est convexe sur un intervalle I si : $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall (t_1, t_2) \in [0,1]^2$ tels que $t_1 + t_2 = 1$, $$f(t_1x_1 + t_2x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2).$$ Interprétation géométrique. ▶
Fonctions concaves. Points d'inflexion.	
Caractérisation des fonctions convexes de classe C^2.	Si f est de classe C^2, f est convexe si et seulement si l'une de ces deux propositions est vérifiée : • f' est croissante ; • f" est positive ; • C_f est au-dessus de ses tangentes.
Caractérisation des fonctions concaves de classe C^2. Si la dérivée d'une fonction convexe f de classe C^2 sur un intervalle ouvert s'annule en un point, f admet un minimum en ce point.	
Représentation graphique d'une fonction convexe.	▶

2 - Représentations de graphes des fonctions d'une variable sur un intervalle

Utilisation récapitulative des notions précédentes pour l'étude graphique de fonctions.	Allure locale du graphe. Exemples de points d'inflexion.

3 - Équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Les modèles mathématiques utilisés pour étudier des phénomènes dynamiques peuvent être à temps discret ou à temps continu. La problématique de modélisation en temps continu sera mise en place à l'aide des équations différentielles linéaires à coefficients constants. On donnera l'exemple de l'équation différentielle logistique sans insister sur les difficultés techniques, en lien avec le modèle de Solow. On introduit la notion d'équilibre, une situation qui n'évolue pas et qu'on obtient le plus souvent comme l'aboutissement du phénomène évolutif.

Résolution de $y' + ay = b(t)$ où a est un nombre réel et b est une fonction continue sur un intervalle de $\mathbf{R}$.	Cas particulier où b est constante.
Équation homogène, solution particulière.	On remarque que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est stable par combinaisons linéaires.
Résolution de $y'' + ay' + by = c$ où a, b et c sont des nombres réels. Équation homogène, solution particulière.	On se restreint au cas où l'équation caractéristique a des racines réelles. On remarque que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est stable par combinaisons linéaires.

Exemples de résolution d'équations $y''+ay'+by = c(t)$ où a, b et c est une fonction continue sur un intervalle de $\mathbf{R}$.	On se restreint au cas où l'équation caractéristique a des racines réelles.
Principe de superposition.	La recherche d'une solution particulière doit être accompagnée.
Trajectoires.	On remarque qu'une trajectoire est uniquement déterminée par ses conditions initiales et que deux trajectoires différentes sont d'intersection vide.▶
Équilibre.	Une trajectoire d'équilibre est constante. On constatera sur des exemples que si une trajectoire converge lorsque t tend vers $+\infty$, elle converge vers un équilibre.▶

4 - Intégration sur un segment

On introduit ce chapitre en rappelant le lien entre la notion de primitive et l'aire sous la courbe estimée par la méthode des rectangles vue en terminale.

a) Définition

Aire sous la courbe d'une fonction positive.	Dans le cas où f est continue monotone, on constatera que cette fonction « aire sous la courbe » admet f pour dérivée.
Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.	
Toute fonction continue sur un intervalle admet, sur cet intervalle, au moins une primitive.	Admis.
Intégrale d'une fonction continue sur un segment. Relation de Chasles.	Si f est continue sur un intervalle I, pour tout $(a, b) \in I^2$, on définit l'intégrale de f de a à b par : $$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a),$$ où F est une primitive de f sur I. Cette définition est indépendante du choix de la primitive F de f sur I.

b) Propriétés de l'intégrale

Linéarité de l'intégrale.
L'intégrale d'une fonction positive sur un segment est positive.
L'intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment est nulle si et seulement si la fonction est identiquement nulle sur le segment.

Si $a \leqslant b$,

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Résultat admis
On enseignera aux étudiants à majorer et à minorer des intégrales par utilisation de cette inégalité ou par intégration d'inégalités.

c) Techniques de calcul d'intégrales

On évitera tout excès de technicité pour les calculs d'intégrales par changement de variable.

Calcul de primitives « à vue », déduites de la reconnaissance de schémas inverses de dérivation.

On insistera sur le modèle $u'(x)u(x)^\alpha$
($\alpha \neq -1$ ou $\alpha = -1$).

Intégration par parties. Changement de variables.

On se restreindra à des changements de variables C^1 strictement monotones.
Les changements de variables autres qu'affines seront précisés dans les exercices.
On pourra à titre d'exemples étudier des suites définies par une intégrale et des fonctions définies par une intégrale.

III - Étude élémentaire des séries

Ce chapitre fait suite au chapitre sur les suites numériques réelles du premier semestre, une série étant introduite comme une suite de sommes partielles. Aucune technicité n'est exigible en première année. L'étude des variables aléatoires discrètes sera l'occasion d'une mise en œuvre naturelle de ces premières connaissances sur les séries. L'étude des séries sera complétée en seconde année par les techniques de comparaison sur les séries à termes positifs.

1 - Séries numériques à termes réels

Série de terme général u_n.
Sommes partielles associées.

Définition de la convergence.
Combinaison linéaire de séries convergentes.

$\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge si $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.
On pratiquera, sur des exemples simples, l'étude des séries (convergence, calcul exact ou approché de la somme).
On soulignera l'intérêt de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ pour l'étude de la suite (u_n).
$\boxed{\blacktriangleright}$

Série à termes positifs.

Convergence absolue.

En première année, cette notion est abordée uniquement pour permettre une définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

La convergence absolue implique la convergence.

Résultat admis.

2 - Séries numériques usuelles

Étude des séries $\sum q^n, \sum nq^{n-1}$, $\sum n(n-1)q^{n-2}$ et calcul de leurs sommes.

Convergence et somme de la série exponentielle $\sum \dfrac{x^n}{n!}$.

Résultats admis.

IV - Probabilités - Variables aléatoires réelles

Dans ce chapitre, on généralise l'étude faite au premier semestre ; le vocabulaire général est adopté et complété (en particulier le vocabulaire « espace probabilisé » et la notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$), mais aucune difficulté théorique sur l'ensemble des événements ne sera soulevée dans ce cadre. On n'emploiera pas le terme tribu.
L'étude des variables aléatoires et notamment celles associées aux lois usuelles se fera en lien étroit avec la partie informatique du programme. ▶
L'étude des variables aléatoires discrètes se fera dans la mesure du possible en tant qu'outil de modélisation de problèmes concrets.

1 - Espace probabilisé

On généralisera dans ce paragraphe l'étude effectuée lors du premier semestre sans soulever de difficultés théoriques.

Univers Ω des issues d'une expérience et ensemble des événements $\mathcal{A}$.

L'ensemble des événements contient Ω, est stable par union, par intersection dénombrable et par passage au complémentaire.

Généralisation de la notion de système complet d'événements à une famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω.
Généralisation de la notion de probabilité.

Généralisation de la notion de système complet d'événements à une famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω.
Généralisation de la notion de probabilité conditionnelle.
Généralisation de la formule des probabilités composées.
Généralisation de la formule des probabilités totales.
Indépendance mutuelle d'une suite infinie d'événements.

2 - Généralités sur les variables aléatoires réelles

Définition d'une variable aléatoire réelle.	X est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si X est une application de Ω dans $\mathbf{R}$ telle que pour tout élément x de $\mathbf{R}$, $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}$. Démontrer que X est une variable aléatoire ne fait pas partie des exigibles du programme. Notations $[X \in I]$, $[X = x]$, $[X \leqslant x]$, etc.
Système complet d'événements associé à une variable aléatoire.	

3 - Variables aléatoires discrètes

On ne soulèvera pas de difficulté théorique liée à l'ordre (convergence commutative d'une série absolument convergente) ou à la dénombrabilité.

a) Variable aléatoire discrète à valeurs dans R

Définition d'une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{R}$.	L'ensemble des valeurs prises par ces variables aléatoires sera indexé par une partie finie ou infinie de $\mathbf{N}$.
Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire discrète par la donnée des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.	
Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X. Étude de la loi de $Y = g(X)$.	On se limite à des cas simples, tels que $g\ :\ x \longmapsto ax + b$, $g\ :\ x \longmapsto x^2$, ...

b) Moments d'une variable aléatoire discrète

Définition de l'espérance.	Quand $X(\Omega)$ est infini, une variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ est absolument convergente. Notation $\mathrm{E}(X)$.
Linéarité de l'espérance. Positivité.	Résultats admis.
Variables aléatoires centrées.	
Théorème de transfert : espérance d'une variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.	Quand $X(\Omega)$ est infini, $\mathrm{E}(g(X))$ existe si et seulement si la série $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$ converge absolument, et dans ce cas $\mathrm{E}(g(X)) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$. Théorème admis.
$\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$.	
Variance, écart-type d'une variable aléatoire discrète.	Notations $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$.

Formule de Kœnig-Huygens.	$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$.
$\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$.	
Variables aléatoires centrées réduites.	On notera X^* la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

4 - Lois usuelles

a) Lois discrètes finies

Loi certaine.	Caractérisation par la variance.
Loi de Bernoulli. Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
Loi binomiale. Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. ▶
Application : formule du binôme de Newton donnant $(a + b)^n$.	Lorsque a et b sont strictement positifs, lien avec $\mathcal{B}(n, \frac{a}{a+b})$. La formule du binôme de Newton dans le cas général pourra être démontrée par récurrence.
Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Espérance, variance.	Application à l'étude de la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$, où $(a, b) \in \mathbf{N}^2$. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$. ▶

b) Lois discrètes infinies

Loi géométrique (rang d'apparition du premier succès dans un processus de Bernoulli sans mémoire). Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. ▶ Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p), \forall k \in \mathbf{N}^*, P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.
Loi de Poisson. Espérance, variance Contexte d'utilisation.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On pourra remarquer que la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est loi « limite » (cette notion sera précisée en deuxième année) d'une suite de variables suivant la loi binomiale $B(n, \frac{\lambda}{n})$. ▶

ENSEIGNEMENT ANNUEL D'INFORMATIQUE ET ALGORITHMIQUE

I - Programme du premier semestre.

Les séances de travaux pratiques du premier semestre poursuivent les objectifs suivants :

- *consolider l'apprentissage de la programmation qui a été entrepris dans les classes du lycée en langage Python ;*
- *mettre en place une discipline de programmation : découpage modulaire à l'aide de fonctions et programmes, annotations et commentaires, évaluation par tests ;*
- *mettre en pratique des algorithmes facilitant le traitement de l'information, la modélisation, la simulation.*

1 - Algorithmique des listes

Il s'agit de présenter des algorithmes simples, spécifiés de façon abstraite, puis de les traduire dans un langage de programmation, ici Python. On utilisera ces activités pour construire une progression pour assimiler les notions de variables, de type, d'affectation, d'instruction conditionnelle, de boucles conditionnelles ou inconditionnelles et manipuler de façon simple les listes en Python. S'il n'est pas souhaitable de les formaliser, on dégagera de l'étude de ces algorithmes simples les problématiques de la correction et la terminaison des algorithmes. Ces notions ne sont pas exigibles.

Recherche séquentielle dans une liste.	Recherche d'un élément. Recherche du maximum, du second maximum.
Algorithmes opérant sur une structure séquentielle par boucles imbriquées.	Recherche des deux valeurs les plus proches dans une liste.
Algorithmes dichotomiques.	Recherche dichotomique dans une liste triée.
Algorithmes gloutons.	Rendu de monnaie. Allocation de salles pour des cours.

2 - Statistiques descriptives et analyse de données.

Dans ce paragraphe, on analysera des données statistiques publiques obtenues sous forme d'un fichier csv (Comma-separate-value). Pour ce faire, on pourra utiliser le site data.gouv ou le site de l'Insee et choisir des données socio-économiques. On travaille directement sur le fichier de données sous forme de table en important la bibliothèque `pandas` *ou après transformation directement sur un tableur. On indiquera aux étudiants les commandes à utiliser. Aucune de ces commandes de cette bibliothèque n'est exigible.*

Lecture d'un fichier de données simples. Notion de descripteur.	
Exemples d'analyse des données.	On pourra faire des tris sélectifs, donner des exemples de calculs d'indicateurs de position : moyenne, médiane, mode, quantiles. ou d'indicateurs de dispersion : étendue, variance et écart-type empiriques, écart inter-quantile. On discutera la signification des résultats obtenus.
Représentations des données. Diagrammes en bâtons, histogrammes.	On pourra utiliser la bibliothèque `matplotlib`.

3 - Approximation numérique

Calcul approché de la racine d'une équation du type $f(x) = 0$.

On utilisera différentes méthodes dont certaines résulteront d'une étude mathématique (suites récurrentes, encadrements, dichotomie).

II - Programme du deuxième semestre.

1 - Graphes finis, plus courts chemins

Il s'agit de revenir sur le modèle des graphes et d'étudier les démarches algorithmiques permettant de les analyser selon leurs représentations.

Graphes.

Un graphe est implémenté à l'aide de listes d'adjacence (rassemblées par exemple dans une liste ou dans un dictionnaire) ou par sa matrice d'adjacence.

Recherche d'un plus court chemin dans un graphe pondéré avec des poids positifs.
Algorithme de Dijkstra.

2 - Simulation de phénomènes aléatoires

Simulation d'expériences aléatoires élémentaires conduisant à une loi usuelle.
Simulation de phénomènes aléatoires.

Loi binomiale, loi géométrique.

III - Annexe : Langage Python

Toute la richesse du langage Python ne peut pas être entièrement maîtrisée par un étudiant, aussi le paragraphe ci-dessous liste limitativement les éléments du langage Python (version 3 ou supérieure) dont la connaissance est exigible des étudiants. Il s'agit de la liste des commandes utiles pour les travaux pratiques des deux années de formation. Il n'y a pas lieu d'introduire en première année les commandes qui relèvent de notions de seconde année.

1 - Types de base

`+` `-` `*` `/` `**`	Opérations arithmétiques de base.
`==` `>` `<` `>=` `<=` `!=`	Comparaison, test.
`True` `False` `and` `or` `not`	Logique.
`from ... import *`, `import ... as`	Importation d'une bibliothèque.

2 - Structures de contrôle

Instruction d'affectation =.

Instruction conditionnelle `if`, `elif`, `else`.

Boucle `for` ; Boucle `while`.

Définition d'une fonction `def` $f(p_1, \ldots, p_n)$
`return`.

3 - Listes

Tableau unidimensionnel ou liste. Définitions d'une liste avec une boucle ou en compréhension. Fonction `range`. Commandes `append` , `len`.	Il n'y a pas lieu de distinguer ces deux structures de données en langage Python.
Recherche séquentielle dans une liste. Commandes `in del count`.	
Manipulations élémentaires de listes. Commandes + et ∗.	

4 - Utilisation de modules, de bibliothèques

`from ... import *, import ... as`	Importation d'une bibliothèque.

Pour le calcul numérique, le traitement statistique ou la simulation de phénomènes aléatoires, certaines bibliothèques s'avèrent utiles. Elles sont listées ci-dessous avec les fonctions pertinentes. Toute utilisation d'une telle fonction doit obligatoirement être accompagnée de la documentation utile, sans que puisse être attendue une quelconque maîtrise par les étudiants de ces éléments.

a) Dans la bibliothèque `numpy`

Exemple d'importation : `import numpy as np`

`np.array, np.zeros, np.ones, np.eye, np.linspace, np.arange`	Création de vecteurs et de matrices. Extraction ou modification d'un élément, d'une ligne ou d'une colonne d'une matrice.
`+` | `-` | `*` | `/` | `**`	Opérations arithmétiques de base : coefficient par coefficient.
`==` | `>` | `<` | `>=` | `<=` | `!=`	Comparaison de deux matrices (`M == N`), comparaison d'une matrice et d'un nombre (`M>=1`).
`a,b = np.shape(M)`	Taille de la matrice `M`.
`np.dot, np.transpose`	Syntaxes exigibles : `np.transpose(M)`, `np.dot(M1,M2)`. L'usage de méthode comme `M.transpose()`, `M1.dot(M2)` est non-exigible.
`np.sum, np.min, np.max, np.mean, np.cumsum, np.median, np.var, np.std`	Ces opérations peuvent s'appliquer sur une matrice entière ou bien pour chaque colonne (ou chaque ligne). Exemple : `mean(M)`, `mean(M,0)`, `mean(M,1)`
`np.exp, np.log, np.sqrt, np.abs, np.floor`	Ces fonctions peuvent s'appliquer à des variables numériques ou vectoriellement (à des matrices ou vecteurs) élément par élément. On pourra utiliser la commande `f = np.vectorize(f)` mais elle n'est pas exigible.

np.e, np.pi

b) Dans la librairie `numpy.linalg`

Exemple d'importation : `import numpy.linagl as al`

`al.inv, al.rank, al.matrix_power,` `al.solve, al.eig`	

c) Dans la librairie `numpy.random`

Exemple d'importation : `import numpy.random as rd`

`rd.random, rd.binomial, rd.randint,`
`rd.geometric, rd.poisson,`
`rd.exponential, rd.normal, rd.gamma`
	On utilisera ces fonctions pour générer un nombre aléatoire ou bien un vecteur ou une matrice à coefficients aléatoires. Exemple : `rd.binomial(10,0.2)`, `rd.binomial(10,0.2,100)`, `rd.binomial(10,0.2,[100,10])`

d) Dans la librairie `matplotlib.pyplot`

Exemple d'importation : `import matplotlib.pyplot as plt`

`plt.plot, plt.show`	Représentations graphiques de fonctions, de suites. On pourra utiliser les commandes `xlim, ylim, axis, grid, legend` mais elles ne sont pas exigibles.
`plt.hist, plt.bar, plt.boxplot`	Représentations statistiques.
Utilisation de la fonction `rd.random` pour simuler des expériences aléatoires.	On pourra simuler ainsi des lois binomiale et géométrique.
Simulation d'échantillons de lois usuelles.	On pourra utiliser les fonctions `rd.binomial, rd.randint, rd.geometric, rd.poisson`

e) Dans la librairie `pandas`

Exemple d'importation : `import pandas as pd`

`pd.read_csv, head, shape, pd.describe`	Pour créer une table à partir du fichier de données et en visualiser ou manipuler une partie.
`pd.mean, pd.std, pd.median, pd.count,` `pd.sort_values.`	Indicateurs statistiques.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques appliquées – informatique de la classe d'ECG
2e année

Table des matières

INTRODUCTION

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, sciences sociales...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales, option mathématiques appliquées et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent également certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif de ce programme est de permettre de façon équilibrée :

— une formation par les mathématiques : une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse, ...) ;

— l'acquisition d'outils utiles notamment en sciences sociales et en économie (probabilités statistiques, optimisation) ;

— une culture sur les enjeux actuels et sur les techniques afférentes de l'informatique en lien avec des problématiques issues des sciences sociales ou économiques et l'acquisition mesurée de la démarche algorithmique pour résoudre un problème ou simuler une situation non triviale en lien avec la pratique d'un langage de programmation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'intérêt et l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales, option mathématiques appliquées, vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques ou informatiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.

- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique ou une démarche algorithmique.

3 Architecture des programmes

Le programme de mathématiques de deuxième année de la filière EC option mathématiques appliquées, se situe dans le prolongement de celui de première année et permet d'en consolider les acquis. Son objectif est de fournir aux étudiants le bagage nécessaire pour suivre les enseignements spécialisés de mathématiques, économie ou gestion dispensés en Grande École ou dans une formation universitaire de troisième année de Licence.

Le programme s'organise autour de points forts qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- En algèbre linéaire, on introduit les espaces vectoriels de dimension finie : les espaces vectoriels présentés sont tous équipés d'une base naturelle, donc naturellement isomorphes à $\mathbf{R}^n$ pour un certain entier naturel n. L'espace vectoriel, comme objet abstrait n'est pas au programme. Cette définition permet de manipuler les espaces vectoriels usuels et d'introduire la notion d'endomorphisme. On introduit la notion de matrice diagonalisable et on en montre l'intérêt. On évitera des exemples trop calculatoires en privilégiant la compréhension des concepts mathématiques. Ces notions d'algèbre linéaire trouveront des applications en analyse lors de l'optimisation des fonctions de deux variables, mais aussi en probabilités (études de chaînes de Markov).
- En analyse, on introduit les intégrales généralisées qui vont permettre l'étude des variables aléatoires à densité. L'outil de comparaison des suites et des fonctions en termes de négligeabilité et d'équivalence, s'avère particulièrement efficace pour l'étude des séries et des intégrales généralisées.
  Il est à noter que seuls les développements limités à l'ordre 1 ou 2 sont au programme.
  Au quatrième semestre, l'étude des fonctions de deux variables réelles constitue un prolongement de l'analyse à une variable. Son objectif principal est d'initier les étudiants aux problèmes d'optimisation, cruciaux en économie et en finance.
- Dans la continuité du programme de première année, et en lien avec les résultats sur la réduction des matrices, on étudie les systèmes différentiels linéaires.
- En probabilité, l'étude des variables aléatoires discrètes, initiée au lycée et poursuivie en première année de classe préparatoire, se prolonge au troisième semestre par l'étude des couples et des suites de variables aléatoires discrètes ; au quatrième semestre, on aborde la notion de graphe probabiliste et la chaîne de Markov associée. On introduit les variables aléatoires à densité, avec l'objectif de permettre, en fin de formation, une bonne compréhension des concepts d'estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance.
- En informatique, l'analyse de données en tables déjà étudiée en première année se poursuit avec l'étude des bases de données relationnelles et du langage SQL.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. L'algèbre linéaire trouvera ainsi son application dans les problèmes d'optimisation et dans l'étude des chaînes de Markov, l'analyse et les probabilités dans les problèmes d'estimation.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de la formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme «admis», la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les séances de travaux dirigés permettent de privilégier la prise en main, puis la mise en œuvre par les étudiants, des techniques usuelles et bien délimitées, inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Les créneaux horaires dédiés à l'informatique sont consacrés au programme d'informatique. L'objectif est, en continuité avec les apprentissages du lycée, de permettre aux étudiants d'acquérir les bases de la démarche algorithmique, puis une mise en œuvre tournée vers la résolution de problèmes ainsi que l'illustration ou la modélisation de situations concrètes en lien avec les problématiques des sciences économiques et sociales. Le langage de programmation de référence choisi pour ce programme est Python. Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les notions de mathématiques pouvant être traitées en liaison avec l'informatique.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU TROISIÈME SEMESTRE

I - Algèbre linéaire

L'objet de ce chapitre est une étude élémentaire des applications linéaires et des espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$, approfondissant les acquis de première année et les prolongeant par l'étude de la réduction des matrices. L'objectif est d'avoir la possibilité d'utiliser des espaces vectoriels concrets, naturellement isomorphes à $\mathbf{R}^n$ et de pouvoir y manipuler les changements de bases, sans introduire les espaces vectoriels abstraits. Cette partie du programme sera ensuite utilisée en analyse dans l'étude des points critiques des fonctions de deux variables et en probabilités (chaînes de Markov...).

1 - Espaces vectoriels réels de dimension finie

Cette partie doit être traitée dans sa plus simple expression. Les notions étudiées en première année sont étendues dans un cadre plus abstrait sans démonstration en s'appuyant sur les exemples de référence listés ci-dessous.

Espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Un espace vectoriel de dimension n est un ensemble E muni d'une opération interne $+$, d'une opération externe . et d'une bijection de E sur $\mathbf{R}^n$ qui préserve les combinaisons linéaires.	On se limite par définition au cas de la dimension finie. On illustre ces définitions en liaison avec le programme de première année complété par les espaces vectoriels de référence suivants : $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, $\mathbf{R}_n[x]$.
Familles libres, familles génératrices, bases. Base canonique de $\mathbf{R}^n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et de $\mathbf{R}_n[x]$. Sous-espace vectoriel. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Rang d'une famille de vecteurs.	

2 - Endomorphismes d'un espace vectoriel réel de dimension finie

Application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un autre. Endomorphisme, isomorphisme. Composée de deux applications linéaires. Noyau et image d'une application linéaire. Rang d'une application linéaire.	Ecriture matricielle.
Théorème du rang. Application à la caractérisation des isomorphismes en dimension finie.	Résultat admis.
Matrice associée à une application linéaire dans des bases, matrice d'un endomorphisme.	Lien entre le rang d'une matrice et le rang de l'application linéaire associée. Lien entre le produit matriciel et la composition des applications linéaires.

Changement de base, matrice dee passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$. $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.	Notation $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
Formules de changement de base.	$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\ P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
Matrices semblables.	Deux matrices A et B carrées sont semblables si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. A et B peuvent être interprétées comme les matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes.

3 - Réduction des matrices carrées

Le paragraphe est essentiellement consacré à l'introduction des matrices diagonalisables. Dans tout ce paragraphe, on évitera les méthodes trop calculatoires pour la recherche des éléments propres d'une matrice. En particulier, la résolution de systèmes à paramètres est déconseillée. Ces notions seront mises en situation dans l'étude pratique des suites récurrentes linéaires, de systèmes différentiels, de chaînes de Markov, et pour l'utilisation de la matrice hessienne dans les recherches d'extrema.

Spectre d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{Sp}(A)$.
Si Q est un polynôme annulateur de A, toute valeur propre de A est racine de ce polynôme.	Aucune connaissance supplémentaire sur les polynômes annulateurs n'est au programme.
Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes forme une famille libre de $\mathbf{R}^n$.	
Matrice carrée diagonalisable.	Une matrice carrée A d'ordre n est diagonalisable s'il existe une matrice D, diagonale, et une matrice P, inversible, telles que $D = P^{-1}AP$. Les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ constituée de vecteurs propres de A. Exemples de diagonalisation de matrices carrées. Sur des exemples, application au calcul de puissances n-ièmes d'une matrice carrée. Exemples de calculs de puissances n-ièmes d'une matrice carrée, non nécessairement diagonalisable, à l'aide de la formule du binôme. Application à l'étude de suites récurrentes linéaires.
Toute matrice symétrique est diagonalisable.	Résultat admis.

II - Compléments d'analyse

1 - Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

On pourra introduire les systèmes différentiels en utilisant un exemple basé sur la loi de l'offre et la demande.

Écriture sous la forme $X' = AX$ où A est une matrice réelle.	Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Résultat admis.
Pratique de la résolution dans le cas où la matrice A est diagonalisable de taille 2 ou 3.	L'exponentielle de matrice n'est pas au programme.
Comportement asymptotique des trajectoires en fonction du signe des valeurs propres de A dans le cas où A est diagonalisable. Stabilité des solutions, état d'équilibre.	
Équivalence entre une équation scalaire d'ordre 2 et un système de 2 équations d'ordre 1.	On fait le lien avec la forme des solutions d'une équation scalaire d'ordre 2 étudiée en première année.

2 - Compléments sur les suites et les séries

L'objectif de ce paragraphe est d'introduire de nouveaux outils d'étude des suites et des séries, en particulier les critères de comparaison, tout en consolidant les acquis de première année.

a) Comparaison des suites réelles

Suite négligeable devant une suite, suites équivalentes.	Notations $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$. On réécrira les croissances comparées de première année. On pratiquera des études du comportement asymptotique de suites.

b) Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Etude de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.	On remarquera le cas où f est croissante.
Notion de point fixe d'une application. Si (u_n) converge vers un réel ℓ et si f continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f.	On pourra illustrer cette partie du programme avec Python. $\boxed{\blacktriangleright}$.

c) Compléments sur les séries

L'étude des séries ne s'applique que dans le cadre de l'étude de variables aléatoires discrètes.

Convergence des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.	Ce résultat pourra être démontré dans le chapitre sur les intégrales généralisées.

Séries à termes positifs. Comparaison des séries à termes positifs dans les cas où $u_n \leqslant v_n$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$.	
Exemples d'étude de séries à termes quelconques.	On utilisera la notion de convergence absolue vue en première année. On donne des exemples de sommes télescopiques.

3 - Compléments sur l'étude des fonctions réelles d'une variable réelle

a) Comparaison des fonctions au voisinage d'un point

Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Fonction négligeable devant une fonction, fonctions équivalentes.	Notations $f = o(g)$ et $f \sim g$ Les théorèmes de croissances comparées vus en première année sont reformulés ici avec les notations de la négligeabilité. Traduction, en termes de négligeabilité et d'équivalence, des limites connues concernant les fonctions usuelles.
Compatibilité de l'équivalence vis-à-vis des opérations suivantes : produit, quotient, composition par une fonction puissance entière.	On mettra en garde contre l'extension abusive à l'addition ou à la composition par d'autres fonctions $(\ln, \exp, \dots)$.

b) Développements limités

*Les développements limités ne seront présentés qu'**à l'ordre au plus 2**. Les développements limités seront par la suite étendus aux fonctions de deux variables.*
Les seuls développements exigibles concernent les fonctions $x \mapsto e^x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0, et à l'ordre 1 ou 2 uniquement. Aucune connaissance (somme, produit, composition...) concernant les techniques de calcul des développements limités n'est exigible.

Développement limité d'ordre 2 (respectivement d'ordre 1) en x_0 d'une fonction de classe C^2 (respectivement de classe C^1) au voisinage de x_0.	Unicité. Formule de Taylor-Young. Résultats admis.
Allure locale du graphe d'une fonction admettant un développement limité du type : $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2\epsilon(x-x_0)$, avec $a_2 \neq 0$.	Exemples.
Cas des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0.	Sur des exemples, application à l'étude locale de fonctions.

4 - Intégration généralisée à un intervalle quelconque

Les intégrales généralisées sont introduites dans ce programme comme outil pour l'étude des variables aléatoires à densité. Il s'agit ici d'une part d'étendre la notion d'intégrale à un intervalle quelconque, d'autre part de mettre en place les techniques de comparaison des intégrales de fonctions positives.

Les résultats de ce paragraphe pourront être admis. À cette occasion, on pourra consolider les acquis de première année concernant l'intégration sur un segment (positivité, techniques de calcul, intégrales comme fonctions de la borne supérieure...).

a) Intégrales sur un intervalle de type $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$ ou $]-\infty,+\infty[$

Convergence des intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est continue sur $[a,+\infty[$.	$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie.
Linéarité, positivité, relation de Chasles.	Les techniques de calcul (intégration par parties, changement de variables non affine) ne seront pratiquées qu'avec des intégrales sur un segment.
Convergence des intégrales de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$.	On pourra en déduire la convergence des séries de Riemann $\displaystyle\sum\frac{1}{n^\alpha}$.
Extension des notions précédentes aux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.	

b) Convergence des intégrales de fonctions positives sur un intervalle de type $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,a]$

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x\longmapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,+\infty[$.	De même, si f est continue et positive sur $]-\infty,a]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x\longmapsto\displaystyle\int_x^a f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $]-\infty,a]$.
Règles de comparaison dans les cas $f\leqslant g$, $f=o(g)$ et $f\underset{+\infty}{\sim} g$ avec f et g positives au voisinage de $+\infty$.	On adaptera ces propriétés au voisinage de $-\infty$. On utilisera comme intégrales de référence les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ (pour $a>0$) et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$.

c) Convergence absolue

Convergence absolue.	Cette notion est abordée uniquement pour permettre une définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité.
La convergence absolue implique la convergence.	Résultat admis.
Extension aux intégrales du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$	

III - **Probabilités et statistiques**

1 - Statistiques bivariées

On s'appuiera dans ce paragraphe sur des données réelles issues du domaine de l'économie ou des sciences sociales (loi d'Okun, corrélation entre données économiques...).

Série statistique à deux variables quantitatives discrètes, nuage de points associé.	
Point moyen du nuage.	Notation $(\bar{x}, \bar{y})$.
Covariance empirique s_{xy}, formule de Koenig-Huygens.	Pour des n uplets $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\quad s_{x,y} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
Cœfficient de corrélation linéaire empirique r_{xy}, propriétés et interprétation de ce coefficient.	$-1 \leqslant r_{x,y} \leqslant 1$ et interprétation lorsque $\lvert r_{x,y}\rvert = 1$.
Ajustement des moindres carrés, droites de régression.	On pourra effectuer des pré-transformations pour se ramener au cas linéaire. On distinguera les variables explicatives des variables à expliquer. On discutera de la pertinence d'une régression linéaire selon les données observées.

2 - Couples de variables aléatoires discrètes

On ne soulèvera aucune difficulté sur les séries indexées par des ensembles dénombrables, que l'on traitera comme des séries classiques. On admettra que toutes les manipulations (interversions de sommes, regroupements de termes, etc.) sont licites (sans exiger la vérification de la convergence absolue des séries envisagées). On admettra aussi que les théorèmes ou les techniques classiques concernant les séries s'étendent dans ce cadre.

Loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes.	La loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes est caractérisée par la donnée de $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y])$. On commencera par aborder des exemples où $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis.
Lois marginales, lois conditionnelles.	
Loi d'une variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ où g est une fonction définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X, Y).	On se limitera à des cas simples tels que $X + Y$, XY.
Théorème de transfert : espérance d'une variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ où g est une fonction réelle définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X, Y) de variables aléatoires	$E(g(X,Y)) = \displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x, y)P([X = x] \cap [Y = y])$ (sous réserve de convergence absolue). Résultat admis. En particulier : espérance de la somme, du produit de deux variables aléatoires discrètes.
Linéarité de l'espérance.	Résultat admis.

Indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes.	Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y]) = P([X = x])P([Y = y])$.
Espérance du produit de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.	Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant une espérance, alors XY admet également une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$. Résultat admis.
Loi du minimum, du maximum, de deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.	
Stabilité des lois binomiales et de Poisson.	- Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. - Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
Covariance de deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Propriétés.	Notation $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Linéarité à droite, à gauche. Symétrie. Si $a \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Cov}(X, a) = 0$.
Formule de Koenig-Huygens. Conséquence.	$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Si X et Y sont indépendantes et possèdent un moment d'ordre 2, leur covariance est nulle. Réciproque fausse.
Coefficient de corrélation linéaire.	Notation $\rho(X, Y)$.
Propriétés.	$\lvert\rho(X, Y)\rvert \leqslant 1$. Cas où $\rho(X, Y) = \pm 1$.
Variance de la somme de deux variables aléatoires discrètes. Cas de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.	On pourra admettre ce résultat.

3 - Suites de variables aléatoires discrètes

Indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles discrètes.	$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$, $$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P([X_i = x_i]).$$
Indépendance d'une suite infinie de variables aléatoires réelles discrètes.	
Lemme des coalitions.	Si X_1, X_2 ,..., X_n, sont indépendantes, toute variable aléatoire fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de X_{p+1}, X_{p+2}, ..., X_n. Résultat admis.

Espérance de la somme de n variables aléatoires réelles discrètes. Variance de la somme de n variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.	

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU QUATRIÈME SEMESTRE

I - **Fonctions numériques de deux variables réelles**

L'objectif de ce chapitre est d'arriver à une bonne compréhension des problèmes de recherche d'extrema des fonctions de deux variables en faisant le lien avec les résultats concernant la réduction des matrices.

Dans les deux premiers paragraphes, on familiarisera les étudiants avec la notion de fonction de deux variables réelles en évitant tout problème de nature topologique, c'est pourquoi le domaine de définition sera systématiquement $\mathbf{R}^2$.

On introduira la notion de fonction de deux variables réelles à l'aide d'exemples issus d'autres disciplines et on exploitera les visualisations informatiques des surfaces en 3D ou les recherches d'éléments propres de matrices permises par Python.

Tous les résultats concernant les fonctions réelles de deux variables réelles seront admis.

1 - Fonctions continues sur $\mathbf{R}^2$

Exemples de fonctions réelles de deux variables réelles.	Fonctions coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$. Fonctions polynomiales de deux variables réelles.
Distance euclidienne de deux points $\mathbf{R}^2$.	Notation $\mathrm{d}\big((x, y), (x_0, y_0)\big)$.
Continuité d'une fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.	Une fonction réelle f de deux variables réelles, définie sur $\mathbf{R}^2$, est continue en un point (x_0, y_0) de $\mathbf{R}^2$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\mathrm{d}\big((x, y), (x_0, y_0)\big) < r \Rightarrow \mid f(x, y) - f(x_0, y_0) \mid < \varepsilon$. Aucune difficulté ne sera soulevée sur cette notion. On fera le lien avec la continuité des fonctions d'une variable réelle.
Opérations sur les fonctions continues.	Les fonctions coordonnées sont continues sur $\mathbf{R}^2$. On admettra que la somme, le produit, le quotient (quand le dénominateur est non nul) de deux fonctions continues sont continus. Les fonctions polynomiales de deux variables réelles sont continues sur $\mathbf{R}^2$. On admettra que la composée d'une fonction continue à valeurs dans un intervalle I de $\mathbf{R}$ par une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$ est continue.
Lignes de niveau.	Illustration sur des exemples (Cobb-Douglas etc...).

2 - Calcul différentiel pour les fonctions définies sur $\mathbf{R}^2$

Dérivées partielles d'ordre 1. Fonctions de classe C^1. Une fonction de classe C^1 est continue. Opérations sur les fonctions de classe C^1.	Notations $\partial_1 f$, $\partial_2 f$. La détermination de la classe d'une fonction en un point problématique est hors programme.
Gradient de f en un point.	Notation $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) \\ \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix}$. $f(x+h, y+k) = f(x,y) + {}^t\nabla f(x,y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ $+ \sqrt{h^2+k^2}\ \varepsilon(h,k)$ où $\varepsilon(0,0) = 0$ et ε continue en (0,0). Résultat non exigible.
Dérivées partielles d'ordre 2. Fonctions de classe C^2. Une fonction de classe C^2 est de classe C^1. Opérations sur les fonctions de classe C^2.	Notations $\partial^2_{1,1} f, \partial^2_{1,2} f, \partial^2_{2,1} f, \partial^2_{2,2} f$ où $\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial_1(\partial_2 f)(x,y)$.
Théorème de Schwarz.	Si f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$, alors pour tout point (x,y) de $\mathbf{R}^2$, $\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y)$.
Matrice hessienne d'une fonction de deux variables réelles au point (x,y).	Notation $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(x,y) & \partial^2_{1,2} f(x,y) \\ \partial^2_{2,1} f(x,y) & \partial^2_{2,2} f(x,y) \end{pmatrix}$. On remarquera que si f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$, sa matrice hessienne en tout point (x,y) de $\mathbf{R}^2$ est symétrique.

3 - Extrema d'une fonction de deux variables réelles

Dans ce paragraphe, on sensibilisera les étudiants aux notions d'ouverts et de fermés de $\mathbf{R}^2$. On donnera la définition d'un ensemble borné.
La détermination de la nature topologique d'un ensemble n'est pas un objectif du programme et devra toujours être indiquée.
On étendra brièvement les définitions et propriétés concernant la continuité (respectivement le calcul différentiel) à des fonctions définies sur des parties (respectivement parties ouvertes) de $\mathbf{R}^2$.

Maximum, minimum local d'une fonction de deux variables réelles. Maximum, minimum global d'une fonction de deux variables réelles sur une partie de $\mathbf{R}^2$.	
Une fonction continue sur une partie fermée et bornée de $\mathbf{R}^2$ est bornée et atteint ses bornes sur cette partie.	Résultat admis.

Condition nécessaire d'existence d'un extremum local. Point critique.	Si une fonction de classe C^1 sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^2$ admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathcal{O}$, alors $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. On pourra revenir à titre d'exemple sur la détermination des coefficients de la droite de régression.
Condition suffisante d'existence d'un extremum local.	Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^2$. Si $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ est un point critique pour f et si les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point (x_0, y_0) sont strictement positives (respectivement strictement négatives) alors f admet un minimum (respectivement maximum) local en (x_0, y_0).
Point col (ou point selle).	Si $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ est un point critique pour f et si les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point (x_0, y_0) sont non nulles et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0) et (x_0, y_0) est un point col pour f.

II - Probabilités

1 - Graphes probabilistes (chaînes de Markov)

Tous les résultats de cette section seront admis.

Graphe probabiliste. Matrice de transition.	On commence par l'exemple simple d'un graphe à deux ou trois états. Les sommets du graphe sont numérotés à partir de 1.
Chaîne de Markov associée (X_n).	X_n est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des sommets du graphe.
Etats de la chaine de Markov.	Le n-ème état de la chaîne de Markov, noté V_n, est la matrice ligne $(P(X_n = 1), ..., P(X_n = r))$.
Si $M = (m_{i,j})$, on a la formule : $P(X_n = j) = \sum_{i=1}^{r} m_{i,j} P(X_{n-1} = i)$.	Les coefficients de la matrice de transition sont des probabilités conditionnelles.
Relation de récurrence matricielle entre les états successifs de la chaîne de Markov.	$V_n = V_{n-1}M$. On pourra introduire l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ $\mu : W \mapsto WM$ et remarquer que la matrice de μ dans la base canonique est ${}^tM$.
Etat stable.	$V = VM$. La matrice des coordonnées de V dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ (soit ${}^tV$) est un vecteur propre de ${}^tM$ relatif à la valeur propre 1. On donnera l'interprétation probabiliste de l'état stable.

Etude sur des exemples des différents comportements possibles d'un graphe probabiliste à deux états.	Savoir-faire non exigible.

2 - Variables aléatoires à densité

On se limitera dans ce chapitre à des densités ayant des limites finies à gauche et à droite, en tout point de **R**.

a) Définition des variables aléatoires à densité

Définition d'une variable aléatoire à densité.	On dit qu'une variable aléatoire réelle X est à densité si sa fonction de répartition F_X est continue sur **R** et de classe C^1 sur **R** éventuellement privé d'un ensemble fini de points.
Toute fonction f_X à valeurs positives, qui ne diffère de F'_X qu'en un nombre fini de points, est une densité de X.	Pour tout x de **R**, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ \mathrm{d}t$.
Caractérisation de la loi d'une variable à densité par la donnée d'une densité f_X.	
Toute fonction f positive, continue sur **R** éventuellement privé d'un nombre fini de points et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = 1$ est la densité d'une variable aléatoire.	Résultat admis.
Si f est une densité de probabilité, $F : x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 en tout point où f est continue.	En un tel point, $F'(x) = f(x)$. Résultat admis.
Transformation affine d'une variable à densité.	Les étudiants devront savoir calculer la fonction de répartition et une densité de $aX + b$ ($a \neq 0$).

b) Moments d'une variable aléatoire à densité

Espérance.	Une variable aléatoire X de densité f_X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente ; dans ce cas, $\mathrm{E}(X)$ est égale à cette intégrale. Exemples de variables aléatoires n'admettant pas d'espérance.
Variable aléatoire centrée.	

Théorème de transfert pour l'espérance.	Si X est une variable aléatoire admettant une densité f nulle en dehors d'un intervalle $]a,b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ et si g est une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points sur $]a,b[$, $g(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument et dans ce cas : $E(g(X)) = \displaystyle\int_a^b g(t)f(t)\,\mathrm{d}t$. Résultat admis.
Variance, écart-type, variables aléatoires centrées réduites.	Exemples de variables aléatoires n'admettant pas de variance.

c) Lois à densité usuelles

Pour chacune de ces lois, on donnera des contextes dans lesquels on les utilise.

Loi uniforme sur un intervalle. Espérance. Variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$. ▶
Loi exponentielle. Caractérisation par l'absence de mémoire. Espérance. Variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. ▶
Loi normale centrée réduite.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. ▶ On pourra démontrer en exercice que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge.
Loi normale (ou de Laplace-Gauss). Espérance. Variance.	$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. On attend des étudiants qu'ils sachent représenter graphiquement les fonctions densités des lois normales et utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.
Propriété de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.	$\forall x \in \mathbf{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
Une somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales suit une loi normale.	Résultat admis.

d) Exemples simples de transferts

On réinvestira dans ce paragraphe les lois usuelles à densité.

Calculs de fonctions de répartition et de densités de fonctions d'une variable aléatoire à densité.	Les candidats devront savoir retrouver les densités de $aX+b$ $(a \neq 0)$, X^2, $\exp(X)$, ... Loi de $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-Y)$, où Y suit une loi uniforme à densité sur l'intervalle $[0,1[$.
Transformées affines de variables aléatoires suivant des lois uniformes.	Si $a < b$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1] \Longleftrightarrow Y = a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$.

Transformées affines de variables aléatoires suivant des lois normales.	Si $a \neq 0$, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Longleftrightarrow aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.

3 - Compléments sur les variables aléatoires réelles quelconques

La définition de l'espérance ou des moments d'ordre supérieur d'une variable aléatoire quelconque est hors d'atteinte dans le cadre de ce programme et toute difficulté s'y ramenant est à écarter. On admettra que les propriétés opératoires usuelles de l'espérance et de la variance se généralisent aux variables aléatoires quelconques. En particulier, le théorème de transfert ci-dessous permet de calculer l'espérance de $g(X)$ dans le cas où X est à densité.

Tous les résultats de cette section seront admis.

Indépendance de deux variables aléatoires réelles quelconques.	Deux variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes si et seulement si $P([X \in I] \cap [Y \in J]) = P([X \in I])P([Y \in J])$ pour tous intervalles réels I et J. Généralisation à un ensemble fini ou une suite de variables aléatoires réelles quelconques.
Lemme des coalitions.	Si X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes, toute variable aléatoire fonction de X_1, X_2, ..., X_p est indépendante de toute variable aléatoire fonction de X_{p+1}, X_{p+2}, ..., X_n.
Espérance d'une somme de variables aléatoires.	Si X et Y admettent une espérance, $X + Y$ admet une espérance et $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires.
Croissance de l'espérance.	Si $P([X \leqslant Y]) = 1$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$.
Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes.	Si X et Y admettent une espérance et sont indépendantes, XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.
Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes.	Si X et Y sont indépendantes et admettent une variance, $X + Y$ admet une variance et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

4 - Convergences et approximations

a) Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On pourra démontrer ces inégalités dans le cas d'une variable aléatoire discrète ou à densité.

Inégalité de Markov.	Si X est une variable aléatoire à valeurs positives et admettant une espérance, $$\forall a > 0, \quad P([X \geqslant a]) \leqslant \frac{E(X)}{a}.$$ Résultat non exigible. On pourra appliquer cette inégalité à $Y = \lvert X \rvert^r$, $r \in \mathbf{N}^*$.
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, $$\forall \varepsilon > 0, \quad P([\lvert X - E(X) \rvert \geqslant \varepsilon]) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

b) Loi faible des grands nombres

Loi faible des grands nombres.	Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance m et une même variance et soit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P([\lvert \overline{X}_n - m \rvert \geqslant \varepsilon]) = 0$.

c) Convergence en loi

Définition de la convergence en loi d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires vers une variable aléatoire X.	Une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires converge en loi vers X si $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ en tout réel x où F_X est continue. Notation $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.
Caractérisation dans le cas où les X_n, $n \in \mathbf{N}^*$ et X prennent leurs valeurs dans $\mathbf{Z}$.	$(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers X si et seulement si : $$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad \lim_{n\to+\infty} P([X_n = k]) = P([X = k]).$$ Résultat admis. Application à la convergence d'une suite de variables aléatoires suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ vers une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On observera sur des exemples la convergence en loi d'une chaîne de Markov (dont le graphe sous-jacent est complet) vers la loi décrite par son état stable.

Théorème limite central.	Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et admettant une variance σ^2 non nulle, la suite des variables aléatoires centrées réduites $\overline{X}_n^* = \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\right)$ associées aux variables $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. D'où, on a pour tout (a, b) tel que $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} P([a \leqslant \overline{X}_n^* \leqslant b]) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t.$ Résultats admis.
Exemples d'approximations de la loi binomiale et de la loi de Poisson par la loi normale.	Toutes les indications devront être fournies aux candidats quant à la justification de l'utilisation des approximations.

5 - Estimation

L'objectif de cette partie est d'introduire le vocabulaire et la démarche de la statistique inférentielle en abordant, sur quelques cas simples, le problème de l'estimation, ponctuelle ou par intervalle de confiance. On se restreindra à une famille de lois de probabilités indexées par un paramètre scalaire (ou vectoriel) dont la valeur (scalaire ou vectorielle) caractérise la loi. On cherche alors à estimer la valeur du paramètre (ou une fonction simple de ce paramètre) à partir des données disponibles.

Dans ce contexte, on considère un phénomène aléatoire et on s'intéresse à une variable aléatoire réelle X qui lui est liée, dont on suppose que la loi de probabilité n'est pas complètement spécifiée et appartient à une famille de lois dépendant d'un paramètre θ décrivant un sous-ensemble Θ de $\mathbf{R}$ (éventuellement de $\mathbf{R}^2$). Le paramètre θ est une quantité inconnue, fixée dans toute l'étude, que l'on cherche à déterminer ou pour laquelle on cherche une information partielle.

Le problème de l'estimation consiste alors à estimer la valeur du paramètre θ ou de $g(\theta)$ (fonction à valeurs réelles du paramètre θ), c'est-à-dire à en obtenir une valeur approchée, à partir d'un échantillon de données $x_1, \ldots, x_n$ obtenues en observant n fois le phénomène. Cette fonction du paramètre représentera en général une valeur caractéristique de la loi inconnue comme son espérance, sa variance, son étendue...

On supposera que cet échantillon est la réalisation de n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ muni d'une famille de probabilités $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$. Les $X_1, \ldots, X_n$ seront supposées P_θ-indépendantes et de même loi que X pour tout θ.

On appellera estimateur de $g(\theta)$ toute variable aléatoire réelle de la forme $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ où φ est une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, éventuellement dépendante de n, et indépendante de θ, dont la réalisation après expérience est envisagée comme estimation de $g(\theta)$.

Un estimateur se définit donc de l'intention de fournir une estimation. Cette intention est garantie le plus souvent par un résultat de convergence probabiliste (lorsque n tend vers $+\infty$) vers le paramètre à estimer (convergence de l'estimateur). Ceci sort des objectifs du programme mais pourra être commenté sur les exemples proposés.

Si T_n est un estimateur, on notera, lorsque ces valeurs existent, $E_\theta(T_n)$ l'espérance de T_n et $V_\theta(T_n)$ la variance de T_n, pour la probabilité P_θ.

a) Estimation ponctuelle

Estimer ponctuellement $g(\theta)$ par $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ où $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est un estimateur de $g(\theta)$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ est une réalisation de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$, c'est décider d'accorder à $g(\theta)$ la valeur $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X.

Exemples de n-échantillons associés à une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$ avec $\theta = p$.

Définition d'un estimateur.

Un estimateur de $g(\theta)$ est une variable aléatoire de la forme $T_n = \varphi(X_1, \ldots, X_n)$. La réalisation $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de l'estimateur T_n est l'estimation de $g(\theta)$. Cette estimation ne dépend que de l'échantillon $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ observé.

Exemples simples d'estimateurs.

Exemple de la moyenne empirique $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

Estimateur du maximum de vraisemblance : on ne fera pas de développement théorique, mais on en expliquera le principe et on l'instanciera sur les lois de Bernoulli et de Poisson. ▶

b) Estimation par intervalle de confiance

La démarche de l'estimation par intervalle de confiance consiste à trouver un intervalle aléatoire qui contienne θ avec une probabilité minimale donnée. On ne considère dans ce paragraphe que des intervalles de confiance de l'espérance mathématique m faisant intervenir l'estimateur $\overline{X}_n$. Ce paragraphe ne doit pas faire l'objet d'un exposé théorique.

Recherche d'un intervalle de confiance de m au niveau de confiance $1 - \alpha$ à partir de $\overline{X_n}$ et à l'aide de l'inégalité de Bienaymé Tchebychev.

▶

Estimation par intervalle de confiance de la moyenne d'une loi normale dont l'écart type est connu.

On pourra utiliser cet exemple pour introduire la variance empirique $\overline{S}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}{n}$.

▶

Intervalle de confiance asymptotique :
$P\left(\left[\overline{X}_n - t_\alpha \dfrac{\overline{S}_n}{\sqrt{n}} < m < \overline{X}_n + t_\alpha \dfrac{\overline{S}_n}{\sqrt{n}}\right]\right) \underset{n \to +\infty}{\to} 1 - \alpha$
où t_α est le quantile d'ordre $1 - \dfrac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$

Ce résultat est une conséquence direct du théorème limite central. Il n'est pas exigible en l'état.
On pourra mentionner le cas particulier
$\alpha = 0,05$.
▶

ENSEIGNEMENT ANNUEL D'INFORMATIQUE ET ALGORITHMIQUE

I - Programme du troisième semestre.

1 - Bases de données

L'administration, les banques, les assurances, les secteurs de la finance utilisent des bases de données, systèmes d'informations qui stockent dans des fichiers les données nombreuses qui leur sont nécessaires. Une base de données relationnelle permet d'organiser, de stocker, de mettre à jour et d'interroger des données structurées volumineuses utilisées simultanément par différents programmes ou différents utilisateurs. Un logiciel, le système de gestion de bases de données (SGBD), est utilisé pour la gestion (lecture, écriture, cohérence, actualisation...) des fichiers dans lesquels sont stockées les données. L'accès aux données d'une base de données relationnelle s'effectue en utilisant un langage informatique qui permet de sélectionner des données spécifiées par des formules de logique, appelées requêtes d'interrogation et de mise à jour.
L'objectif est de présenter une description applicative des bases de données en langage de requêtes SQL (Structured Query Language). Il s'agit de permettre d'interroger une base présentant des données à travers plusieurs relations. On introduira les concepts à l'aide d'exemples simples issus de contextes appropriés (fichier clients, gestion des stocks, gestion du personnel ...)

Modèle relationnel : relation, attribut, domaine, clef primaire « PRIMARY KEY », clef étrangère « FOREIGN KEY », schéma relationnel.

Vocabulaire des bases de données : table, champ, colonne, schéma de tables, enregistrements ou lignes, types de données.

On s'en tient à une notion sommaire de domaine : entier « INTEGER », chaîne « TEXT ».

Lecture d'un fichier de données simples. Notion de descripteur.

Lecture d'un fichier de données simples. Notion de descripteur.

Opérateurs arithmétiques $+, -, *$.

Opérateurs de comparaison :
=, <>, <, <=, >, >=.

Opérateurs logiques : « AND », « OR », « NO ».

a) Commandes exigibles

« WHERE »

« SELECT nom_de_champ FROM nom_de_table ». Sélection de données dans une table.

« INSERT INTO nom_de_table ». Insertion de données dans une table. On pourra utiliser « VALUES (élément1, élément2,...)".

« DELETE FROM nom_de_table ». Suppression de données d'une table.

« UPDATE nom_de_ table ». Mise à jour de données d'une table.

« SELECT* FROM nom_de_table_1 INNER JOIN nom_de_table_2 ».	Réalisation d'une jointure. On pourra ajouter une condition « ON Φ »dans le cas où Φ est une conjonction d'égalités. Aucune autre notion de jointure n'est dans ce programme.
« CREATE TABLE nom_de_table ».	Création d'une table.

b) Commandes non exigibles

On pourra utiliser par commodité la liste d'opérateurs, fonctions et commandes ci-dessous. Ce ne sont pas des attendus du programme et ils sont non exigibles.

Les opérateurs ensemblistes : union « UNION », intersection « INTERSECTION », différence « EXCEPT ».

Les opérateurs spécifiques de l'algèbre relationnelle : projection, sélection (ou restriction), renommage, produit cartésien .

Les fonctions d'agrégation : min « MIN », max « MAX », somme « SUM », moyenne « AVG », comptage « COUNT ».

Les commandes « DISTINCT », « ORDER BY »

2 - Equations et systèmes différentiels

L'objectif est d'illustrer les concepts vus dans le cours de mathématiques. On pourra dégager sur des exemples simples des notions qualitatives, mais aucune technicité n'est attendue. La discrétisation d'une équation différentielle n'est pas au programme. On pourra utiliser le solveur scipy.integrate.odeint ; la maîtrise d'un tel outil n'est pas exigible.

Représentations graphiques de trajectoires.	Sur des exemples en lien avec le programme : Interprétation des paramètres. Influence des conditions initiales. On observera le phénomène de convergence vers un équilibre.

3 - Statistiques descriptives bivariées

Série statistique à deux variables, nuage de points associé. Point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage. Covariance empirique, cœfficient de corrélation empirique, droites de régression.	On tracera le nuage de points et les droites. de régression et on pourra effectuer des prétransformations pour se ramener au cas linéaire. On distinguera les variables explicatives des variables à expliquer.

II - **Programme du quatrième semestre.**

1 - Chaînes de Markov

Ce thème sera l'occasion de revoir les simulations de lois discrètes, de revisiter les notions de programmation et de représentation de données par un graphe fini, qui sont vues en première année, ainsi que d'appliquer les résultats et techniques d'algèbre linéaire étudiés au troisième semestre.

Matrice de transition. Étude sur des exemples simples. Etat stable. Comportement limite.	On pourra étudier par exemple l'indice de popularité d'une page Web (PageRank), modéliser l'évolution d'une société (passage d'individus d'une classe sociale à une autre), ou les systèmes de bonus-malus en assurances. Simulation et mise en évidence d'états stables. On observera la convergence en loi d'une chaîne de Markov (sur un graphe complet) vers son état stable.

2 - Estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance

Comparaison de différents estimateurs ponctuels d'un paramètre.	On pourra utiliser des données issues de situations réelles (simple comparaison de valeurs numériques) ou créer plusieurs jeux de données par simulation. Dans ce dernier cas, on pourra comparer les lois des estimateurs par exemple à l'aide d'histogrammes.
Intervalle de confiance asymptotique obtenu avec le théorème limite central pour estimer le paramètre d'une loi de Bernoulli.	Résultat admis On pourra comparer, en majorant $p(1-p)$ par $\frac{1}{4}$, les intervalles de confiance obtenus par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, et les intervalles de confiance asymptotiques obtenus par l'approximation de la loi binomiale par la loi normale. La comparaison pourra se faire en calculant les demi-largeurs moyennes des intervalles et leurs niveaux de confiance.

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie générale
ECG

Annexe II
Programmes de mathématiques approfondies - informatique

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques approfondies – informatique de la classe d'ECG 1ère année

Table des matières

Introduction

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, ...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse, ...).

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.

- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.
- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

3 Architecture des programmes

Le niveau de référence à l'entrée de la filiére EC est celui du cours de mathématiques complémentaires de la classe terminale. Il est indispensable que chaque enseignant ait une bonne connaissance des programmes du cours de spécialité mathématiques de la classe de première et du cours de mathématiques complémentaires de terminale, afin que ses approches pédagogiques ne soient pas en rupture avec l'enseignement qu'auront reçu les étudiants.

Le programme s'organise autour de quatre points forts qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- L'algèbre linéaire est abordée d'abord par le calcul matriciel, outil indispensable pour le calcul multidimensionnel, puis par les espaces vectoriels. La pratique de l'algèbre linéaire permet de développer chez l'étudiant des capacités d'abstraction, mais aussi de renforcer sa démarche logique indispensable en mathématiques.
- L'analyse vise à mettre en place les méthodes courantes de travail sur les suites et les fonctions et permet de développer la rigueur. On s'attache principalement à développer l'aspect opératoire. On n'insiste donc ni sur les questions trop fines ou spécialisées ni sur les exemples « pathologiques ». On évite les situations conduisant à une trop grande technicité calculatoire.
- Les probabilités s'inscrivent dans la continuité de la formation initiée dès la classe de troisième et poursuivie jusqu'en terminale.
- L'informatique est enseignée tout au long de l'année en lien direct avec le programme de mathématiques. Cette pratique régulière permettra aux étudiants de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple de la simulation de lois de probabilité, de la recherche de valeurs approchées en analyse ou d'outils de calculs en algèbre linéaire.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. Les probabilités permettent en particulier d'utiliser certains résultats d'analyse (suites, séries...) et d'algèbre linéaire et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Dans le contenu du premier semestre, figurent les notions nécessaires et les objets de base qui serviront d'appui à la suite du cours. Ces éléments sont accessibles à tous les étudiants quelles que soient les pratiques antérieures et potentiellement variables de leurs lycées d'origine, et le cours de mathématiques qu'ils auront choisi en classe de terminale. Ces contenus vont, d'une part, permettre une approche plus approfondie et rigoureuse de concepts déjà présents mais peu explicités au lycée, et d'autre part, mettre en place certaines notions et techniques de calcul et de raisonnement fondamentales pour la suite du cursus. Les nombres complexes n'étant abordés que dans le cours optionnel de mathématiques expertes, ne font plus partie du programme.

L'étude des variables aléatoires discrètes infinies en première année nécessite l'introduction des séries. Dans un souci d'allègement de la première année, en continuité avec les programmes du lycée, le concept de variable aléatoire à densité ne sera présenté qu'en deuxième année. Cependant les intégrales généralisées seront présentées en analyse dès la première année.

L'algèbre linéaire est abordée, au premier semestre, par le biais du calcul : calcul matriciel, systèmes d'équations linéaires. Des rudiments de vocabulaire général sur les espaces vectoriels sont introduits lors du premier semestre. Ce choix a pour ambition de familiariser les étudiants avec le calcul multidimensionnel afin de les préparer à l'introduction de la notion abstraite d'espace vectoriel, qui sera étudiée essentiellement au second semestre.

En analyse, le premier semestre permet de consolider et approfondir des notions familières aux étudiants, comme les suites, les intégrales et les dérivées. Le second semestre généralise les notions du premier semestre en introduisant les séries et les intégrales généralisées, dans l'objectif de l'étude des probabilités (les variables aléatoires à densité ne seront abordées qu'en deuxième année).

Pour les probabilités, on se place sur les espaces probabilisés finis au premier semestre, puis plus généraux au second semestre.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus, des applications ou des exemples d'activités.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de la formation de ces classes préparatoires.

La plupart des résultats mentionnés dans le programme seront démontrés. Pour certains marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main par les étudiants des techniques usuelles et bien délimitées inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les parties du programme pouvant être traitées en liaison avec l'informatique. Le langage de référence choisi pour ce programme est Python.

Enseignement de mathématiques du premier semestre

I - **Raisonnement et vocabulaire ensembliste**

1 - Éléments de logique

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire des raisonnements mathématiques, mais tout exposé théorique est exclu. Les notions de ce paragraphe pourront être présentées en contexte au cours du semestre, évitant ainsi une présentation trop formelle.

Connecteurs : et, ou, non, implication, réciproque, contraposée. Quantificateurs : $\forall$, $\exists$.	On présentera des exemples de phrases mathématiques utilisant les connecteurs et les quantificateurs, et on expliquera comment écrire leurs négations.

2 - Raisonnement par récurrence et calcul de sommes et de produits

Emploi du raisonnement par récurrence.	Tout exposé théorique sur le raisonnement par récurrence est exclu.
Formules donnant : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.	Les formules donnant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ seront vues en exercice. Elles ne sont pas exigibles.
Notations $\sum$, $\prod$.	Les étudiants doivent savoir employer les notations $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i$ et $\displaystyle\sum_{i\in A} u_i$ où A désigne un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{N}^2$. $\boxed{\blacktriangleright}$
Définition de $n!$.	
Formule du binôme, triangle de Pascal.	On pourra introduire les coefficients binomiaux à l'aide du triangle de Pascal

3 - Ensembles, applications

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications, en vue de préparer l'étude des chapitres d'algèbre linéaire et de probabilités, mais tout exposé théorique est exclu.

a) Ensembles, parties d'un ensemble

Appartenance. Inclusion. Notations $\in$, $\subset$. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E	
Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.	En lien avec le programme de terminale, on montrera que le nombre $\binom{n}{p}$ est aussi le nombre de chemins réalisant p succès pour n répétitions dans un arbre binaire. $\boxed{\blacktriangleright}$
Formules $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.	
Complémentaire. Notation $\overline{A}$.	La notation $\overline{A}$ est à privilégier. En cas d'ambiguïté, on utilisera la notation $\complement_E A$.
Union, intersection. Notations $\bigcap$, $\bigcup$. Distributivité. Lois de Morgan.	On fera le lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques usuels.
Définition du produit cartésien d'ensembles.	On introduira les notations $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$.

b) Applications

Définition. Composée de deux applications.

Restriction et prolongement d'une application.	Ces deux notions ne seront introduites que dans les cours d'algèbre linéaire et d'analyse.
Applications injectives, surjectives, bijectives.	On pourra donner des exemples issus du cours d'analyse.

II - **Polynômes**

La construction des polynômes formels n'est pas au programme. On identifiera polynômes et fonctions polynomiales. Les démonstrations des résultats de ce paragraphe ne sont pas exigibles.

Ensemble $\mathbf{R}[x]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$. Opérations algébriques.	
Degré.	Par convention $\deg(0) = -\infty$.
Ensembles $\mathbf{R}_n[x]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$ de degré au plus n.	
Division euclidienne.	Multiples et diviseurs.
Racines, ordre de multiplicité d'une racine. Caractérisation de la multiplicité par factorisation d'une puissance de $(x-a)$.	Cas des polynômes de degré 2.
Formule de Taylor pour un polynôme	
Exemples simples de factorisation dans $\mathbf{R}[x]$.	On énoncera le résultat général sans démonstration.

III - **Algèbre linéaire**

L'objet de ce chapitre est la mise en place de l'outil vectoriel dès le premier semestre, afin de confronter rapidement les étudiants aux notions étudiées dans le cours d'algèbre linéaire.

Dans un premier temps, on présentera la notion de matrice et l'on familiarisera les étudiants à la manipulation de ces objets avant d'en aborder les aspects vectoriels.

L'étude de ce chapitre pourra être menée en lien avec l'algorithmique en ce qui concerne le calcul matriciel. $\boxed{\blacktriangleright}$

1 - Calcul matriciel

a) Matrices rectangulaires

Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{R}$.	
Opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.	Addition, multiplication par un scalaire. $\boxed{\blacktriangleright}$
Produit matriciel.	On pourra faire le lien entre le produit AB et le produit de A avec les colonnes de B. $\boxed{\blacktriangleright}$
Transposée d'une matrice. Transposition d'un produit.	Notation ${}^tA$.

b) Cas des matrices carrées

Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{R}$.
Matrices triangulaires, diagonales, symétriques, antisymétriques.

Matrices inversibles, inverse d'une matrice. | On admettra que pour une matrice carrée, un inverse à gauche ou à droite est l'inverse.

Inverse d'un produit. Transposition de l'inverse.

Formule donnant l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2.
Inversibilité d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire.

2 - Systèmes linéaires

Tout développement théorique est hors programme.

Définition d'un système linéaire.

Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.

La méthode sera présentée à l'aide d'exemples. On adoptera les notations suivantes pour le codage des opérations élémentaires sur les lignes : $L_j \leftrightarrow L_i$, $L_i \leftarrow aL_i + bL_j \quad (a \neq 0, i \neq j)$. $\boxed{\blacktriangleright}$

Un système linéaire admet soit une unique solution, soit une infinité de solutions, soit aucune solution.

Un système linéaire homogène admet soit une unique solution, soit une infinité de solutions.

Écriture matricielle d'un système linéaire.

Calcul de l'inverse de la matrice A par la résolution du système $AX = Y$.

3 - Introduction aux espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Cette première approche des espaces vectoriels permet d'introduire le vocabulaire et sera accompagnée de nombreux exemples.

Il sera possible, à l'occasion d'autres chapitres en analyse ou probabilité, de rappeler la structure d'espace vectoriel des ensembles les plus courants, afin de familiariser les étudiants avec le vocabulaire et les notions fondamentales, avant une étude plus approfondie des espaces vectoriels au second semestre.

Le programme se place dans le cadre des espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$. *Les notions de corps, d'algèbre et de groupe sont hors programme.*

Structure d'espace vectoriel.
Sous-espaces vectoriels.

Cette étude doit être accompagnée de nombreux exemples issus de l'algèbre (espaces $\mathbf{R}^n$, espaces de polynômes, espaces de matrices), de l'analyse (espaces de suites, de fonctions). On distinguera les espaces vectoriels $\mathbf{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Combinaisons linéaires.

On ne considèrera que des combinaisons linéaires de familles finies.
Une famille finie d'un espace vectoriel E est la donnée d'une liste finie $(x_1, ..., x_n)$ de vecteurs de E. Le cardinal de cette famille est n.

Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.

Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice, d'une base.

On se limitera à des familles et des bases de cardinal fini.
Exemple de la base canonique de $\mathbf{R}^n$, de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et de $\mathbf{R}_n[x]$.

Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base.

IV - **Suites de nombres réels**

L'objectif de ce chapitre est de familiariser les étudiants dès le premier semestre avec des méthodes d'analyse. La construction de $\mathbf{R}$ *est hors programme et le théorème de la borne supérieure est admis.*

1 - Vocabulaire sur l'ensemble R des nombres réels

Valeur absolue. Inégalité triangulaire.

Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbf{R}$.

Quand il existe, le maximum de A coincide avec la borne supérieure de A.

Théorème de la borne supérieure.

Résultat admis.

Partie entière d'un réel.

Notation $\lfloor x \rfloor$. La notation $E(.)$ est réservée à l'espérance mathématique.

2 - Exemples de suites réelles

Suites arithmético-géométriques.

On se ramenera au cas d'une suite géométrique.

Suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 à coefficients réels. Équation caractéristique. On se limitera aux équations caractéristiques à solutions réelles.

Cette partie pourra être l'occasion d'illustrer, dans un cas concret, les notions de famille libre, génératrice et de base.

3 - Convergence des suites réelles - Théorèmes fondamentaux

On utilisera la représentation graphique des suites pour illustrer ou conjecturer le comportement des suites. $\boxed{\blacktriangleright}$

Limite d'une suite, suites convergentes.

On dit que (u_n) converge vers ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les u_n pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux.
On donnera une définition quantifiée de la limite ℓ (traduction en ε, n_0) sans en faire une utilisation systématique.

Généralisation aux suites tendant vers $\pm\infty$.

Unicité de la limite.
Opérations algébriques sur les suites convergentes.
Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.
Existence d'une limite par encadrement.
Suites monotones, croissantes, décroissantes, suites adjacentes.

Théorème de limite monotone.	Toute suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée) converge, la limite étant la borne supérieure (respectivement inférieure) de l'ensemble des valeurs de la suite. Une suite croissante non majorée (respectivement décroissante non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.	
Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.	
Croissances comparées.	Comparaisons des suites $(n!)$, (n^a), (q^n), $(\ln(n)^b)$.

V - **Fonctions réelles d'une variable réelle**

En analyse, on évitera la recherche d'hypothèses minimales, tant dans les théorèmes que dans les exercices et problèmes, préférant des méthodes efficaces pour un ensemble assez large de fonctions usuelles.

Pour les résultats du cours, on se limite aux fonctions définies sur un intervalle de $\mathbf{R}$*. Les étudiants doivent savoir étudier les situations qui s'y ramènent simplement.*

L'analyse reposant largement sur les inégalités, on les pratiquera régulièrement à l'occasion d'exercices.

Aucune démonstration n'est exigible des étudiants.

1 - Limite et continuité d'une fonction d'une variable en un point

Définition de la limite et de la continuité d'une fonction d'une variable en un point. Unicité de la limite. Limites à droite et à gauche. Extension au cas où f est définie sur $I \setminus \{x_0\}$. Extension de la notion de limite en $\pm\infty$ et aux cas des limites infinies.	On adoptera la définition suivante : f étant une fonction définie sur I, x_0 étant un élément de I ou une extrémité de I, et ℓ un élément de $\mathbf{R}$, on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $\lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant \varepsilon$; dans ce cas, lorsque x_0 appartient à I, f est continue en x_0, sinon f se prolonge en une fonction continue en x_0.
Opérations algébriques sur les limites. Compatibilité avec la relation d'ordre. Existence d'une limite par encadrement. Prolongement par continuité en un point.	
Si f admet une limite ℓ en x_0 et si (u_n) est une suite réelle définie sur I et tendant vers x_0, alors $(f(u_n))$ tend vers ℓ. Limite d'une fonction composée.	La caractérisation séquentielle de la limite n'est pas au programme.

2 - Étude globale des fonctions d'une variable sur un intervalle

On insistera sur les représentations graphiques. On s'appuiera sur les fonctions de référence pour illustrer les notions de cette section. Les fonctions exponentielle, puissance et logarithme ont été vues *en terminale. Les fonctions trigonométriques ne sont pas supposées connues. L'existence des fonctions cosinus et sinus n'est pas un enjeu du programme. On interprétera géométriquement leurs propriétés à l'aide du cercle trigonométrique.*

Fonctions de référence	exp, ln, $x \mapsto x^\alpha$, cos, sin, tan, arctan, valeur absolue et partie entière.
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Formules donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.	Aucune autre formule n'est exigible. Les formules produit seront vues en exercice et mises en application.
Croissances comparées	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^a \ln(x)^b$, $\lim\limits_{x \to 0} x^a \lvert\ln(x)\rvert^b$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \lvert x\rvert^a e^{bx}$.
Fonctions paires, impaires, périodiques.	
Fonctions majorées, minorées, bornées, monotones. Théorème de limite monotone.	Toute fonction monotone sur $]a, b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de $]a, b[$. Comportement en a et b.
Fonctions continues sur un intervalle, opérations algébriques, composition. Théorème des valeurs intermédiaires.	
L'image d'un intervalle (respectivement un segment) par une fonction continue est un intervalle (respectivement un segment).	Notations $\max\limits_{[a,b]} f$ et $\min\limits_{[a,b]} f$.
Théorème de la bijection.	Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. Sa bijection réciproque est elle-même continue et a le même sens de variation. On utilisera ce résultat pour l'étude des équations du type $f(x) = k$. En liaison avec l'algorithmique, méthode de dichotomie. ▶
Représentation graphique de la fonction réciproque.	

3 - Dérivation

Dérivées à gauche et à droite. Dérivée en un point. Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit, dérivée d'une composée. Exemples.	Interprétation graphique. ▶
Fonctions dérivables sur un intervalle, fonction dérivée. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Dérivation des fonctions réciproques.	Notation f'.
Dérivée d'un polynôme et des fonctions de référence.	

Théorème de Rolle.	
Égalité et inégalités des accroissements finis.	Si $\lvert f'\rvert \leqslant k$ sur un intervalle I, alors : $\forall (a,b) \in I^2, \quad \lvert f(b)-f(a)\rvert \leqslant k\lvert b-a\rvert.$ Application, sur des exemples, à l'étude de suites récurrentes du type : $u_{n+1} = f(u_n)$. Tout exposé théorique sur les suites récurrentes générales est exclu. ▶
Caractérisation des fonctions constantes et monotones par l'étude de la dérivée.	Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f' \geqslant 0$ sur I, f' ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
Théorème du prolongement de la dérivée.	Si f est $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$, continue en a, et si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell$, alors f est $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

4 - Intégration sur un segment

La construction de l'intégrale de Riemann est hors programme.

Définition de l'intégrale d'une fonction positive sur un segment comme aire sous la courbe. On généralise à une fonction de signe quelconque sans soulever de difficulté théorique.	Illustration par la méthode des rectangles. ▶
Sommes de Riemann	La convergence des sommes de Riemann ne sera démontrée que dans le cas d'une fonction continue de classe $\mathcal{C}^1$.
Linéarité, relation de Chasles, positivité et croissance.	
Cas d'une fonction continue, positive sur $[a,b]$ et d'intégrale nulle.	Si f est continue sur $[a,b]$ et $a \leqslant b$, $\left\lvert \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right\rvert \leqslant \int_a^b \lvert f(t)\rvert \mathrm{d}t.$
Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.	
$x \longmapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est une primitive de f.	Résultat admis. Pour toute primitive F de f : $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a),$ ▶ On pourra vérifier ce résultat sur des exemples en informatique.
Intégration par parties.	
Changement de variable.	Les changements de variable non affines doivent être indiqués aux candidats. On se restreindra à des changements de variables C^1 strictement monotones.

VI - **Probabilités sur un ensemble fini**

L'objectif de cette première approche est de mettre en place un cadre simplifié mais formalisé dans lequel on puisse mener des calculs de probabilités sans difficulté théorique majeure.

Dans la continuité du programme de terminale, l'étude préalable du cas fini permettra de consolider les acquis et de mettre en place, dans des situations simples, les concepts probabilistes de base, en ne *faisant appel qu'aux opérations logiques et arithmétiques élémentaires. C'est pourquoi, pour le premier semestre, on se restreindra à un univers Ω fini, muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Le terme tribu ne sera pas employé.*

On évitera pour cette première approche un usage avancé de la combinatoire, et l'on s'attachera à utiliser le vocabulaire général des probabilités.

1 - Généralités

a) Observation d'une expérience aléatoire - Événements

Expérience aléatoire. Univers Ω des résultats observables, événements. Opérations sur les événements, événements incompatibles (ou « disjoints »).	On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples. On fera le lien entre ces opérations et les connecteurs logiques.
Système complet d'événements fini.	Une famille $(A_i)_{i\in I}$, où I est un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$, est un système complet si elle vérifie les conditions deux suivantes : • $\forall i, j \in I$, si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$ • $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$.

b) Probabilité

Définition d'une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.	Une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est une application additive P à valeurs dans $[0,1]$ et vérifiant $P(\Omega)=1$. Cas de l'équiprobabilité.
Formule de Poincaré ou du crible pour deux et trois événements.	

c) Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle.	Notation P_A. P_A est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.
Formule des probabilités composées.	• Si $P(A) \neq 0$, $P(A\cap B) = P(A)P_A(B)$. • Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors : $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\,P_{A_1}(A_2)\ldots P_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)$.
Formule des probabilités totales	Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements fini, alors pour tout événement B : $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B\cap A_i)$. Si de plus, pour tout i $(1\leqslant i\leqslant n)$, $P(A_i)\neq 0$, on a : $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)$.
Formule de Bayes.	On donnera de nombreux exemples d'utilisation de ces formules.

d) Indépendance en probabilité

Indépendance de deux événements.	Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$. On remarquera que la notion d'indépendance est relative à la probabilité.
Indépendance mutuelle de n événements. Si n événements A_1, ..., A_n sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i, avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.	

2 - Variables aléatoires réelles finies

On introduit dans cette section la notion de variable aléatoire réelle définie sur un univers fini. Ces variables aléatoires sont alors à valeurs dans un ensemble fini, ce qui simplifie la démonstration des formules.

Une variable aléatoire réelle est une application de Ω dans $\mathbf{R}$.	On adoptera les notations habituelles telles que $[X \in I]$, $[X = x]$, $[X \leqslant x]$, etc.
Système complet associé à une variable aléatoire.	
Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle.	La loi de X est la donnée de $X(\Omega)$ et des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.
Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur $X(\Omega)$. Étude de la loi de $Y = g(X)$.	On se limitera à des cas simples, tels que $g(x) = ax + b$, $g(x) = x^2$, ...
Espérance d'une variable aléatoire.	$E(X) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.
Linéarité de l'espérance. Croissance de l'espérance	$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
Théorème de transfert.	$E(g(X)) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$. Théorème admis.
Variance et écart-type d'une variable aléatoire. Cas particulier où $V(X) = 0$.	Notations $V(X)$ et $\sigma(X)$.
Calcul de la variance. $V(aX + b) = a^2V(X)$.	Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée réduite.

3 - Lois usuelles ▶

Variable aléatoire certaine.	
Loi de Bernoulli, espérance et variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. La variable indicatrice $\mathbf{1}_A$ de l'événement A suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.
Loi binomiale. Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. On pourra faire le lien avec la formule du binôme de Newton et les propriétés des coefficients binomiaux.

Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, espérance, variance.	Application à l'étude de la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$, où $(a,b)\in\mathbf{Z}^2$. Notation $X\hookrightarrow\mathcal{U}([\![a,b]\!])$.

Enseignement de mathématiques du second semestre

I - Algèbre linéaire

L'objectif de ce chapitre est d'approfondir et compléter les notions vues au premier semestre.

1 - Espaces vectoriels de dimension finie

Dans cette section, aucune démonstration n'est exigible.

Espaces admettant une famille génératrice finie. Existence de bases. Si L est libre et si G est génératrice, le cardinal de L est inférieur ou égal au cardinal de G.	
Dimension d'un espace vectoriel.	Notation $\dim(E)$.
Caractérisation des bases.	Dans un espace vectoriel de dimension n, une famille libre ou génératrice de cardinal n est une base.
Rang d'une famille finie de vecteurs. Théorème de la base incomplète.	
Dimension d'un sous-espace vectoriel.	Si F est un sous-espace vectoriel de E et si $\dim(F)=\dim(E)$, alors $F=E$.

2 - Compléments sur les espaces vectoriels

Dans cette section, aucune démonstration n'est exigible.

Somme de deux sous-espaces vectoriels.	
Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.	Tout vecteur de la somme se décompose de manière unique.
Existence d'un supplémentaire en dimension finie.	
Dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie. Si F et G sont supplémentaires, $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$. Caractérisation de $E=F\oplus G$ par la dimension et l'intersection de F et G.	Dimension d'un supplémentaire.
Concaténation de bases de deux sous-espaces vectoriels.	Caractérisation de sommes directes par concaténation de bases.

3 - Applications linéaires

a) Cas général

Définition d'une application linéaire de E dans F. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F.	On s'appuiera sur des exemples concrets, par exemple l'application $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $X \longmapsto MX$, dont on soulignera les propriétés.
Composée de deux applications linéaires.	
Isomorphismes.	Un espace vectoriel est de dimension n si et seulement si il est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
Endomorphismes, espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E.	Puissances d'un endomorphisme.
Noyau et image d'une application linéaire.	
Projecteurs associés à deux espaces supplémentaires.	Caractérisation des projecteurs par la relation $p^2 = p$.

b) Cas de la dimension finie

Rang d'une application linéaire.	Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E alors la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ engendre $\mathrm{Im}(f)$. Lien entre recherche de l'image et résolution de système.
Formule du rang.	Si E et F sont des espaces vectoriels, E étant de dimension finie, et une application linéaire u de E dans F, $\dim E = \dim(\mathrm{Ker}\ u) + \dim(\mathrm{Im}\ u)$. Application à la caractérisation des isomorphismes. Application : le noyau d'une forme linéaire non-nulle est un hyperplan.

c) Matrices et applications linéaires

Matrice d'une application linéaire dans des bases.	Si $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont des bases respectives de E et F, notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$. Matrice de $f : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $X \longmapsto MX$ relative aux bases canoniques. Matrice d'une forme linéaire.
Interprétation matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	Matrices colonnes des coordonnées d'un vecteur dans deux bases différentes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Formule $X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$
Lien du produit matriciel avec la composition des applications linéaires.	Si $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ sont des bases respectives de E, F et G, f une application linéaire de E dans F, g une application linéaire de F dans G, on a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$.
Rang d'une matrice.	Pour toutes bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$, le rang de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$ est égal au rang de f.

Une matrice et sa transposée ont même rang.	Résultat admis.

d) Cas des endomorphismes et des matrices carrées

Matrice d'un endomorphisme f de E dans la base $\mathcal{B}$.	Notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
Formule du binôme pour deux endomorphismes ou deux matrices carrées qui commutent.	
Lien entre les isomorphismes de E et les matrices inversibles.	On pourra démontrer que pour le produit matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, l'inverse à gauche est également un inverse à droite.
Polynôme d'endomorphisme, polynôme de matrice carrée. Polynôme annulateur.	Exemples de calcul d'isomorphismes réciproques, d'inverses de matrices et de puissances k-ème d'une matrice par utilisation d'un polynôme annulateur. Toute théorie générale sur les polynômes annulateurs est exclue.

II - **Compléments d'analyse**

1 - Étude asymptotique des suites

Suite négligeable.	Notation $u_n = o(v_n)$. On présentera à nouveau les croissances comparées vues au premier semestre.
Suites équivalentes.	Notation $u_n \sim v_n$. $u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$.
Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient et l'élévation à une puissance.	

2 - Comparaison des fonctions d'une variable au voisinage d'un point

Fonction négligeable au voisinage de x_0. Notation $f = o(g)$.	On revient sur la croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0} x^a \lvert\ln(x)\rvert^b$
Fonctions équivalentes au voisinage de x_0.	Notation $f \underset{x_0}{\sim} g$. $f \underset{x_0}{\sim} g \Longleftrightarrow f = g + o(g)$.
Extension au cas $x_0 = \pm\infty$.	On revient sur les croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a \ln(x)^b$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \lvert x\rvert^a \mathrm{e}^{bx}$
Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient et l'élévation à une puissance.	

3 - Séries numériques

Convergence d'une série, somme et reste d'une série convergente.	On pourra utiliser des représentations graphiques pour conjecturer la nature d'une série. ▶

Combinaison linéaire de séries convergentes.

Convergence des séries à termes positifs.

Convergence des séries à termes positifs dans les cas $u_n \leqslant v_n$ et $u_n \sim v_n$.
Définition de la convergence absolue.

Résultat analogue pour les séries à termes négatifs. Résultats admis.

La convergence absolue implique la convergence.

On remarquera que toute série absolument convergente est la différence de deux séries à termes positifs convergentes.

Convergence des séries dans le cas $u_n = o(v_n)$ où (v_n) est une série convergente à termes positifs.

Résultat admis.

Convergence des séries de Riemann.

Convergence et formules de sommation des séries géométriques et de leurs deux premières dérivées.

Série exponentielle.

$\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. Ce résultat pourra être admis ou démontré ultérieurement à l'aide de la formule de Taylor. $\boxed{\blacktriangleright}$

Exemples d'étude de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ pour l'étude de la suite (u_n).

4 - Intégrales sur un intervalle quelconque

On évitera toute technicité dans ce chapitre dont l'objectif est d'introduire les outils utiles à l'étude des variables aléatoires à densité.

Intégration sur un intervalle semi-ouvert.
Convergence de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b[$ $(-\infty < a < b \leqslant +\infty)$.

On dira que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si $\displaystyle\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie.
On pose alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \mapsto b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Règles de calcul sur les intégrales convergentes, linéarité, relation de Chasles, positivité, inégalités.
Cas d'une fonction continue, positive sur $[a, b[$ et d'intégrale nulle.

Cas des fonctions positives.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si
$x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$.

Théorèmes de convergence pour f et g positives au voisinage de b, dans les cas où $f \leqslant g$ et $f \underset{b}{\sim} g$.

Théorème analogue pour des fonctions f et g négatives au voisinage de b. Théorèmes admis.

Définition de la convergence absolue.

La convergence absolue implique la convergence.

On remarquera que toute fonction continue est la différence de deux fonctions continues positives.

Théorèmes de convergence dans le cas $f = o(g)$ avec g positive au voisinage de b.

Théorème admis.

Extension des notions précédentes aux intégrales sur un intervalle quelconque.

Brève extension aux fonctions définies et continues sur $]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$.

Convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$.

Pratique de l'intégration par parties pour les intégrales sur un intervalle quelconque.

L'intégration par parties sera pratiquée pour des intégrales sur un segment, on effectuera ensuite un passage à la limite.

Changement de variables.

Si f est continue sur $]a, b[$, si φ est une bijection de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$, croissante et de classe C^1, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature et en cas de convergence sont égales.
Énoncé analogue dans le cas où φ est décroissante.
Les changements de variables non affines devront être indiqués aux candidats et ne pas présenter de difficultés techniques.

5 - Dérivées successives

Fonction p fois dérivable en un point.

Notation $f^{(p)}$.

Fonctions de classe C^p, de classe C^∞ sur un intervalle. Opérations algébriques, formule de Leibniz. Théorème de composition.

La dérivée $(n+1)$-ème d'un polynôme de degré au plus n est nulle.

6 - Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral.
Inégalité de Taylor-Lagrange.

Ces formules seront données à l'ordre n pour une fonction de classe C^∞.

7 - Développements limités

L'étude des développements limités ne constitue pas une fin en soi et l'on se gardera de tout excès de technicité dans ce domaine. La composition des développements limités n'est pas au programme. On se limitera, en pratique, à des développements limités au voisinage de 0.

Définition d'un développement limité.	On fera le lien entre un développement limité à l'ordre 1 et la valeur de la dérivée. On pourra introduire et manipuler la notation $x^n\varepsilon(x)$ avant l'utilisation éventuelle de la notation $o(x^n)$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe C^∞. Application de la formule de Taylor-Young au développement limité de fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, sinus et cosinus). Somme et produit de développements limités.	Résultat admis. Unicité du développement limité.
Allure locale du graphe d'une fonction admettant un développement limité du type : $f(x) = a_0 + a_1 x + a_k x^k + x^k\epsilon(x), k \geq 2$ et $a_k \neq 0$	La forme du graphe au voisinage d'un point dépend principalement du premier terme non linéaire du développement limité. Exemples avec $k = 2$ et $k = 3$

8 - Extremum

Pour préparer l'introduction des notions de topologie du programme de deuxième année, on insistera sur la différence entre la recherche d'extremum sur un segment et la recherche d'extremum sur un intervalle ouvert. On n'étudiera aucun exemple de fonction $\mathcal{C}^1$ sans être $\mathcal{C}^2$.

Toute fonction continue sur un segment admet des extrema globaux sur ce segment.	
Dans le cas d'une fonction de classe C^1 : condition nécessaire d'existence d'un extremum local sur un intervalle ouvert. Définition d'un point critique.	On pourra montrer que le résultat tombe en défaut lorsque l'intervalle de définition n'est pas ouvert.
Condition suffisante d'existence d'un extremum local en un point critique pour une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert.	Ce résultat sera démontré grâce au développement limité à l'ordre 2.

9 - Fonctions convexes

Tous les résultats de cette section seront admis. On n'étudiera aucun exemple de fonction convexe $\mathcal{C}^1$ sans être $\mathcal{C}^2$.

Définition des fonctions convexes, fonctions concaves.	Une fonction est convexe sur un intervalle I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall (t_1, t_2) \in [0,1]^2$ tels que $t_1 + t_2 = 1$, $$f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2).$$ Interprétation géométrique. $\boxed{\blacktriangleright}$
Généralisation de l'inégalité de convexité.	
Caractérisation des fonctions convexes de classe C^1.	Les étudiants devront savoir que si f est de classe C^1, alors f est convexe si et seulement si l'une des deux propositions est vérifiée : • f' est croissante ; • C_f est au-dessus des tangentes.
Caractérisation des fonctions convexes et concaves de classe C^2.	

Condition suffisante de minimum global en un point critique d'une fonction convexe définie sur un intervalle ouvert
Point d'inflexion.

10 - Graphes de fonctions

Utilisation récapitulative des notions précédentes pour l'étude graphique de fonctions. Allure locale du graphe (tangentes). Convexité. Asymptotes éventuelles.

On pourra étudier la position d'une courbe par rapport à une asymptote (éventuellement oblique). Les branches paraboliques ne sont pas au programme.
Exemples de points d'inflexion. ▶

III - Probabilités sur un ensemble quelconque

Dans ce second temps de l'étude des probabilités, le vocabulaire général est adopté et complété (en particulier le vocabulaire « espace probabilisé » et la notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$), mais aucune difficulté théorique sur l'ensemble des événements ne sera soulevée dans ce cadre. On n'emploiera pas le terme tribu.

1 - Espace probabilisé

Univers Ω des issues d'une expérience et ensemble des événements $\mathcal{A}$.

L'ensemble des événements contient Ω, est stable par union et intersection dénombrable, par passage au complémentaire.
Aucune difficulté théorique ne sera soulevée.

Une probabilité est une application P définie sur l'ensemble $\mathcal{A}$ des évenements à valeurs dans $[0,1]$, σ-additive telle que $P(\Omega) = 1$.

Notion d'espace probabilisé.

Notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Théorème de la limite monotone.

• Soit (A_n) une suite d'événements, croissante pour l'inclusion. On a :
$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(A_n\right).$$
• Soit (A_n) une suite d'événements, décroissante pour l'inclusion. On a :
$$P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(A_n\right).$$

Conséquences du théorème de la limite monotone.

Pour toute suite (B_k) d'événements,
• $P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right)$.
• $P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} B_k\right)$.
Les démonstrations de ces formules ne sont pas exigibles.

Propriétés vraies presque sûrement. Événement négligeable, événement presque sûr.

On pourra donner comme exemple d'événement négligeable la réalisation d'une suite infinie de PILE lors d'un jeu de PILE ou FACE.

Notion de probabilité conditionnelle conditionnée par un évènement de probabilité non nulle.

Si A vérifie $P(A) \neq 0$, alors $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ est un espace probabilisé.

Formule des probabilités totales.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un système complet d'événements non négligeables. Pour tout événement B on a :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B).$$

Indépendance mutuelle d'une suite infinie d'événements.

2 - Variables aléatoires réelles discrètes

On commencera cette section en expliquant comment les résultats vus précédemment se prolongent dans le cadre général. On ne soulèvera pas de difficulté théorique liée à l'ordre (convergence commutative d'une série absolument convergente) ou à la dénombrabilité.

Définition d'une variable aléatoire réelle discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Une fonction $X : \Omega \to \mathbf{R}$ est une variable aléatoire discrète lorsque :
- $X(\Omega) = \{u_i\}_{i\in I}$ où I est une partie finie ou infinie de $\mathbf{N}$;
- pour tout $i \in I, [X = u_i]$ est un événement.

Loi d'une variable aléatoire discrète.

La loi de X est la donnée de l'ensemble $X(\Omega)$ et des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X. Étude de la loi de $Y = g(X)$.

Indépendance mutuelle de n variables aléatoires discrètes.

Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes (mutuellement) lorsque pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ on a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

Espérance d'une variable aléatoire.

Quand $X(\Omega)$ est infini, X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x)$ est absolument convergente.
Cette valeur ne dépend pas de l'indexation de $X(\Omega)$ (admis).

Linéarité de l'espérance.
Croissance de l'espérance.

$E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)$. Résultat admis.

Existence d'une espérance par domination.	Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes vérifiant $0 \leqslant \|X\| \leqslant Y$, et si Y admet une espérance, alors X admet également une espérance. Dans ce cas, $\|E(X)\| \leqslant E(Y)$. Résultat admis.
Théorème de transfert.	Quand $X(\Omega)$ est infini, $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x\in X(\Omega)} g(x)P(X=x)$ est absolument convergente, et alors $$E(g(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} g(x)P(X=x).$$ Cette valeur ne dépend pas de l'indexation de $X(\Omega)$. Théorème admis.
Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète.	Notations $V(X)$ et $\sigma(X)$.
Calcul de la variance. $V(aX+b) = a^2V(X)$.	Formule de Koenig-Huygens : $$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$ $\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée réduite.
Cas particulier où $V(X) = 0$.	
Introduction à la notion de fonction de répartition.	F_X est définie sur $\mathbf{R}$ par : $F_X(x) = P(X \leq x)$.

3 - Lois de variables aléatoires discrètes usuelles

L'étude des variables aléatoires et notamment celles associées aux lois usuelles se fera en lien étroit avec la partie informatique du programme. On revisitera les lois usuelles du premier semestre. ▶

Retour sur les variables aléatoires certaines.	Fonction de répartition.
Retour sur les variables de Bernoulli.	Fonction de répartition.
Loi géométrique (rang d'apparition d'un premier succès dans un processus de Bernoulli sans mémoire). Définition, espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. ▶ Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, pour tout nombre entier naturel non nul k, $$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}.$$
Loi de Poisson : définition, espérance, variance	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. ▶

4 - Couples de variables aléatoires réelles discrètes

Caractérisation de la loi d'un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes.	La loi d'un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes est caractérisée par la donnée des valeurs $P([X=x]\cap[Y=y])$ pour tout $(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)$.

Retour sur l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.	Deux variables aléatoires X et Y discrètes sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y]) = P([X = x])P([Y = y])$.
Stabilité des lois binomiales et de Poisson.	• Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. • Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
Loi d'une variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ où g est une fonction définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X, Y).	On se limitera à des cas simples tels que $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$, $X + Y$.
Espérance de $Z = g(X, Y)$ et théorème de transfert.	Sous réserve de convergence absolue : $$E(Z) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x, y)P([X = x] \cap [Y = y]).$$ Résultat admis, qui peut a posteriori justifier la linéarité de l'espérance.
Espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes.	Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant une espérance, alors XY admet également une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$. On pourra admettre ce résultat.

5 - Convergences et approximations

Il s'agit dans cette partie de familiariser les étudiants avec ces notions, sans définir la convergence en probabilité ni la convergence en loi.

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour les variables aléatoires discrètes.	Si X est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors pour tout $\lambda > 0$: $$P(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{E(X)}{\lambda}.$$ Pour toute variable aléatoire X admettant espérance et variance, pour tout $\varepsilon > 0$: $$P(\lvert X - E(X) \rvert \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Loi faible des grands nombres.	Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi qui admettent une espérance m et une variance, et si $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a : $$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left\|\overline{X_n} - m\right\| \geq \varepsilon\right) = 0.$$ ▶ La loi faible des grands nombres appliquée à des variables de Bernoulli permet de conforter l'approche intuitive de probabilité d'un événement
Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson	Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de variables aléatoires suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ alors pour tout k entier naturel : $$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k),$$ où X suit une loi de Poisson de paramètre λ. ▶

Enseignement annuel d'informatique et algorithmique

L'objectif est d'assoir les connaissances des étudiants en algorithmique et de les entraîner à l'utilisation de l'informatique en mathématiques au travers de thèmes empruntés au programme pour comprendre, illustrer et éclairer les notions introduites. Dès qu'un calcul numérique est envisagé, dès qu'un problème incite à tester expérimentalement un résultat, dès qu'une situation aléatoire peut être modélisée avec des outils informatiques, le recours à des algorithmes et des logiciels devra devenir naturel.

Les séances de travaux pratiques doivent se faire le plus souvent possible sur ordinateur. Les étudiants, au cours de leurs études ultérieures puis de leur parcours professionnel, seront amenés à utiliser des outils informatiques divers choisis pour leurs fonctionnalités, et seule une pratique régulière de ces outils informatiques peut leur permettre d'en acquérir la maîtrise. De plus, en adoptant cette démarche exploratoire permise par le dialogue interactif avec la machine, cette pratique peut s'avérer bénéfique pour les apprentissages et faciliter la compréhension de concepts plus abstraits.

Le langage retenu pour la programmation dans le programme des classes économiques et commerciales, option mathématiques approfondies , est Python.

Toute la richesse du langage Python ne peut pas être entièrement maîtrisée par un étudiant, aussi seules les fonctions et commandes introduites en figurant dans la sous-partie « Commandes exigibles » sont exigibles. Néanmoins, se contenter de ces seules commandes, en ignorant les nombreuses possibilités et commodités du langage, se révélerait rapidement contraignant et limitatif. De nouvelles commandes Python peuvent donc être introduites, mais cela devra se faire avec parcimonie, l'objectif principal de l'activité informatique reste la mise en pratique des connaissances mathématiques. On favorisera à cette occasion l'autonomie et la prise d'initiatives des étudiants grâce à l'utilisation de l'aide de Python, et à l'usage d'opérations de« copier-coller » qui permettent de prendre en main rapidement des fonctions nouvelles et évitent d'avoir à connaître par cœur la syntaxe de commandes complexes.

Seules les notions de Python indiquées dans le programme sont exigibles. La syntaxe précise des commandes devra être rappelée.

1 - Programmation d'algorithmes et de fonctions

`if ...:` `    ...`	Structures conditionnelles.
Emploi de `else, elif`	

`for k in range(a,b):`
`for k in T:`
`while ...:`
	`T` peut être une matrice, un vecteur, une chaîne de caractères. Les commandes `break` et `continue` ne sont pas exigibles.

`def f(x,y):`
`    ...`
`    return ...`
	Définition d'une fonction.

2 - Commandes exigibles

Il s'agit de la liste des commandes utiles pour les travaux pratiques des deux années de formation. Il n'y a pas lieu d'introduire en première année les commandes qui relèvent de notions de seconde année.

a) Disponibles de base dans Python

Affectation : `nom = expression`	L'expression peut être du type numérique, booléen, matriciel (ndarray) ou chaîne de caractères.
`#` permet d'insérer un commentaire	Les étudiants doivent savoir faire un usage judicieux des commentaires.
`+` `-` `*` `/` `**`	Opérations arithmétiques de base.
`==` `>` `<` `>=` `<=` `!=`	Comparaison, test.
`True` `False` `and` `or` `not`	Logique.
`from ... import *, import ... as`	Importation d'une bibliothèque.

b) Dans la librairie `numpy`

Exemple d'importation : `import numpy as np`

`np.array, np.zeros, np.ones, np.eye, np.linspace, np.arange`	Création de vecteurs et de matrices. Extraction ou modification d'un élément, d'une ligne ou d'une colonne d'une matrice.
`+` `-` `*` `/` `**`	Opérations arithmétiques de base : coefficient par coefficient.
`==` `>` `<` `>=` `<=` `!=`	Comparaison de deux matrices (`M == N`), comparaison d'une matrice et d'un nombre (`M>=1`).
`a,b = np.shape(M)`	Taille de la matrice `M`.
`np.dot, np.transpose`	Syntaxes exigibles : `np.transpose(M)`, `np.dot(M1,M2)`. L'usage de méthode comme `M.transpose()`, `M1.dot(M2)` est non-exigible.
`np.sum, np.min, np.max, np.mean, np.cumsum, np.median, np.var, np.std`	Ces opérations peuvent s'appliquer sur une matrice entière ou bien pour chaque colonne (ou chaque ligne). Exemple : `mean(M)`, `mean(M,0)`, `mean(M,1)`
`np.exp, np.log, np.sin, np.cos, np.sqrt, np.abs, np.floor`	Ces fonctions peuvent s'appliquer à des variables numériques ou vectoriellement (à des matrices ou vecteurs) élément par élément. On pourra utiliser la commande `f = np.vectorize(f)` mais elle n'est pas exigible.
`np.e, np.pi`	

c) Dans la librairie `numpy.linalg`

Exemple d'importation : `import numpy.linalg as al`

`al.inv, al.rank, al.matrix_power,`
`al.solve, al.eig`

d) Dans la librairie `numpy.random`

Exemple d'importation : `import numpy.random as rd`

`rd.random, rd.binomial, rd.randint, rd.geometric, rd.poisson, rd.exponential, rd.normal, rd.gamma`	On utilisera ces fonctions pour générer un nombre aléatoire ou bien un vecteur ou une matrice à coefficients aléatoires. Exemple : `rd.binomial(10,0.2)`, `rd.binomial(10,0.2,100)`, `rd.binomial(10,0.2,[100,10])`

e) Dans la librairie `scipy.special`

Exemple d'importation : `import scipy.special as sp`

`sp.ndtr`	Fonction Φ

f) Dans la librairie `matplotlib.pyplot`

Exemple d'importation : `import matplotlib.pyplot as plt`

`plt.plot, plt.show`	Représentations graphiques de fonctions, de suites. On pourra utiliser les commandes `xlim, ylim, axis, grid, legend` mais elles ne sont pas exigibles.
`plt.hist`	La maîtrise des options de cette fonction n'est pas exigible.
`plt.contour`	Tracés de lignes de niveau en lien avec `np.meshgrid`. La maîtrise de cette fonction n'est pas exigible.
`plt.quiver`	Tracés de gradients en lien avec `np.meshgrid`. La maîtrise de cette fonction n'est pas exigible.

g) Utilisation de la fonction `Axes3D`

Exemple d'importation :

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
ax = Axes3D(plt.figure())
```

`ax.plot_surface`	Représentation de surfaces en lien avec `np.meshgrid`. La maîtrise de cette fonction n'est pas exigible.

3 - Liste de savoir-faire exigibles en première année

Représentation graphique d'une fonction.

Calcul des termes et représentation graphique d'une suite.	Représentation des points (n, u_n). Pour une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, représentation des termes de la suite à partir du graphe de f.
Calculs de valeurs approchées de la limite d'une suite ou de la somme d'une série.	On utilisera des structures répétitives et conditionnelles en exploitant l'étude mathématique. La détermination du rang d'arrêt du calcul résultera directement de l'étude mathématique ou d'un algorithme qui en découle.

Calcul approché de la racine d'une équation du type $f(x) = 0$.	On utilisera différentes méthodes dont certaines résulteront d'une étude mathématique (suites récurrentes, encadrements, dichotomie).
Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles.	Pour des fonctions f à primitive F connue, on pourra vérifier expérimentalement le lien entre primitive et intégrale, en comparant $F(b) - F(a)$ avec une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
Utilisation de la fonction `rd.random` pour simuler des expériences aléatoires.	On pourra simuler ainsi des lois binomiale et géométrique.
Simulation d'échantillons de lois usuelles.	On pourra utiliser les fonctions **`rd.binomial, rd.randint, rd.geometric, rd.poisson`**
Série statistique associée à un échantillon.	Fréquences, fréquences cumulées, histogramme. Moyenne, médiane. Variance et écart-type empiriques. Sur les loi usuelles, on pourra faire un lien entre fréquences et loi, fréquences cumulées et fonction de répartition, moyenne et espérance, variance empirique et variance. On pourra comparer expérimentalement les lois $\mathcal{B}(n, \dfrac{\lambda}{n})$ et $\mathcal{P}(\lambda)$.
Approche expérimentale de la loi de Gauss.	On pourra superposer la courbe de $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ et l'histogramme d'un échantillon de $\dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
Calcul approché d'une probabilité.	Approche intuitive de l'estimation : si $P(A)$ est difficile à calculer, on peut simuler N fois l'expérience et assimiler $P(A)$ à la fréquence de réalisation de A.
Résolution de systèmes $MX = B$.	On pourra programmer l'algorithme du pivot de Gauss sur un exemple. En pratique on utilisera plutôt la fonction `al.solve`.

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques approfondies – informatique de la classe d'ECG 2nde année

Table des matières

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

L'objectif de la formation dans les classes préparatoires économiques et commerciales n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement de ces classes et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent également certains points de terminologie et certaines notations.
Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse...).

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.

- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

3 Architecture des programmes

Le programme de mathématiques de deuxième année de la filière EC de mathématiques approfondies se situe dans le prolongement de celui de première année et permet d'en consolider les acquis. Son objectif est de fournir aux étudiants le bagage nécessaire pour suivre les enseignements spécialisés de mathématiques, économie et gestion dispensés en Grande École ou en troisième année de Licence à l'université.

Il s'organise autour de quatre points forts :

- En algèbre linéaire et bilinéaire, on introduit la réduction des endomorphismes et des matrices carrées ainsi que les structures euclidiennes. Ces notions d'algèbre linéaire trouveront des applications en analyse lors de l'optimisation des fonctions de plusieurs variables, mais aussi en probabilités et en analyse de données (statistiques descriptives bivariées).
- En analyse, on complète l'étude des intégrales généralisées débutée en première année de classe préparatoire et on introduit les fonctions de plusieurs variables définies sur $\mathbf{R}^n$ ainsi que la notion de gradient. Au quatrième semestre, on poursuit cette étude dans le but de résoudre des problèmes d'optimisation avec ou sans contraintes, cruciaux en économie et en finance.
- En probabilités, l'étude des variables aléatoires discrètes, initiée au lycée et poursuivie en première année, se prolonge au troisième semestre par l'étude des couples et des suites de variables aléatoires discrètes ; au quatrième semestre, les notions sur les variables aléatoires à densité sont complétées. L'ensemble des notions sera présenté en lien avec la simulation informatique des phénomènes aléatoires. Un des objectifs est de permettre, en fin de formation, une approche plus rigoureuse (et une compréhension plus aboutie) des méthodes de l'estimation ponctuelle ou par intervalles de confiance.
- L'informatique est enseignée tout au long de l'année en lien direct avec le programme de mathématiques. Cette pratique régulière permettra aux étudiants de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple de la simulation de lois de probabilité, de la recherche d'extrema en analyse ou de différentes techniques d'estimation.

Au fur et à mesure de la progression, on aura à cœur de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme «admis», la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les séances de travaux dirigés permettent de privilégier la prise en main, puis la mise en œuvre par les étudiants, des techniques usuelles et bien délimitées, inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes. Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les parties du programme pouvant être traitées en liaison avec l'informatique.

Le langage Python comporte de nombreuses fonctionnalités permettant d'illustrer simplement certaines notions mathématiques. Ainsi, on utilisera avec pertinence l'outil informatique en cours de mathématiques pour visualiser et illustrer les notions étudiées.
Les travaux pratiques de mathématiques avec Python sont organisés autour de quatre thèmes faisant intervenir divers points du programme de mathématiques. L'objectif est d'apprendre aux étudiants à utiliser Python de manière judicieuse et autonome ainsi que de leur permettre d'illustrer ou de modéliser des situations concrètes en mobilisant leurs connaissances mathématiques. Les savoir-faire et compétences que les étudiants doivent acquérir lors de ces séances de travaux pratiques sont spécifiés dans la liste des exigibles et rappelés en préambule de chaque thème. Les nouvelles notions mathématiques introduites dans certains thèmes ne font pas partie des exigibles du programme. L'enseignement de ces travaux pratiques se déroulera sur les créneaux horaires dédiés à l'informatique.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU TROISIÈME SEMESTRE

I - Algèbre linéaire et bilinéaire

1 - Compléments d'algèbre linéaire

a) Somme directe de sous-espaces vectoriels

Dimension d'une somme directe de k espaces vectoriels.	Base adaptée à une somme directe.
Concaténation de bases de sous espaces vectoriels.	Caractérisation de sommes directes par concaténation des bases.

b) Changement de base

Matrice d'un endomorphisme dans une base.	Rappels.
Matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.	Notation $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}^{-1} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.	
Formules de changement de base.	$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\, P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
Matrices semblables.	Deux matrices A et B carrées sont semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. A et B sont semblables si et seulement si elles représentent les matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes.

c) Trace

La trace d'une matrice carrée est introduite uniquement comme outil simple et efficace en vue de la recherche de valeurs propres. Tout développement théorique est exclu. Aucun autre résultat concernant la trace n'est au programme.

Trace d'une matrice carrée. Linéarité de la trace et $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.	Notation $\mathrm{Tr}(A)$.
Invariance de la trace par changement de base.	$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP)$.

2 - Éléments propres des endomorphismes et des matrices carrées, réduction

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont définis sur $\mathbf{R}$*. Dans toute cette partie,* f *désignera un endomorphisme d'un espace vectoriel* E *de dimension finie, et* A *une matrice carrée.*

a) Vecteurs propres et espaces propres

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme de E et d'une matrice carrée.	Valeurs propres des matrices triangulaires.
Spectre d'un endomorphisme et d'une matrice carrée.	Notations $\mathrm{Sp}(f)$ et $\mathrm{Sp}(A)$.
Si Q est un polynôme, obtention d'éléments propres de $Q(f)$ à partir d'éléments propres de f.	Si $f(x) = \lambda x$ alors $Q(f)(x) = Q(\lambda)x$. Si $AX = \lambda X$ alors $Q(A)X = Q(\lambda)X$.

b) Recherche d'éléments propres

Polynômes annulateurs d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.	On pourra donner les exemples des homothéties, des projecteurs et des symétries.
Si Q est un polynôme annulateur de f (respectivement A) et λ une valeur propre de f (respectivement A), alors λ est racine de Q.	
Tout endomorphisme d'un espace de dimension finie admet au moins un polynôme annulateur non nul. Toute matrice carrée admet au moins un polynôme annulateur non nul.	Aucune autre connaissance sur les polynômes annulateurs ne figure au programme.

c) Propriétés générales

Un endomorphisme d'un espace de dimension finie admet un nombre fini de valeurs propres et ses sous-espaces propres sont en somme directe.	$\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} \dim\ker(f-\lambda\mathrm{Id}_E) \leqslant \dim(E)$.
Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes forme une famille libre de E.	En particulier, une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est une famille libre. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n a au plus n valeurs propres.

d) Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E composée de vecteurs propres de f.	$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est alors une matrice diagonale.
Caractérisation des endomorphismes diagonalisables à l'aide des dimensions des sous-espaces propres.	f est diagonalisable si et seulement si $\displaystyle\sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}(f)} \dim\ker(f-\lambda \mathrm{Id}_E) = \dim(E)$.
f est diagonalisable si et seulement si E est somme directe des sous-espaces propres de f.	Si $\dim(E) = n$, tout endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.
Matrices diagonalisables, diagonalisation d'une matrice carrée.	Interprétation matricielle des résultats précédents. A est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale. Les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
Application au calcul des puissances d'une matrice carrée.	

3 - Algèbre bilinéaire

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les notions fondamentales de l'algèbre bilinéaire dans le cadre euclidien, utilisées en particulier lors de l'étude des fonctions de n variables. L'étude des endomorphismes symétriques sera faite au quatrième semestre.

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. On identifiera $\mathbf{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$.

a) Produit scalaire

Produit scalaire, norme associée.	Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique, définie positive. Produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$; exemples de produits scalaires.
Inégalité de Cauchy-Schwarz.	Cas de l'égalité.
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux.	
Familles orthogonales, familles orthonormales ou orthonormées.	On ne considèrera que des familles finies. Toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.
Théorème de Pythagore.	

b) Espaces euclidiens

Dans ce paragraphe x, y désignent des vecteurs d'un espace vectoriel et X, Y sont les colonnes coordonnées correspondantes dans une base.

Espace euclidien.	Un espace euclidien est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$, muni d'un produit scalaire.
Existence de bases orthonormées.	On pourra introduire la méthode de l'orthonormalisation de Schmidt sur des exemples en petite dimension, mais cette méthode n'est pas exigible.
Coordonnées et norme d'un vecteur dans une base orthonormée.	$$x = \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i \ , \ \Vert x \Vert^2 = \sum_i \langle x, e_i \rangle^2.$$
Expression matricielle du produit scalaire et de la norme euclidienne en base orthonormée.	$$\langle x, y \rangle = {}^tXY \ ; \ \Vert x \Vert^2 = {}^tXX.$$
Changement de bases orthonormées.	La matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée est orthogonale : $P^{-1} = {}^tP$. Aucune autre connaissance sur les matrices orthogonales n'est au programme.
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel.	Notation $F^\perp$.
Complétion d'une famille orthonormée en une base orthonormée.	

II - **Fonctions réelles définies sur $\mathbf{R}^n$**

1 - Introduction aux fonctions définies sur $\mathbf{R}^n$

Au troisième semestre, l'objectif est de confronter les étudiants à la notion de fonction réelle de n variables, aux principales définitions tout en évitant les problèmes de nature topologique. C'est pourquoi le domaine de définition des fonctions sera systématiquement $\mathbf{R}^n$, muni de sa structure euclidienne canonique. L'étude de la continuité d'une fonction en un point pathologique est hors programme, ainsi que l'étude des recollements de formules lorsque f est définie sur $\mathbf{R}^n$ par plusieurs formules.
Dès que possible, les notions introduites seront illustrées à l'aide de la libraire matplotlib.pyplot de Python.

Fonctions définies sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.	On donnera de nombreux exemples de fonctions de 2, 3 ou n variables réelles. Les fonctions polynomiales de n variables donnent des exemples simples de fonctions définies sur $\mathbf{R}^n$.
Équation du graphe d'une fonction définie sur $\mathbf{R}^n$.	Cas des fonctions affines de n variables.
Lignes de niveau pour les fonctions de deux variables.	On se limitera à des exemples simples.

Continuité d'une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$.	Une fonction f, définie sur $\mathbf{R}^n$, est continue au point x_0 de $\mathbf{R}^n$ si : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $\Vert x - x_0 \Vert \leqslant \alpha \Longrightarrow \vert f(x) - f(x_0) \vert \leqslant \varepsilon$. f est continue sur $\mathbf{R}^n$ si et seulement si f est continue en tout point de $\mathbf{R}^n$. Aucune difficulté ne sera soulevée sur ce sujet. On mettra en avant l'analogie avec la notion de continuité des fonctions d'une variable vue en première année. Les fonctions polynomiales de n variables sont continues sur $\mathbf{R}^n$. Résultat admis.
Opérations sur les fonctions continues.	Somme, produit, quotient. La composition d'une fonction continue sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans un intervalle I de $\mathbf{R}$ par une fonction continue de I à valeurs dans $\mathbf{R}$ est continue. Résultats admis.

2 - Calcul différentiel

L'introduction des notions différentielles concernant les fonctions numériques de plusieurs variables réelles se fait en se limitant aux fonctions définies sur $\mathbf{R}^n$. La détermination de la classe d'une fonction n'est pas au programme.
La recherche d'extremum est abordée ici, jusqu'à la condition nécessaire du premier ordre.

Les fonctions sont désormais supposées définies et continues sur $\mathbf{R}^n$.

a) Dérivées partielles, gradient

Fonctions partielles en un point.	
Dérivées partielles d'ordre 1.	Notation $\partial_i f$.
Gradient en un point x.	Notation $\nabla f(x)$. $\nabla f(x)$ est l'élément de $\mathbf{R}^n$ égal à $(\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x))$.
Dérivées partielles d'ordre 2.	Notation $\partial^2_{i,j} f$.
Fonctions de classe C^1 et C^2 sur $\mathbf{R}^n$.	Les fonctions polynomiales de n variables sont des fonctions de classe C^2 sur $\mathbf{R}^n$. Résultat admis.
Opérations sur les fonctions de classe C^1 et C^2.	Somme, produit, quotient. La composition d'une fonction de classe C^1 [resp. C^2] sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans un intervalle I de $\mathbf{R}$ par une fonction de classe C^1 [resp. C^2] sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$ est de classe C^1 [resp. C^2]. Résultats admis.
Pour une fonction de classe C^1 : existence et unicité d'un développement limité d'ordre 1 en un point.	$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \Vert h \Vert \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(0) = 0$ et ε continue en 0. Résultat admis.
Si f est de classe C^1, dérivée de la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par : $g(t) = f(x + th)$.	$g'(t) = \langle \nabla f(x + th), h \rangle$ et donc $g'(0) = \nabla f(x_0)$. Interprétation géométrique du gradient.

b) Recherche d'extremum : condition d'ordre 1

Définition d'un extremum local, d'un extremum global.	
Condition nécessaire du premier ordre. Point critique.	Si une fonction f de classe C^1 sur $\mathbf{R}^n$ admet un extremum local en un point x, alors $\nabla f(x) = 0$. Les points où le gradient s'annule sont appelés points critiques.

III - Compléments de probabilités ; couples et n-uplets de variables aléatoires réelles

L'objectif est double :

- *d'une part, consolider les acquis de première année concernant les variables aléatoires discrètes, et enrichir le champ des problèmes étudiés, avec, en particulier, l'étude simultanée de variables aléatoires (vecteurs aléatoires de $\mathbf{R}^n$) ;*
- *d'autre part, effectuer une étude élémentaire des lois continues usuelles discrètes ou à densité.*

On fera des liens entre certaines lois dans le cadre des approximations et des convergences, ainsi que les liens entre statistique et probabilités dans le cadre de l'estimation.

La théorie des familles sommables n'est pas au programme. Aucune difficulté concernant la dénombrabilité ne sera soulevée (on pourra si besoin admettre que $\mathbf{N}^k$ est dénombrable.) On admettra le théorème suivant :
Soit I un ensemble dénombrable infini, indexé par $\mathbf{N}$ sous la forme $I = \{\varphi(n); n \in \mathbf{N}\}$ où φ est une bijection de $\mathbf{N}$ dans I. Si la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge absolument, alors sa somme est indépendante de l'indexation φ, et pourra également être notée $\sum\limits_{i \in I} u_i$. L'étude de cette convergence n'est pas un objectif du programme. On dira alors que la série est absolument convergente (ou converge absolument). Toutes les opérations (somme, produit, regroupement par paquets, etc.) sont alors licites. Aucune difficulté ne sera soulevée sur ces notions, qui ne sont pas exigibles des étudiants, et tout exercice ou problème y faisant référence devra impérativement les rappeler.

1 - Compléments sur les variables aléatoires réelles

a) Généralités sur les variables aléatoires réelles

On rappellera la signification de la notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.	
Définition d'une variable aléatoire.	Une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est une application $X : \Omega \to \mathbf{R}$ telle que, pour tout x dans $\mathbf{R}$, $[X \leq x]$ est un événement. Le fait de vérifier qu'une fonction est une variable aléatoire n'est pas un des objectifs du programme.
Fonction de répartition d'une variable aléatoire.	

Loi d'une variable aléatoire	C'est la donnée des probabilités $P(X \in I)$ où I est intervalle. La loi est caractérisée par la fonction de répartition.
Une combinaison linéaire, un produit de variables aléatoires sont des variables aléatoires. Le maximum et le minimum de variables aléatoires sont des variables aléatoires.	Résultat admis.

b) Espérance et conditionnement pour les variables aléatoires discrètes

Espérance conditionnelle.	Si A est un événement de probabilité non nulle, $E(X/A)$ est l'espérance de X, si elle existe, pour la probabilité conditionnelle P_A.
Formule de l'espérance totale.	Soit X une variable aléatoire discrète, soit (A_n) un système complet d'événements tels que, pour tout n dans $\mathbf{N}$, $P(A_n) \neq 0$. Alors X admet une espérance pour P si et seulement si : — pour tout $n \in \mathbf{N}$ l'espérance conditionnelle $E(X/A_n)$ existe ; — la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} E(\lvert X \rvert/A_n)P(A_n)$ converge. Dans ce cas, $E(X) = \sum_{n \in \mathbf{N}} E(X/A_n)P(A_n)$.

2 - Introduction aux variables aléatoires à densité

a) Densités et fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition d'une densité de probabilité sur $\mathbf{R}$.	Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une densité de probabilité lorsqu'elle est continue sauf en nombre fini de points, positive et vérifie : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$
Définition d'une variable aléatoire à densité.	On dit qu'une variable aléatoire X est à densité si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini de points. Toute fonction égale à F'_X sauf éventuellement en un nombre finie de point est une densité de probabilité et on dit que c'est une densité de X. Pour tout x de $\mathbf{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$.
Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire à densité par la donnée d'une densité f_X. Toute densité de probabilité sur $\mathbf{R}$ est la densité d'une variable aléatoire.	 Résultat admis.

Transformation affine d'une variable à densité.	Les étudiants devront savoir calculer la fonction de répartition et la densité de $aX + b$ ($a \neq 0$).
Exemples simples de calculs de fonctions de répartition et de densités de fonctions d'une variable aléatoire à densité.	Les étudiants devront savoir retrouver les lois de X^2 et $\varphi(X)$ avec φ de classe C^1 strictement monotone sur $X(\Omega)$.

b) Espérance des variables aléatoires à densité

Espérance d'une variable aléatoire à densité. Variables aléatoires centrées.	Une variable aléatoire X de densité f_X admet une espérance $E(X)$ si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente ; dans ce cas, $E(X)$ est égale à cette intégrale. Exemple de variables aléatoires n'admettant pas d'espérance.
Linéarité et croissance de l'espérance pour les variables aléatoires à densité.	Résultat admis.
Existence d'espérance par domination.	Résultat admis.
Théorème de transfert.	Si X est une variable aléatoire ayant une densité f_X nulle en dehors de l'intervalle $]a, b[$, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, et si g est une fonction continue sur $]a, b[$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, $E(g(X))$ existe et est égale à $\displaystyle\int_a^b g(t) f_X(t)\mathrm{d}t$ si et seulement si cette intégrale converge absolument. On pourra admettre ou démontrer ce résultat dans le cas où g est de classe C^1, avec g' strictement positive (ou strictement négative) et le vérifier dans des cas simples. Cette démonstration n'est pas exigible.

3 - Lois de variables aléatoires à densité usuelles

Loi uniforme sur un intervalle. Espérance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a, b]$. $$X \hookrightarrow \mathcal{U}[0, 1] \iff a + (b - a)X \hookrightarrow \mathcal{U}[a, b].$$
Loi exponentielle. Caractérisation par l'absence de mémoire. Espérance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. $$X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \iff \frac{1}{\lambda}X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \quad (\lambda > 0).$$
Loi normale centrée réduite, loi normale (ou de Laplace-Gauss). Espérance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Transformées affines de variables aléatoires suivant des lois normales.	Si X suit une loi normale, et si a et b sont deux réels, avec $a \neq 0$, alors la variable aléatoire $aX + b$ suit également une loi normale. Si $\sigma > 0$, $$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Propriété de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Pour tout réel x : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Exemples d'utilisation de la table de la loi normale et interprétation graphique.
On attend des étudiants qu'ils sachent représenter graphiquement les fonctions densités des lois normales et utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite. ▶

Lois γ. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi γ.

X suit une loi $\gamma(\nu)$, avec $\nu > 0$, si X admet comme densité :

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

avec $\Gamma(\nu) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\nu-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. Pour le calcul des moments de la loi γ, on pourra établir $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$ et $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout entier n de $\mathbf{N}$.

4 - Variance des variables aléatoires à densité

Variance, écart-type. Variables aléatoires centrées, centrées réduites.
Variance d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle (uniforme sur un intervalle, exponentielle, normale).

Illustrations avec les lois usuelles.
On pourra donner un exemple de variable aléatoire n'admettant pas de variance.

On admettra que l'existence de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire X est équivalente à l'existence de $E(X^2)$.

5 - n-uplets de variables aléatoires réelles ; généralisation des propriétés de l'espérance et de la variance

Dans cette partie, on étend la notion de loi de couple de variables aléatoires discrètes vue en première année à un vecteur aléatoire, puis, de manière intuitive, la notion d'espérance à une somme de variables aléatoires admettant chacune une espérance. La définition de l'espérance générale ou des moments d'une variable aléatoire dans un cadre quelconque n'étant pas au programme, toute difficulté s'y ramenant est à écarter. On admettra que les propriétés opératoires usuelles de l'espérance et la variance se généralisent aux variables aléatoires quelconques.
L'étude, pour $n > 2$, de n-uplets à composantes non indépendantes n'est pas un objectif du programme.

a) Généralisation

Loi d'un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}^n$. Loi marginale.	La loi d'un vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires réelles est donné par la fonction $F_{(X_1,\ldots,X_n)}$ définie sur $\mathbf{R}^n$ par : $$F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x_i]\right).$$ Aucune difficulté ne sera soulevée sur cette notion.
Caractérisation de la loi d'un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbf{R}^n$.	
Si deux vecteurs $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ ont même loi et si g est une fonction continue sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, alors les variables aléatoires réelles $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ ont même loi.	Aucune difficulté ne sera soulevée. Résultat admis.

b) Indépendance

Indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles.	X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes si et seulement si : $$F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x_k)$$ pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$.
Caractérisation de l'indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles.	X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes si et seulement si : $$P\left(\left[\bigcap_{i=1}^{n} X_i \in I_i\right]\right) = \prod_{i=1}^{n} P([X_i \in I_i])$$ pour tous intervalles I_1, ..., I_n de $\mathbf{R}$. Résultat admis.
Caractérisation de l'indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles discrètes.	$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P([X_i = x_i])$ pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$. Résultat admis.
Lemme des coalitions.	Si X_1, X_2 ,..., X_n, sont indépendantes, toute variable aléatoire fonction de X_1, X_2, ..., X_p est indépendante de toute variable aléatoire fonction de X_{p+1}, X_{p+2},..., X_n. Résultat admis.

c) Le cas particulier du couple

On généralisera les notions de linéarité, de croissance et d'existence par domination de l'espérance à des variables aléatoires quelconques.	Résultats admis
Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes.	Si X et Y admettent une espérance et sont indépendantes, XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes. Résultats admis.

Covariance de deux variables aléatoires admettant une variance. Propriétés. Formule de Huygens.	Notation $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Bilinéarité, symétrie, positivité de la covariance. $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
Variance d'une somme.	$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$.
Cœfficient de corrélation linéaire. Propriétés.	Notation $\rho(X,Y)$. $\lvert\rho(X,Y)\rvert \leqslant 1$. Interprétation dans le cas où $\rho(X,Y) = \pm 1$.
Si X et Y sont indépendantes et admettent un moment d'ordre 2, leur covariance est nulle.	La réciproque est fausse.
Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes.	Si X et Y sont indépendantes et admettent une variance, $X+Y$ admet une variance et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes. Résultats admis.

d) Sommes de variables aléatoires indépendantes

Densité de la somme $Z = X + Y$ de deux variables aléatoires à densité indépendantes, produit de convolution.	Si la fonction h définie par la relation $h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sauf peut-être en un nombre fini de points, c'est une densité de Z. C'est le cas si f_X (ou f_Y) est bornée.
Stabilité de la loi γ pour la somme.	Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\gamma(\nu_1)$ et $\gamma(\nu_2)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2)$.
Loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$.	Pour étudier la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, on se ramènera après multiplication par λ à une somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$.
Stabilité de la loi normale pour la somme.	

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU QUATRIÈME SEMESTRE

I - Compléments d'algèbre bilinéaire

1 - Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien, matrices symétriques

Endomorphismes symétriques.

Un endomorphisme f d'un espace vectoriel euclidien E est symétrique si et seulement si pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, on a :

$$\langle f(x)\ ,\ y\rangle \ = \ \langle x\ ,\ f(y)\rangle.$$

Un endomorphisme est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.

Si f est un endomorphisme symétrique et si F est un sous-espace vectoriel stable par f, alors $F^{\perp}$ est stable par f.

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique f d'un espace vectoriel de dimension finie sont deux à deux orthogonaux.

Si $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ sont p vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique f associés à des valeurs propres distinctes, alors la famille $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est une famille orthogonale.

2 - Projection orthogonale

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F.

Notation p_F.

Si $(u_1, \ldots, u_k)$ est une base orthonormée de F, alors :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i\rangle u_i.$$

Si p est un projecteur, alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique.

Caractérisation par minimisation de la norme.

$$v = p_F(x) \Longleftrightarrow \|x - v\| = \min_{u\in F} \|x - u\|.$$

Application au problème des moindres carrés et à la droite de régression : minimisation de $\|AX - B\|$ avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ de rang p, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$.

Résultats non exigibles.

3 - Réduction des endomorphismes et des matrices symétriques

Si E est un espace vectoriel euclidien, tout endomorphisme symétrique de E est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

Résultat admis.

Si f est un endomorphisme symétrique, il existe une base $\mathcal{B}$ de E orthonormée composée de vecteurs propres de f.

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable avec une matrice de changement de base orthogonale.	Si A est symétrique réelle, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP = {}^tPAP$.

II - Fonctions réelles de n variables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$; recherche d'extrema

L'objectif est de présenter la démarche de recherche d'extrema et d'en acquérir une maîtrise raisonnable à partir d'un minimum d'outils théoriques. L'espace $\mathbf{R}^n$ sera muni de la norme euclidienne usuelle.
La détermination de la nature topologique d'un ensemble n'est pas un objectif du programme ; elle devra toujours être précisée. Néanmoins, il est nécessaire de sensibiliser les étudiants aux notions d'ouverts et de fermés. Les étudiants ont été familiarisés avec les fonctions continues sur $\mathbf{R}^n$ au troisième semestre, aussi on s'appuiera, pour mener une initiation à la topologie de $\mathbf{R}^n$, sur les sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ définis par des inégalités du type $\{x \in \mathbf{R}^n / \varphi(x) < a\}$ ou $\{x \in \mathbf{R}^n / \varphi(x) \leqslant a\}$ où φ est une fonction continue sur $\mathbf{R}^n$. On donnera également la définition d'un ensemble borné.

L'étude de fonctions de n variables à valeurs dans $\mathbf{R}$ se limitera à des fonctions définies sur des sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ pouvant être définis simplement (réunion, intersection finies) à l'aide des ensembles fermés ou ouverts précédents.

Les résultats seront énoncés dans le cas de fonctions de n variables. Pour les démonstrations, on pourra se limiter aux cas $n = 2$ ou $n = 3$.
Aucune des démonstrations de ce chapitre n'est exigible des étudiants.

Dans ce paragraphe, h désigne un vecteur de $\mathbf{R}^n$ et H la colonne coordonnée correspondante.

1 - Fonction de n variables définies sur une partie de $\mathbf{R}^n$

Dans ce paragraphe, on étend à des fonctions définies sur un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$, les notions et définitions vues au troisième semestre pour des fonctions définies sur $\mathbf{R}^n$. Toute difficulté concernant la détermination de la classe d'une fonction est exclue.

Extension de la notion de continuité aux fonctions définies sur un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$.	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée.
Extension de la notion de fonctions C^1 et C^2 aux fonctions définies sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^n$.	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée. Extension des notions, vues au troisième semestre, de dérivées partielles d'ordre 1 et 2, gradient, développement limité d'ordre 1, opérations sur les fonctions de classe C^1 ou C^2.

2 - Compléments sur les fonctions de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$

Matrice hessienne en un point x.	Notation $\nabla^2 f(x)$.
Théorème de Schwarz.	Si f est de classe C^2 sur un ouvert $\mathcal{O}$, alors la matrice hessienne est symétrique en tout point de $\mathcal{O}$. Résultat admis.

Fonction quadratique définie sur $\mathbf{R}^n$ associée à une matrice symétrique réelle A.	$q(h) = \,{}^t HAH$. On remarquera qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^n$ telle que si h a pour coordonnées $h_1, \ldots, h_n$ dans $\mathcal{B}$ on a : $$q(h) = \sum \lambda_i h_i^2,$$ où $\lambda_i, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A.
Existence et unicité d'un développement limité d'ordre 2 d'une fonction de classe C^2 sur un ouvert $\mathcal{O}$.	$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}q_x(h) + \|h\|^2\varepsilon(h)$ où $\varepsilon(0) = 0$, ε continue en 0 et q_x est la fonction quadratique associée à la matrice hessienne $\nabla^2 f(x)$. Résultat admis.
Si f est de classe C^2, dérivée seconde de la fonction g définie au voisinage de 0 par : $$g(t) = f(x+th).$$	$g''(t) = q_{x+th}(h)$ où q_{x+th} est la fonction quadratique associée à la matrice hessienne $\nabla^2 f(x+th)$ et donc $g''(0) = q_x(h)$.

3 - Recherche d'extrema

Dans un premier temps, on étendra rapidement les notions vues au troisième semestre à une fonction définie sur un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$.

a) Définition

Définition d'un extremum local, d'un extremum global.

b) Extrema sur un ensemble fermé borné

Une fonction continue sur une partie fermée bornée admet un maximum global et un minimum global.	Résultat admis.

c) Condition d'ordre 1

Condition nécessaire du premier ordre. Point critique.	Si une fonction de classe C^1 sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^n$ admet un extremum local en un point x_0 de $\mathcal{O}$, alors $\nabla f(x_0) = 0$. Les points où le gradient s'annule sont appelés points critiques.

d) Condition d'ordre 2

Étude locale d'une fonction f de classe C^2 sur un ouvert $\mathcal{O}$ en un point critique.	Si x_0 est un point critique de f : • si $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x_0)) \subset \mathbf{R}_+^*$, alors f admet un minimum local en x_0, • si $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x_0)) \subset \mathbf{R}_-^*$, alors f admet un maximum local en x_0, • si $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x_0))$ contient deux réels non nuls de signes distincts, f n'admet pas d'extremum en x_0. On fera le lien avec le signe de la fonction quadratique q_{x_0} associée à la hessienne de f en x_0.
Point selle (ou col).	
Une condition suffisante d'extremum global.	Si Ω est un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$ et si x_0 est un point critique de f : • si pour tout $x \in \Omega$, $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x)) \subset \mathbf{R}^+$, alors f admet un minimum global en x_0, • si pour tout $x \in \Omega$, $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x)) \subset \mathbf{R}_-$, alors f admet un maximum global en x_0, On introduira la notion d'ouvert convexe sans soulever aucune difficulté théorique et la vérification de cette propriété n'est pas un objectif du programme. On admet ce résultat.

e) Recherche d'extrema sous contrainte d'égalités linéaires

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des solutions d'un système linéaire $\begin{cases} g_1(x) &= b_1 \\ \vdots & \vdots \\ g_p(x) &= b_p \end{cases}$ *et $\mathcal{H}$ l'ensemble des solutions du système homogène associé.*

Condition nécessaire du premier ordre sous la contrainte $\mathcal{C}$.	Si f est une fonction de classe C^1 sur un ouvert $\mathcal{O}$, et si la restriction de f à $\mathcal{C}$ admet un extremum local en un point x_0, alors $\nabla f(x_0)$ est dans $\mathrm{Vect}(\nabla g_1(x_0), \ldots, \nabla g_p(x_0))$. On remarquera que : — $\mathcal{H}^\perp = \mathrm{Vect}(\nabla g_1(x_0), \ldots, \nabla g_p(x_0))$. — Il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ réels tels que : $$\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(x_0).$$
Point critique pour l'optimisation sous contrainte. Exemples de recherche d'extrema globaux sous contrainte d'égalités linéaires dans des cas simples.	

III - **Probabilités : convergences, estimation**

1 - Convergences et approximations

a) Convergence en probabilité

On pourra rappeler l'inégalité de Markov et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev vues en première année.

Convergence en probabilité.

La suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers X si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P([|X_n - X| \geqslant \varepsilon]) = 0.$$

Notation $X_n \xrightarrow{P} X$.

On pourra énoncer la loi faible des grands nombres en terme de convergence en probabilité.

Composition par une fonction continue.

Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, alors $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$. Résultat admis.

Convergence en probabilité et somme.

Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} Y$ alors $X_n+Y_n \xrightarrow{P} X+Y$.

b) Convergence en loi

Définition de la convergence en loi d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires vers X.

Notation $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

La suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers X si et seulement si en tout point de continuité x de F_X :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

On illustrera cette définition à l'aide des approximations vues en première année.

Cas où les X_n et X prennent leurs valeurs dans $\mathbf{N}$.

La suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers X si et seulement si :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \lim_{n\to+\infty} P([X_n = k]) = P([X = k]).$$

Composition par une fonction continue.

Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers X et si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, alors $(f(X_n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers $f(X)$. Résultat admis.

Théorème limite central.	Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant une espérance m et une variance σ^2 non nulle, si on note : $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$, alors la suite de variables aléatoires centrées réduites $\overline{X}_n^* = \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. D'où, on a pour tout (a,b) tel que $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$: $$\lim_{n\to+\infty} P([a \leqslant \overline{X}_n^* \leqslant b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t.$$ Résultats admis.
Exemples d'approximations de la loi binomiale et de la loi de Poisson par la loi normale.	Toutes les indications devront être fournies aux candidats quant à la justification de l'utilisation des approximations.

2 - Estimation

L'objectif de cette partie est d'introduire le vocabulaire et la démarche de la statistique inférentielle en abordant, sur quelques cas simples, le problème de l'estimation, ponctuelle ou par intervalle de confiance. On se restreindra à une famille de lois de probabilités indexées par un paramètre scalaire (ou vectoriel) dont la valeur (scalaire ou vectorielle) caractérise la loi. On cherche alors à estimer la valeur du paramètre (ou une fonction simple de ce paramètre) à partir des données disponibles.

Dans ce contexte, on considère un phénomène aléatoire et on s'intéresse à une variable aléatoire réelle X qui lui est liée, dont on suppose que la loi de probabilité n'est pas complètement spécifiée et appartient à une famille de lois dépendant d'un paramètre θ décrivant un sous-ensemble Θ de $\mathbf{R}$ (éventuellement de $\mathbf{R}^2$). Le paramètre θ est une quantité inconnue, fixée dans toute l'étude, que l'on cherche à déterminer ou pour laquelle on cherche une information partielle.

Le problème de l'estimation consiste alors à estimer la vraie valeur du paramètre θ ou de $g(\theta)$ (fonction à valeurs réelles du paramètre θ), à partir d'un échantillon de données $x_1,\ldots,x_n$ obtenues en observant n fois le phénomène. Cette fonction du paramètre représentera en général une valeur caractéristique de la loi inconnue comme son espérance, sa variance, son étendue...

On supposera que cet échantillon est la réalisation de n variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ définies sur un même espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{A})$ muni d'une famille de probabilités $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$. Les $X_1,\ldots,X_n$ seront supposées P_θ-indépendantes et de même loi que X pour tout θ.

On appellera estimateur de $g(\theta)$ toute variable aléatoire réelle de la forme $\varphi(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ où φ est une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, éventuellement dépendante de n, et indépendante de θ, dont la réalisation après expérience est envisagée comme estimation de $g(\theta)$.

Si T_n est un estimateur, on notera, lorsque ces valeurs existent, $E_\theta(T_n)$ l'espérance de T_n et $V_\theta(T_n)$ la variance de T_n, pour la probabilité P_θ.

a) Estimation ponctuelle

Estimer ponctuellement $g(\theta)$ par $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ où $\varphi(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ est un estimateur de $g(\theta)$ et

$(x_1, \dots, x_n)$ est une réalisation de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$, c'est décider d'accorder à $g(\theta)$ la valeur $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X.	Exemples de n-échantillons associés à une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $\theta = p$.
Définition d'un estimateur.	Un estimateur de $g(\theta)$ est une variable aléatoire de la forme $T_n = \varphi(X_1, \dots, X_n)$. La réalisation $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ de l'estimateur T_n est l'estimation de $g(\theta)$. Cette estimation ne dépend que de l'échantillon $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ observé.
Exemples simples d'estimateurs.	Exemple de la moyenne empirique $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.
Exemples simples d'estimations.	

b) Intervalle de confiance

S'il existe des critères pour juger des qualités d'un estimateur ponctuel T_n de $g(\theta)$, aucune certitude ne peut jamais être apportée quant au fait que l'estimation donne la vraie valeur à estimer.
La démarche de l'estimation par intervalle de confiance consiste à trouver un intervalle aléatoire qui contienne $g(\theta)$ avec une probabilité minimale donnée. Dans tout ce paragraphe, $(U_n)_{n\geqslant 1}$ et $(V_n)_{n\geqslant 1}$ désigneront deux suites d'estimateurs de $g(\theta)$ telles que pour tout $\theta \in \Theta$ et pour tout $n \geqslant 1$, $P_\theta([U_n \leqslant V_n]) = 1$.

Intervalle de confiance.	Soit $\alpha \in [0,1]$. $[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance de $g(\theta)$ au niveau de confiance $1-\alpha$ si pour tout θ de Θ, $$P_\theta([U_n \leqslant g(\theta) \leqslant V_n]) \geqslant 1-\alpha.$$ L'utilisation dans certains cas du théorème limite central impose d'introduire la notion d'intervalle de confiance asymptotique. Sa réalisation est l'estimation de cet intervalle de confiance. Les variables aléatoires X_n seront supposées P_θ-indépendantes et de même loi que X pour tout θ. On éclairera ces notions à l'aide de simulations informatiques.
Estimation par intervalle de confiance du paramètre d'une loi de Bernoulli.	En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Estimation par intervalle de confiance de la moyenne d'une loi normale dont l'écart type est connu.	On pourra utiliser cet exemple pour introduire la variance empirique.

c) Estimation par intervalle de confiance asymptotique

Intervalle de confiance asymptotique.	On appelle intervalle de confiance asymptotique de $g(\theta)$ au niveau de confiance $1-\alpha$ une suite $([U_n, V_n])_{n\geqslant 1}$ vérifiant : pour tout θ de Θ, il existe une suite de réels (α_n) à valeurs dans $[0,1]$, de limite α, telle que pour tout $n \geqslant 1$, $$P_\theta([U_n \leqslant g(\theta) \leqslant V_n]) \geqslant 1-\alpha_n.$$ Par abus de langage on dit aussi que $[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance asymptotique.
Intervalles de confiance asymptotiques obtenus avec le théorème central limite.	Exemple du paramètre d'un loi de Bernoulli. On pourra comparer, en majorant $p(1-p)$ par $\frac{1}{4}$, les intervalles de confiance obtenus par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, et les intervalles de confiance asymptotiques obtenus par l'approximation normale de la loi binomiale.

d) Comparaison des estimateurs

La notion de risque quadratique n'est pas au programme.

Estimateur sans biais.	L'estimateur T_n de $g(\theta)$ est sans biais si pour tout θ de Θ, $E_\theta(T_n) = g(\theta)$.
Suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ d'estimateurs.	Chaque T_n est de la forme $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Estimateur convergent.	Une suite d'estimateurs $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de $g(\theta)$ est convergente si pour tout θ, la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers $g(\theta)$. Par abus de langage, on dit aussi que l'estimateur est convergent. On rappellera que si $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite convergente d'estimateurs de $g(\theta)$ et si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, alors $(f(T_n))_{n\geqslant 1}$ est une suite convergente d'estimateurs de $f(g(\theta))$.
Condition suffisante de convergence.	Une suite d'estimateurs $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de $g(\theta)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(T_n) = g(\theta)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V(T_n) = 0$ est convergente. Cette convergence pourra être étudiée à l'aide de l'inégalité de Markov. La démonstration de ce théorème donne naturellement un intervalle de confiance asymptotique de $g(\theta)$ ainsi qu'un moyen de comparer la qualité des estimateurs. On illustrera en informatique ces notions $\boxed{\blacktriangleright}$.

TRAVAUX PRATIQUES DE MATHÉMATIQUES AVEC PYTHON

En première année, les élèves ont acquis les bases de manipulation du logiciel Python. L'objectif de l'enseignement d'informatique de seconde année est de permettre aux étudiants d'utiliser Python de manière judicieuse et autonome pour illustrer ou modéliser des situations concrètes en mobilisant leurs connaissances mathématiques.

Les séances de travaux pratiques doivent se faire le plus souvent possible sur ordinateur. Les étudiants, au cours de leurs études ultérieures puis de leur parcours professionnel, seront amenés à utiliser des outils informatiques divers choisis pour leurs fonctionnalités, etdés que seule une pratique régulière de ces outils informatiques peut leur permettre d'en acquérir la maîtrise. De plus, en adoptant cette démarche exploratoire permise par le dialogue interactif avec la machine, cette pratique peut s'avérer bénéfique pour les apprentissages et faciliter la compréhension de concepts plus abstraits.

Le programme d'informatique s'articule autour de quatre thèmes : statistiques descriptives bivariées, fonctions de plusieurs variables, simulation de lois, estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance.

L'ordre dans lequel les thèmes sont abordés est libre, mais il est préférable de mener ces activités en cohérence avec la progression du cours de mathématiques.

Dans certains thèmes, il s'avérera nécessaire d'introduire de nouvelles notions ou approches mathématiques. Celles-ci devront être explicitées en préambule des séances d'informatique et ne pourront en aucun cas être exigibles des étudiants. Certaines seront propres à un thème particulier, d'autres (comme par exemple les méthodes de Monte-Carlo) pourront au contraire être envisagées de manière transversale. Toutes les précisions nécessaires devront toujours être données lors de leur utilisation.

Toute la richesse du langage Python ne peut pas être entièrement maîtrisée par un étudiant, aussi seules certaines fonctions et commandes sont exigibles. Néanmoins, se contenter de ces seules commandes, en ignorant les nombreuses possibilités et commodités du langage, se révélerait rapidement contraignant et limitatif. De nouvelles commandes Python peuvent donc être introduites, mais cela devra se faire avec parcimonie, l'objectif principal de l'activité informatique reste la mise en pratique des connaissances mathématiques. Dans les sujets, les commandes introduites devront être présentées en préambule et toutes les précisions nécessaires seront données lors de leur utilisation et leur interprétation. On favorisera à cette occasion l'autonomie et la prise d'initiatives des étudiants grâce à l'utilisation de l'aide de Python, et à l'usage d'opérations de « copier-coller » qui permettent de prendre en main rapidement des fonctions nouvelles et évitent d'avoir à connaître par cœur la syntaxe de commandes complexes.

L'objectif de ces travaux pratiques n'est pas l'écriture de longs programmes mais l'assimilation de savoir-faire et de compétences spécifiés dans la liste des exigibles et rappelés en préambule de chaque thème.

Les exemples traités dans un thème devront être tirés, autant que possible, de situations réelles (traitement de données économiques, sociologiques, historiques, démographiques, en lien avec le monde de l'entreprise ou de la finance, etc), en faisant dès que possible un rapprochement avec les autres disciplines.

I - Liste des exigibles

1 - Commandes

Les commandes exigibles ont été listées dans le programme de première année. On rappellera dans les sujets toutes les syntaxes des commandes non exigibles.

2 - Savoir-faire et compétences

C1 : Produire et interpréter des résumés numériques et graphiques d'une série statistique (simple, double) ou d'une loi.

C2 : Modéliser et simuler des phénomènes (aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique.

C3 : Représenter et exploiter le graphe d'une fonction d'une, deux variables.

C4 : Représenter et interpréter différents types de convergences.

C5 : Utiliser la méthode de Monte-Carlo sur des exemples pertinents (calcul approché d'intégrales, de probabilités).

C6 : Porter un regard critique sur les méthodes d'estimation et de simulation.

II - **Liste des thèmes**

1 - Statistiques descriptives bivariées

(Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : **C1** et **C6**)

Série statistique à deux variables, nuage de points associé. Point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage. Covariance et cœfficient de corrélation empiriques, droites de régression.	On tracera le nuage de points et les droites de régression et on pourra effectuer des prétransformations pour se ramener au cas linéaire. On différenciera les variables explicatives des variables à expliquer.

2 - Fonctions de plusieurs variables

(Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : **C2** et **C3**)

Graphe d'une fonction de deux variables, lignes de niveau, plan affine tangent au graphe. Dérivées partielles et dérivées directionnelles, représentation du gradient. Position du graphe par rapport au plan affine tangent au graphe, lien avec les valeurs propres de la matrice hessienne, points selles. Étude d'extrema locaux et globaux. Extrema sous contrainte linéaire.	À cette occasion, on pourra mettre en évidence l'orthogonalité du gradient avec les tangentes aux lignes de niveau du graphe d'une fonction de deux variables. Programmation de fonctions variées permettant de mettre en évidence les notions d'extrema locaux ou globaux, avec ou sans contrainte. On pourra prendre des exemples issus de l'économie ou de la finance.

3 - Simulation de lois

(Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : **C1**, **C2**, **C3** et **C6**)

Dans toutes les simulations effectuées, on pourra comparer les échantillons obtenus avec les distributions théoriques, en utilisant des diagrammes en bâtons et des histogrammes. On pourra aussi tracer la fonction de répartition empirique et la comparer à la fonction de répartition théorique.

Méthode d'inversion.	Application de la méthode d'inversion pour la simulation par exemple des lois exponentielles ou de Cauchy. On pourra mettre en évidence, grâce aux simulations, qu'une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy n'admet pas d'espérance.

Méthodes de simulation d'une loi géométrique.	Utilisation d'une loi de Bernoulli et d'une boucle `while`, utilisation d'une loi exponentielle et de la fonction `floor`, utilisation de la librairie `numpy.random`.
Simulations informatiques d'une loi normale par utilisation du théorème limite central appliqué à différentes lois.	Comparaison entre différentes méthodes de simulation d'une loi normale. Utilisation de la librairie `numpy.random`. On pourra s'intéresser au cas particulier de 12 variables aléatoires indépendantes suivant une même loi uniforme.

4 - Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance

(Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : **C2**, **C4**, **C5** et **C6**)

Méthode de Monte-Carlo : principe, garanties d'approximation.	Cette méthode permet d'estimer des quantités qu'il est difficile de calculer explicitement mais qu'il est facile d'approcher par simulation (probabilités d'événements, espérances de variables aléatoires). Ainsi, on pourra estimer par exemple les valeurs prises par la fonction de répartition de la somme ou du produit de deux variables aléatoires. On pourra justifier par simulation la validité de l'approche par intervalle de confiance asymptotique à partir d'un certain rang.
Comparaison de différents estimateurs ponctuels d'un paramètre.	On pourra utiliser des données issues de situations réelles ou créer plusieurs jeux de données par simulation. Dans ce dernier cas, on pourra comparer les lois des estimateurs par exemple à l'aide d'histogrammes.
Comparaison des intervalles de confiance d'un paramètre obtenus par différentes méthodes.	Estimation par intervalle de confiance du paramètre d'une loi de Bernoulli et de l'espérance d'une loi normale. La comparaison pourra se faire en calculant les demi-largeurs moyennes des intervalles et leurs niveaux de confiance.

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie générale
ECG

Annexe III
Programmes d'économie, sociologie, histoire du monde contemporain
1ère et 2nde années

Programme d'Économie, Sociologie et Histoire du monde contemporain (ESH)
CPGE Économique et commerciale, voie générale (ECG)

Présentation générale

L'enseignement d'économie, sociologie et histoire vise à apporter aux étudiants les instruments d'analyse et de compréhension du monde contemporain. Pour cela, il associe trois approches complémentaires : la science économique ; l'histoire de la pensée et des faits économiques et sociaux ; la sociologie.

Cet enseignement a pour ambition de développer les compétences de synthèse, d'analyse et d'argumentation des étudiants. Ils devront maîtriser les principaux concepts, mécanismes et modèles de l'analyse économique (notamment de la microéconomie et de la macroéconomie), savoir mobiliser et mettre en perspective de façon pertinente les principaux phénomènes économiques et sociaux depuis le début du XIXe siècle et maîtriser les éléments de base, les méthodes et démarches de la sociologie, plus particulièrement celles de la structure sociale, des modes de vie et des organisations.

L'étude des fondements et des analyses théoriques de l'économie et de la sociologie ne doit pas faire perdre de vue la dimension historique. Il s'agira, dans une perspective dynamique, d'expliquer les faits économiques et sociaux par l'analyse ou d'éclairer l'analyse par les faits.

Le programme est structuré en quatre modules semestriels dont le premier a pour objectif de faciliter la transition entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur, en favorisant l'adaptation des étudiants à ce nouvel enseignement.

Le premier module présente les bases et les méthodes essentielles de l'économie (de la microéconomie notamment) et de la sociologie ; il introduit une histoire de la pensée économique et sociologique. Le deuxième module traite de la croissance et du développement depuis le début du XIXe siècle. Le troisième module est consacré à l'étude de la mondialisation. Le quatrième module est centré sur les modèles macroéconomiques, sur les déséquilibres et l'action des pouvoirs publics. Les professeurs pourront exercer leur liberté pédagogique en organisant comme ils le souhaitent le contenu de chaque module.

Module 1. Les fondements de l'économie et de la sociologie

Orientation générale
Ce module constitue une présentation des bases essentielles de l'économie et de la sociologie. La première partie vise à présenter les principaux acteurs de l'économie et les liens qui les unissent, dans une perspective inspirée de la comptabilité nationale. La seconde partie met l'accent sur les équilibres de marché. La troisième présente les fondements de la sociologie.

1.1/ Les fondements de l'économie

Objectifs
Il s'agira ici d'étudier le cadre général des activités économiques et l'histoire de la pensée économique pour éclairer les enjeux économiques contemporains.

1.1.1. Les acteurs et les grandes fonctions de l'économie
1.1.2. La monnaie et le financement de l'économie
1.1.3. Les grands courants de la pensée économique depuis le XVIe siècle

Commentaires
On étudiera les caractéristiques des différents acteurs économiques ainsi que les opérations qui les relient. Cette approche utilisera les concepts et outils de la comptabilité nationale. On abordera ainsi la présentation du circuit économique et des agrégats de la comptabilité nationale. On mettra l'accent sur l'équilibre ressources-emplois et sa traduction dans le tableau entrées-sorties, y compris en introduisant les coefficients techniques. On mettra en évidence les relations entre secteurs institutionnels pour montrer la logique de la répartition des revenus. La construction du tableau économique d'ensemble ne sera pas exigée.
On étudiera l'évolution des formes et des fonctions de la monnaie, le processus de création monétaire et les différents modes de financement de l'économie sans analyser précisément les politiques monétaires qui seront traitées en seconde année.
Enfin on présentera les grands courants de la pensée économique depuis la naissance de l'économie politique, ainsi que les filiations entre les auteurs.

1.2/ Le comportement des agents et le fonctionnement du marché

Objectifs
Il s'agira de présenter les concepts essentiels de la démarche microéconomique, plus particulièrement les décisions de consommation et de production, et les équilibres de marché, avant d'analyser les défaillances de marché.

1.2.1. L'équilibre micro-économique du producteur et du consommateur
1.2.2. L'offre, la demande et l'équilibre du marché en concurrence parfaite
1.2.3. Les défaillances de marché

Commentaires

On étudiera la manière dont le consommateur optimise ses choix, en présentant les concepts d'utilité et de fonctions d'utilité, de courbes d'indifférences, de contrainte budgétaire et de taux marginal de substitution ; on étudiera les conséquences d'une variation de revenu ou de prix sur l'équilibre du consommateur. On définira et mesurera les élasticités. On étudiera les choix du producteur à partir d'une fonction de production, et la façon dont une variation du coût de l'un ou l'autre des facteurs de production modifie leur utilisation. On étudiera ensuite les différents types de coûts, et on montrera comment sont construites les offres de court et de long terme.
La présentation du marché concurrentiel sera l'occasion de définir l'équilibre partiel à l'aide des courbes d'offre et de demande, et de montrer comment consommateurs et producteurs réagissent à des variations de prix (effet-revenu et effet-substitution). On analysera les gains à l'échange qu'un offreur ou un demandeur peuvent tirer de leur participation au marché. On montrera les enjeux de la notion d'équilibre général.
On présentera les situations de défaillance du marché : monopole naturel, biens collectifs, biens communs, externalités et asymétries d'information.
L'étude des externalités permettra d'introduire la question des modalités de leur internalisation.

1.3/ Les fondements de la sociologie

Objectifs

Il s'agira de montrer, à travers le thème « individu et société », la nature de la contribution de la sociologie à la connaissance du social et comment elle s'est constituée comme une discipline propre, avec ses concepts, ses méthodes, ses auteurs.

1.3.1. Les grands courants de la pensée sociologique depuis le XIX[e] siècle
1.3.2. La pluralité des méthodes sociologiques

Commentaires

On étudiera comment les sociologues se sont saisis de la question de l'antériorité de la société ou de l'individu pour construire une science sociale explicative du monde social. On montrera qu'il est nécessaire de concevoir l'individualisation comme un processus toujours à l'œuvre. On montrera, à l'aide d'exemples, que l'innovation sociologique est passée par le renouvellement théorique comme par le renouvellement des objets.
À partir de cette même question de l'individu et de la société, on montrera que les méthodes de la sociologie sont multiples (méthodes qualitatives et quantitatives) et que les outils d'enquête, nécessairement pluriels, opèrent des rapprochements avec d'autres sciences sociales (ethnologie, science politique, économie et histoire).

Module 2. Croissance et développement

Orientation générale

Ce module étudie différentes dimensions de la croissance et du développement depuis la révolution industrielle et s'interroge sur leurs conséquences. La première partie est centrée sur l'étude de la croissance et du développement. La seconde partie, qui porte sur les transformations économiques, sociales et démographiques, montrera que la croissance économique s'est accompagnée de changements importants à la fois dans l'organisation de la production, dans les structures sociales et démographiques ainsi que dans les modes de vie. La troisième partie a pour objet d'étude l'entreprise, organisation centrale de l'activité économique comme de la société, qui est à l'origine des mutations du système productif mais est également transformée par les évolutions économiques et sociales.

2.1/ La croissance et le développement depuis le XIX[e] siècle

Objectifs

La croissance sera analysée dans sa double dimension théorique et historique depuis la révolution industrielle. On étudiera les inégalités de développement et les stratégies suivies par les pays au cours des deux derniers siècles. On s'interrogera sur la soutenabilité du développement dans un monde aux ressources finies où les contraintes environnementales pèsent de plus en plus.

2.1.1. La croissance économique
2.1.2. Inégalités et stratégies de développement
2.1.3. La soutenabilité de la croissance et du développement

Commentaires

On présentera les caractéristiques de la croissance depuis la révolution industrielle en montrant que tous les pays ne sont pas concernés en même temps et avec la même intensité. On présentera les principaux modèles d'analyse de la croissance.
On étudiera les inégalités de développement en montrant qu'elles sont évaluées à l'aune d'un modèle, celui des pays capitalistes avancés, et à travers de nombreux indicateurs. On montrera que leur appréhension n'est pas exempte de références axiologiques et qu'elle est dépendante des instruments de mesure. On montrera que ces inégalités existent entre les pays et au sein des pays.
On montrera que la diversité des stratégies de développement mises en œuvre, avec plus ou moins de réussite, pose la question de l'homogénéité du développement.
On étudiera la manière dont des contraintes nouvelles en termes d'écologie et de soutenabilité pèsent de plus en plus sur le développement de l'ensemble du monde. On réfléchira aux conditions d'un développement durable, notamment dans le domaine de la transition écologique.

2.2/ Les transformations des structures économiques, sociales et démographiques depuis le XIX[e] siècle

Objectifs

On présentera les transformations des structures économiques, sociales et démographiques et on montrera que leurs relations avec la croissance sont complexes.

2.2.1. Les transformations des structures économiques et financières
2.2.2. Mobilité sociale et transformations des structures sociales
2.2.3. Transformations démographiques et évolution des modes de vie

Commentaires

Croissance, développement et transformations du système productif sont en interaction permanente. On étudiera l'évolution de la productivité, ainsi que les mutations des secteurs d'activité et des modes de financement depuis la révolution industrielle.
Les transformations économiques s'accompagnent de transformations de la structure sociale. La prise en compte du temps long sera nécessaire pour appréhender les évolutions des groupes sociaux et le changement social. L'analyse de la mobilité sociale nécessitera de s'interroger sur les instruments de sa mesure et la définition des populations concernées. On étudiera les trajectoires individuelles et collectives.
On présentera le mode de calcul et la signification des grands indicateurs démographiques. On étudiera les relations entre développement économique, évolution des pyramides des âges et flux démographiques.
On montrera que les modes de vie - notamment la consommation - se transforment en raison de multiples facteurs, sociologiques, démographiques et environnementaux.

2.3/ Entreprise et organisations

Objectifs

Il s'agira ici de présenter l'entreprise, son objet social, et sa place centrale dans l'activité économique.
On étudiera la stratégie des firmes et plus largement l'importance des organisations s'inscrivant dans l'évolution des sociétés contemporaines.

2.3.1. Les transformations de l'entreprise et de sa gouvernance depuis le XIX[e] siècle
2.3.2. Concurrence imparfaite et stratégies des firmes
2.3.3. Éléments de sociologie du travail et des organisations

Commentaires

Les entreprises sont à l'origine des mutations du système productif en même temps qu'elles sont transformées par les évolutions économiques et sociales. L'analyse de la place des entreprises et des entrepreneurs doit permettre de mettre en exergue leur rôle moteur dans l'émergence des nouveaux modes productifs. On s'interrogera sur le rapport de l'entreprise à l'intérêt général.
Il conviendra de s'interroger sur la nature de la firme notamment comme mode d'allocation des ressources, sur l'efficacité des formes organisationnelles et sur les transformations des modes de gouvernance. Cette analyse des firmes permettra d'étudier leurs stratégies dans le cadre de la concurrence imparfaite (monopole, oligopole, concurrence monopolistique, cartels, abus de position dominante, barrière à l'entrée).
Les éléments de sociologie du travail et des organisations permettront d'étudier comment les individus organisent leurs relations et comment les acteurs coordonnent leurs activités. L'analyse se focalisera sur la manière dont la sociologie du travail rend compte de l'organisation du travail, des relations de travail, de la représentation des salariés, des professions et des inégalités professionnelles (sexes, statuts d'emploi). La sociologie des organisations permettra de rendre compte des questions de hiérarchie, autorité, contrôle, coordination et culture d'entreprise. On replacera l'étude du développement des organisations dans son contexte historique.

Module 3. La mondialisation économique et financière

Orientation générale
Ce module vise à étudier le phénomène de la mondialisation en rappelant ses origines historiques et en mettant l'accent sur son amplification et ses spécificités contemporaines. Aux deux premiers chapitres qui traitent des dimensions économique et financière de la mondialisation, s'ajoute un troisième portant sur l'intégration européenne, partie prenante de la dynamique de la mondialisation mais aussi expérience singulière.

3.1/ La dynamique de la mondialisation économique

Objectifs
On retracera l'histoire de l'ouverture des économies depuis le XIXᵉ siècle et on en dressera un tableau contemporain présentant les tendances majeures et les acteurs principaux. En s'appuyant sur les théories économiques, on mettra en évidence les mécanismes et les vecteurs de la mondialisation et les débats qu'elle suscite.

3.1.1. L'ouverture des économies depuis le XIXᵉ siècle : évolution et acteurs
3.1.2. L'analyse économique des échanges internationaux
3.1.3. Régionalisation, gouvernance et régulations internationales

Commentaires
On présentera l'évolution des échanges des biens et services, des mouvements de facteurs de production (hommes et capitaux) et des politiques commerciales depuis le XIXᵉ siècle. On mettra en évidence les spécificités des phénomènes contemporains, notamment le rôle des institutions internationales et le poids croissant des firmes multinationales dont il conviendra d'étudier les stratégies.
On mobilisera et on confrontera données factuelles et théories économiques pour traiter les questions de l'explication du contenu des échanges, des déterminants de la spécialisation, du choix entre libre-échange et protectionnisme. On analysera les différences de performances commerciales entre nations (on s'interrogera notamment sur la pertinence de la notion de compétitivité appliquée à une nation), et les effets de la mondialisation en termes d'emploi et de répartition.
L'étude de la libéralisation multilatérale des échanges et celle des principales expériences d'intégration régionale nourrira un questionnement sur leur compatibilité. On réfléchira aux modalités de la gouvernance et de la régulation de la mondialisation.

3.2/ La dynamique de la mondialisation financière

Objectifs
On montrera que la mondialisation se manifeste aussi par l'émergence d'un marché mondial des capitaux dont on analysera le fonctionnement. On étudiera la façon dont flux réels et flux financiers influencent la formation des cours de change dans le cadre d'un système monétaire international dont on retracera les transformations depuis le XIXᵉ siècle.

3.2.1. Balance des paiements, cours de change et systèmes de change
3.2.2. L'évolution du système monétaire international depuis le XIXᵉ siècle
3.2.3. Constitution et fonctionnement du marché international des capitaux

Commentaires
On étudiera la construction de la balance des paiements et on interprétera les différents soldes. En confrontant théories économiques et données factuelles, on s'interrogera sur les déterminants, réels et financiers, de la formation des cours de change. On analysera également les politiques de change et leur influence, et on discutera les forces et faiblesses respectives des différents systèmes de change.
On analysera les fonctions d'un système monétaire international, puis on présentera les différents systèmes qui se sont succédé depuis le XIXᵉ siècle en étudiant les débats dont ils ont été l'objet.
On étudiera l'évolution des mouvements de capitaux depuis le XIXᵉ siècle, et on s'interrogera sur leur développement contemporain et ses effets sur l'allocation du capital à l'échelle mondiale.
On analysera le processus de globalisation financière. Dans cette optique on présentera brièvement les principaux segments du marché international des capitaux (marchés des taux d'intérêt, des changes, des actions et des matières premières), les différentes catégories d'opérateurs et les principaux instruments cotés, On mettra en évidence les interconnexions entre les différents segments et acteurs du marché.

3.3/ L'intégration européenne

Objectifs

On présentera et analysera l'exemple le plus abouti d'intégration régionale : l'Union européenne. On montrera que ce projet européen s'est construit progressivement, au fil des traités, des conflits et des accords, pour arriver à l'union économique et monétaire, symbolisée par l'adoption de la monnaie unique. On s'interrogera sur la possibilité de créer une Europe sociale.

3.3.1. La dynamique de la construction européenne
3.3.2. L'Europe économique et monétaire
3.3.3. L'Europe sociale

Commentaires

On partira du questionnement, mené à partir des années 1950, autour du projet européen. On étudiera les réalisations de l'Europe, tant dans le domaine économique que dans le domaine monétaire. On étudiera les progrès de l'intégration économique et les problèmes auxquels l'Union est aujourd'hui confrontée notamment du fait de son hétérogénéité et des évolutions de son périmètre géographique. On traitera les problèmes et les débats liés à l'adoption et à l'existence d'une monnaie unique. On abordera la question de la gouvernance de l'Union, principalement à travers les questions budgétaires et monétaires. Les questions purement institutionnelles, si elles peuvent être abordées, ne relèvent pas directement de ce programme.
On abordera la question de l'Europe sociale à travers les instruments de coordination et d'harmonisation déjà mis en place en matière d'emploi et de politiques sociales. On s'interrogera sur la nature du modèle social européen.

Module 4 : Déséquilibres, régulation et action publique

Orientation générale

Ce module est centré sur les déséquilibres économiques, sur leurs conséquences économiques et sociales, et sur l'intervention des pouvoirs publics. On étudiera les déséquilibres que constituent l'inflation et le chômage et on présentera la manière dont les grands modèles macroéconomiques conçoivent la notion d'équilibre. On étudiera l'intervention publique en matière économique et les contraintes auxquelles elle se heurte. La troisième partie sera consacrée à l'étude des politiques sociales.

4.1/ Équilibres et déséquilibres macroéconomiques

Objectifs

On étudiera les grands déséquilibres macroéconomiques que sont l'inflation et le chômage. On s'interrogera sur la construction des indicateurs et sur les analyses théoriques permettant d'expliquer ces déséquilibres. Cette approche sera complétée par une étude des grands modèles d'équilibre macroéconomiques.

4.1.1. L'inflation et le chômage
4.1.2. L'équilibre macroéconomique à travers les modèles : IS-LM / IS-LM-BP / OGDG

Commentaires

On retracera les principales tendances de l'évolution des prix depuis le XIXe siècle, et on mobilisera les théories économiques sur l'inflation et la déflation, tant pour proposer des explications de ces phénomènes, que pour en évaluer les conséquences.
On montrera que la nature et l'intensité du chômage ont beaucoup varié dans le temps et dans l'espace. On abordera les différentes approches théoriques. On exposera les explications issues de l'arbitrage inflation / chômage : interprétations keynésiennes, puis interprétations classiques qui seront l'occasion de présenter les anticipations adaptatives, puis les anticipations rationnelles. On présentera enfin les analyses les plus récentes sur le chômage et l'emploi.
On présentera les principes de construction des courbes IS et LM en économie fermée, en montrant comment les déplacements des courbes rendent compte des politiques conjoncturelles. On introduira à cette occasion la notion de multiplicateur. On construira le modèle IS-LM-BP.
On présentera les principes de construction des courbes d'offre globale et de demande globale, le rôle joué par les anticipations et la rigidité des prix et des salaires dans la forme des courbes.

4.2/ L'intervention économique des pouvoirs publics

Objectifs

En mobilisant des exemples historiques et contemporains, on étudiera l'intérêt et les limites de l'intervention économique des pouvoirs publics. On analysera ensuite les politiques économiques conjoncturelles et structurelles, leurs effets et les contraintes auxquelles elles sont soumises.

4.2.1. Fluctuations économiques et politiques de régulation des cycles
4.2.2. Politiques structurelles et interventions de l'État face aux défaillances de marché
4.2.3. Les contraintes auxquelles se heurtent les politiques économiques

Commentaires

On montrera que la croissance économique a été marquée depuis le XIX^{e} siècle par des fluctuations économiques et des crises auxquelles les pouvoirs publics ont dû répondre. On mettra l'accent sur les politiques de régulation menées depuis le début des années 1930. On analysera les politiques fiscales, budgétaires et monétaires, qui visent à prévenir les crises et à lutter contre les récessions. On soulignera l'importance des crises financières et la diversité de leurs origines et manifestations et on présentera les différentes solutions proposées par les pouvoirs publics pour limiter le risque d'occurrence de nouvelles crises.
On étudiera les politiques qui visent à accroitre la croissance potentielle des économies et leur compétitivité, à limiter les imperfections de la concurrence, mais aussi à corriger les externalités négatives et préserver la soutenabilité de cette croissance.
On montrera que ces politiques, qui ne s'exercent plus seulement dans un cadre national mais recouvrent également des actions coordonnées notamment au niveau européen, sont soumises à des contraintes et sont l'objet de controverses. On s'interrogera en particulier sur la soutenabilité de la dette publique, et sur la contrainte extérieure.

4.3/ Les politiques sociales

Objectifs

On étudiera les fondements de la légitimité de l'intervention sociale des pouvoirs publics. On montrera que les débats depuis le XIX^{e} siècle influencent les politiques de lutte contre les inégalités et produisent des modèles différents d'État-providence et de protection sociale.

4.3.1. Justice sociale et légitimation de l'intervention publique
4.3.2. Les politiques de lutte contre les inégalités
4.3.3. Etat-providence et protection sociale

Commentaires

On mettra en évidence les différentes voies qu'ont pu emprunter les pays industrialisés pour faire émerger les grands systèmes d'État social et les difficultés auxquelles ils sont confrontés aujourd'hui.
On étudiera les principaux débats en matière de conception de la justice sociale et d'intervention des pouvoirs publics dans ce domaine. On analysera notamment l'influence des conceptions de la justice sociale sur le traitement des inégalités et de l'exclusion ainsi qu'en matière de lutte contre la pauvreté. On montrera comment ont évolué dans le temps les termes du débat entre performances économiques d'une part et protection et justice sociales d'autre part.
On étudiera les grands types de politique de lutte contre les inégalités, leurs effets et les contraintes qui pèsent sur elles.

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie générale
ECG

Annexe IV
Programmes d'histoire, géographie et géopolitique du monde contemporain
$1^{\text{ère}}$ et 2^{nde} années

Programme d'histoire, géographie et géopolitique du monde contemporain (HGGMC)
CPGE économique et commerciale

Les orientations générales du programme

Le programme d'histoire, géographie et géopolitique du monde contemporain (HGGMC) de la filière économique et commerciale, voie générale, s'inscrit dans la continuité de celui de 2013 en tenant compte de la rénovation des programmes d'histoire-géographie de l'enseignement secondaire, de l'introduction d'un enseignement de spécialité du cycle terminal des lycées en histoire, géographie, géopolitique et sciences politiques, ainsi que du renouvellement des approches méthodologiques et conceptuelles intervenues depuis.

Le programme est structuré en quatre modules semestriels, dont le premier a pour objectif de marquer la transition entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur. Chaque module est accompagné d'un commentaire qui précise les finalités de l'enseignement, l'esprit du programme et le cadre dans lequel il peut être traité.

L'ensemble du programme favorise l'adaptation des étudiants aux méthodes de l'enseignement supérieur. Il s'inscrit dans les modalités de parcours des études supérieures de l'espace européen, telles qu'elles sont définies par les textes en vigueur. Il prend également en compte les objectifs de formation des écoles de management, notamment en favorisant une réflexion d'ensemble sur le monde contemporain. *In fine*, ce programme vise à favoriser la maîtrise de compétences décisives pour de futurs entrepreneurs destinés à travailler dans un monde complexe : ouverture culturelle et recul critique, analyse interdisciplinaire et capacité à la synthèse.

Le programme propose d'articuler les approches historique, géographique, géoéconomique et géopolitique

Le programme d'histoire-géographie-géopolitique du monde contemporain est placé sous le signe de l'hybridation des savoirs, sans pour autant confondre leurs démarches respectives. Interdisciplinaire dans son esprit, il doit permettre aux étudiants d'approcher la complexité du monde contemporain.

La démarche géopolitique constitue le fil directeur du programme. Conçue comme un champ disciplinaire, elle permet de combiner les dimensions historiques, géographiques et géoéconomiques pour étudier les rivalités de pouvoirs et d'influences qui s'exercent sur les territoires à toutes les échelles et qui structurent le monde contemporain. Elle insiste sur les jeux d'acteurs, leurs systèmes de représentation et leurs stratégies.

Dans cette optique, l'enseignement de l'histoire permet une mise en perspective des analyses sur le temps long du XX^{e} siècle. Il ne se réduit donc pas à une simple étude chronologique des faits économiques et sociaux mais s'inscrit dans un cadre plus large, à l'écart de toute modélisation abusive. Il prend notamment en compte les aspects politiques, économiques et culturels, scientifiques et techniques.

Les orientations de l'enseignement de la géographie inscrivent la géopolitique dans ses dimensions spatiales et territoriales. La préférence accordée en seconde année à la dynamique géographique, géoéconomique et géopolitique des aires régionales et des continents favorise une vision des lignes de force de l'évolution du monde actuel. Elle impose une démarche à plusieurs échelles, qui permet notamment d'appréhender les dimensions du jeu des réseaux dans le monde contemporain.

L'organisation du programme et de l'évaluation

La dimension synthétique du programme permet de consacrer le temps de la classe à l'acquisition et à la maîtrise de connaissances, de concepts, de méthodes et d'outils qui fondent une réflexion critique sur la complexité du monde contemporain. Le travail prend tout son sens quand le cours est centré sur un chapitre court, ouvert par une introduction problématisée et clos par une conclusion de mise en perspective. Cette démarche accroît la capacité d'argumentation et de synthèse des étudiants, qualités si importantes dans les métiers auxquels ils se préparent. Le travail personnel devient ainsi davantage l'occasion d'un élargissement par l'indispensable lecture de médias ou d'ouvrages qui complètent le cours du professeur et permettent la construction d'une culture générale la plus large possible.

La prise en compte des orientations historiques, géographiques, géoéconomiques et géopolitiques renouvelées conduit le professeur à une réflexion épistémologique indispensable à l'étude des questions abordées. Le programme constitue ainsi un outil de réflexion opératoire et contribue à développer les compétences d'analyse approfondie des situations.

Les quatre modules du programme constituent un ensemble étudié en deux années de préparation aux concours dont les conditions sont fixées dans les règlements pédagogiques des écoles de management. Les modules sont des acquis capitalisables en université.

A travers le programme et les méthodes étudiés, l'HGGMC contribue à la maîtrise de plusieurs compétences essentielles en école de management et dans le monde professionnel :
- combiner les apports de plusieurs champs disciplinaires pour comprendre, nuancer et synthétiser la complexité d'une situation ;
- être un acteur critique du monde contemporain ;
- être capable de raisonner à des échelles d'espace et de temps différentes :
- savoir poser une problématique et y répondre par une démonstration appropriée ;
- s'initier à la prospective et à ses limites ;
- comprendre les points de vue et les enjeux d'acteurs différents ;
- pouvoir s'exprimer de manière efficace et rigoureuse à l'écrit et à l'oral.

PROGRAMME DE PREMIERE ANNEE

Les deux premiers modules dressent un panorama du XXe siècle et du début du XXIe siècle sous l'angle géopolitique et économique. Ils fixent les principaux repères historiques nécessaires à la compréhension du monde contemporain. Ils sont centrés sur l'analyse d'un monde en mutations, de la veille de la Première Guerre mondiale à la mondialisation contemporaine. Une place toute particulière est accordée à l'étude de la France.

Module I.

Les grandes mutations du Monde de 1913 à nos jours

I.1. Panorama géopolitique du monde de 1913 à la fin de la guerre froide
I.1.1. Géopolitique et relations internationales : une introduction
I.1.2. Tableaux géopolitiques du monde en 1913, 1939 et en 1945
I.1.3. Géopolitique de la guerre froide, de la décolonisation et des conflits jusqu'aux années 1990

I.2.Le monde depuis les années 1990 : entre ruptures et recompositions géopolitiques
1.2.1. Tableau géopolitique du monde à la fin de la guerre froide
1.2.2. Le monde actuel : ordre et désordre, émergences et rééquilibrages, espaces de paix et espaces de guerres
1.2.3. La gouvernance mondiale : crises et redéfinitions

I.3. L'économie mondiale d'un siècle à l'autre
I.3.1. La croissance et le développement : une introduction
I.3.2. Économie, croissance et sociétés dans les pays occidentaux de 1913 à 1945
I.3.3. Les modèles de croissance de 1945 à nos jours

Commentaire

Le premier module propose un ensemble de perspectives permettant de saisir les grandes mutations survenues depuis les débuts du XX^{e} siècle. Il est aussi l'occasion d'acquérir progressivement, en ce premier semestre, les méthodes de travail requises par nos disciplines dans l'enseignement supérieur.

Le premier volet vise à donner un panorama géopolitique non exhaustif du monde de la veille de la Première Guerre mondiale à la fin de la guerre froide. Il débute par une *introduction à la géopolitique et aux relations internationales*, destinée à doter les étudiants d'un cadre conceptuel et épistémologique leur permettant de mieux approcher l'ensemble du programme. Il propose ensuite trois tableaux géopolitiques du monde : *le monde en 1913* souligne le rôle d'une Europe divisée et inégalement industrialisée dans le contexte d'une phase nouvelle de la mondialisation et des « impérialismes ». *Le monde en 1939* présente un monde instable, fracturé, fragilisé par la crise des années 1930 et l'arrivée au pouvoir de régimes autoritaires et totalitaires. Après une présentation du *monde en 1945*, l'étude géopolitique de la guerre froide, de la décolonisation et des conflits jusqu'aux années 1990 s'effectue dans une optique de synthèse et non d'énumération factuelle.

Le deuxième volet est centré sur l'analyse des ruptures et recompositions géopolitiques mondiales depuis le début des années 1990. Il débute par un tableau géopolitique du monde à la fin de la guerre froide abordant le basculement d'un ordre bipolaire à un ordre géopolitique dominé par les États-Unis, puissance par ailleurs économiquement dominante de la triade dans les années 1990. Cette partie analyse comment l'épuisement relatif de cet ordre mondial a débouché sur un monde aux désordres multiples, aux conflits nouveaux, avec un reclassement des puissances au sein d'un cadre désormais plus éclaté que multipolaire, où certains accords bilatéraux et internationaux, notamment de désarmement, sont remis en cause. Enfin, il considère la question de l'adaptation de la gouvernance mondiale aux enjeux de notre temps.

Le troisième volet est consacré à l'évolution économique mondiale depuis le début du XX^{e} siècle ; il débute par une introduction à l'étude des rapports entre croissance et développement. Une deuxième partie présente les évolutions économiques et sociales dans les pays occidentaux de 1913 à 1945, entre croissance et crise, mondialisation et replis protectionnistes et deux conflits mondiaux. Enfin, les grandes mutations économiques mondiales depuis 1945 sont analysées au prisme des grands modèles de croissance – notamment libérale et communiste. Une place particulière doit être réservée au décollage inégal des économies émergentes depuis la fin du XX^{e} siècle.

Dans l'ensemble de ce module, on prend appui sur des exemples variés dans l'espace sans négliger le cas de la France dont une étude plus particulière est prévue dans le deuxième module.

Module II.

La mondialisation contemporaine : rapports de force et enjeux

II.1. La mondialisation : acteurs, dynamiques et espaces
II.1.1. La mondialisation : une introduction
II.1.2. Les acteurs et leurs stratégies
II.1.3. Nouvelles frontières, nouveaux territoires et limites de la mondialisation

II.2. Les défis du développement et les enjeux d'un monde durable
II.2.1. Les défis géopolitiques et géoéconomiques du développement durable
II.2.2. Les ressources, un enjeu stratégique
II.2.3. Les défis géopolitiques et géoéconomiques du changement climatique

II.3. La France, une puissance en mutations depuis les années 1990
II.3.1. La France : un modèle entre héritages, crises et transformations face à la mondialisation
II.3.2. La France : une puissance européenne
II.3.3. La France : une puissance mondiale et maritime

Commentaire

Le deuxième module fournit les principales clés de compréhension du monde sous un angle géoéconomique et géopolitique.

La première partie débute par une introduction à la mondialisation contemporaine devant permettre d'abord l'étude de ses caractéristiques principales : l'essor des flux commerciaux, financiers, humains, d'informations ; ses principaux vecteurs – notamment la baisse des obstacles tarifaires et du coût des transports ; le rôle décisif de la « maritimisation » du monde dans cette phase de mondialisation. Cet ensemble aboutit à un monde certes en réseau mais aussi parcouru de fractures. Une analyse des acteurs – étatiques comme non-étatiques – et de leurs stratégies sur les différents échiquiers de la mondialisation mettra notamment l'accent sur la guerre et la paix économiques pour les États, les concurrences et les partenariats pour les entreprises, les réseaux qui parcourent les sociétés et diffusent l'information. Le rôle des organisations multilatérales mais aussi des opinions publiques sera souligné. Cette partie s'achèvera sur une étude de la dimension géographique de la mondialisation autour des nouvelles frontières et des nouveaux territoires : mers et océans, espace et cyberespace, mutation du rôle des frontières…

La mondialisation est un processus complexe d'interconnexion des différentes parties du monde qui présente aujourd'hui des limites. Elle a fait prendre conscience d'un certain nombre d'enjeux globaux qui ont des impacts majeurs. A ce titre, et dans cette perspective, trois d'entre eux seront étudiés. Les *défis du développement durable* sont analysés sous le double angle géopolitique et géoéconomique.

Après cette analyse d'ensemble, deux points sont l'objet d'une attention particulière : les *ressources* (leur finitude, les stratégies d'appropriation et d'adaptation pour les acteurs concernés) et le *changement climatique*, dont les différentes dimensions seront abordées.

Pour conclure ce module, une place particulière est accordée à la France contemporaine, de manière à étudier sa situation dans un monde « mondialisé ». Il s'agira d'envisager les mutations du pays et son adaptation au contexte de la mondialisation, en prenant soin de montrer tant les faiblesses que les réussites, à travers l'étude des *crises et des transformations*. Cela permettra d'analyser, ensuite, les caractères, les atouts et les faiblesses de la France comme *puissance européenne* et comme puissance mondiale, en insistant sur ses singularités, notamment son espace maritime.

PROGRAMME DE SECONDE ANNEE

Les modules III et IV privilégient une approche synthétique de la géopolitique des aires régionales et des continents. Les pays cités sont abordés en fonction des déterminants et déclinaisons de leur puissance ainsi que dans leur rapport à leur environnement régional et au reste du monde. Ils ne font pas l'objet d'une étude exhaustive.

MODULE III

Géodynamique de l'Union européenne, de l'Afrique, du Proche et du Moyen-Orient

III.1. L'Union européenne, l'Europe et le monde
III.1.1. L'Union européenne et ses territoires : intégrations et fragmentations
III.1.2. L'Union européenne et son voisinage proche : la Russie et l'espace méditerranéen
III.1.3. L'Union européenne dans le monde

III.2. Le continent africain, le Proche et le Moyen-Orient
III.2.1. États et territoires, cultures et sociétés
III.2.2. Le développement : politiques et enjeux
III.2.3. Géopolitique du continent africain, du Proche et du Moyen-Orient

Commentaire

Le troisième module donne des clefs de compréhension et d'analyse des spécificités et de la complexité des situations qui prévalent aujourd'hui en Europe, sur le continent africain et au Proche et Moyen-Orient. Dans ce but, l'histoire, la géographie, la géoéconomie et la géopolitique sont associées pour offrir une lecture synthétique qui rende compte de manière à la fois précise, nuancée et critique d'une réalité mouvante.

Il s'agit tout d'abord de montrer que l'Union européenne consiste en une tentative toujours renouvelée d'intégrations multiples visant à dépasser les fragmentations héritées et contemporaines, au risque d'en susciter de nouvelles. C'est l'occasion d'expliquer que les élargissements successifs ont pu contribuer à questionner les modalités et la poursuite de l'approfondissement. Ainsi, dans une Union européenne à géométrie de plus en plus variable, assurer l'unité dans la diversité devient un défi de plus en plus complexe. La question de l'identité et de la cohésion de l'Union européenne est alors posée. Le débat entre les visions d'une « Europe marché » et d'une « Europe puissance » est exposé. Cela conduit à étudier la place et le rôle de l'Union européenne au sein du reste de l'Europe, dont *la Russie, de l'ensemble des pays du sud et de l'est de la Méditerranée* ainsi que du *reste du monde*.

Les dynamiques africaines, moyennes et proche-orientales demandent une réflexion sur les effets de la colonisation et de la décolonisation dans la structuration des États, des nations et des territoires. Il est tenu compte de la diversité et de l'ancienneté des cultures. L'importance du défi du développement est posée. Si les stratégies de *développement* mettent en jeu des acteurs locaux et régionaux, le continent africain, le Proche et le Moyen-Orient subissent encore les contraintes de la dépendance et parfois des ingérences. La faiblesse des intégrations régionales et les multiples fragmentations qui déstabilisent les territoires gênent l'affirmation de cette région dans le monde sont démontrées.

MODULE IV

Géodynamique continentale des Amériques et de l'Asie

IV.1. Les Amériques
IV.1.1. Géopolitique des Amériques
IV.1.2. Les États-Unis : société, politique et puissance à l'époque contemporaine
IV.1.3. L'Amérique latine : émergences et crises

IV.2. L'Asie
IV.2.1. Géopolitique d'une région multipolaire
IV.2.2. Les espaces asiatiques dans la mondialisation
IV.2.3. Deux géants asiatiques : la Chine, puissance mondiale, l'Inde, puissance émergente

Commentaire

L'étude des Amériques débute par une *géopolitique régionale* qui permet de mettre en évidence les relations entre l'Amérique anglo-saxonne et l'Amérique latine à l'époque contemporaine. L'attention est attirée sur le fait que le grand nombre des initiatives d'intégrations régionales révèle le jeu des ambitions de plusieurs États, dont le Brésil, sur un continent marqué par des fragmentations culturelles, politiques et de développement. *Les États-Unis*, du fait de profondes transformations intérieures et de leur exercice de la puissance, font l'objet d'une analyse spécifique. En *Amérique latine*, on explique combien les stratégies successives de développement mises en œuvre ont abouti à des processus d'émergence souvent éphémères, incomplets et émaillés de crises.

L'étude de l'Asie, région multipolaire, débute par sa géopolitique interne et externe. Cela suppose une présentation des États, des sociétés ainsi que de la diversité politique et culturelle dans le cadre d'une mise en perspective et des relations de pouvoir sur le temps long, de manière à mettre en évidence la dimension géopolitique et l'articulation entre les États.

L'importance et le rôle de certains pays non cités, dont le Japon, sont soulignés. La place montante de *l'Asie dans la maritimisation et la mondialisation*, l'importance de ses métropoles, de ses façades et de ses enjeux maritimes sont mises en valeur. La puissance géoéconomique et géopolitique des *deux géants asiatiques* fait l'objet d'une analyse particulière. L'accent est mis sur la Chine comme puissance mondiale, en soulignant les liens étroits entre la société et la politique chinoises au regard de ses ambitions mondiales. Quant à l'Inde, elle est étudiée comme puissance émergente et possible géant de demain.

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie générale
ECG

Annexe V
Programme de lettres et philosophie
1$^{\text{ère}}$ et 2$^{\text{nde}}$ années

CPGE économiques et commerciales
Programme « Lettres et Philosophie »

Objectifs de formation

Commun à l'ensemble des classes préparatoires économiques et commerciales, cet enseignement, qui implique à part égale les Lettres et la Philosophie, est partie constituante de la formation générale des étudiants.
Sa finalité est de former les élèves à une réflexion autonome et éclairée, par la lecture ample et directe d'œuvres de littérature et de philosophie, par l'étude des arts et des techniques, et par la pratique régulière de travaux écrits et oraux. Les étudiants développent ainsi leurs capacités à s'interroger, à conduire une pensée cohérente et à tirer profit avec finesse et pertinence de leurs connaissances.

L'enseignement « Lettres et Philosophie » a trois objectifs majeurs :

1. il permet aux élèves d'enrichir leur culture et de mieux comprendre le monde dans lequel ils vivent ;
2. il les entraîne à développer leur réflexion personnelle, ainsi qu'à aiguiser leur sens critique ;
3. il vise à développer la maîtrise de l'expression écrite et orale ainsi que l'aptitude à communiquer, compétences indispensables pour la future vie professionnelle des étudiants.

Les exercices écrits sont pris en charge collégialement par les deux professeurs de Lettres et de Philosophie.

Programme

Chaque professeur détermine librement et en pleine responsabilité, selon les parcours intellectuels et les choix pédagogiques qui répondent aux besoins des élèves, les œuvres philosophiques, littéraires ou relevant de l'ensemble des arts, dont il juge l'étude nécessaire à son enseignement. Les deux professeurs, de Lettres et de Philosophie, s'accordent pour assurer la cohérence d'ensemble de l'enseignement dispensé.

Première année

Le programme permet d'élargir et d'enrichir les connaissances acquises au cours des études secondaires, et de consolider la culture nécessaire à une réflexion personnelle. Il s'inscrit dans la continuité des enseignements de tronc commun, Lettres ou Philosophie, mais également d'un enseignement de spécialité comme « Humanités, Littérature et Philosophie ».
L'enseignement tient compte des relations qui unissent les notions ou les concepts à leur histoire, aux contextes et résonances à travers lesquels se sont précisés leur usage et leur

sens. On rapporte ainsi l'étude des œuvres littéraires, artistiques ou philosophiques aux représentations mythologiques, religieuses, esthétiques, ainsi qu'à l'histoire des sciences, des arts et des techniques.

Ce programme est constitué des rubriques suivantes :
- l'héritage de la pensée grecque et latine ;
- les apports du judaïsme, du christianisme et de l'islam à la pensée occidentale ;
- les étapes de la constitution des sciences exactes et des sciences de l'homme ;
- l'essor technologique, l'idée de progrès ;
- la société, le droit et l'Etat modernes ;
- les figures du moi et la question du sujet depuis la Renaissance ;
- l'esprit des Lumières et leur destin ;
- quelques grands courants artistiques et esthétiques depuis la Renaissance ;
- les principaux courants de pensée contemporains.

Les rubriques sont abordées selon un parcours que les professeurs de Lettres et de Philosophie déterminent ensemble, en fonction de regroupements et de problématiques dont ils ont l'initiative et la responsabilité.

Seconde année

Etude d'un thème renouvelé chaque année par arrêté conjoint du ministre chargé de l'éducation et du ministre chargé de l'enseignement supérieur.

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie générale
ECG

Annexe VI
Programmes de langues vivantes étrangères
1ère et 2nde années

Objectifs de formation

L'enseignement des langues vivantes en classes préparatoires économiques et commerciales constitue un volet essentiel de la formation générale. La raison en est claire : les carrières auxquelles se destinent les étudiants des écoles de management ont une dimension internationale et interculturelle.

Dans cette perspective, l'enseignement obligatoire de deux langues vivantes est proposé aux étudiants afin qu'ils acquièrent les compétences linguistiques et les connaissances culturelles nécessaires à leur insertion professionnelle et à leur ouverture au monde.

Les niveaux de compétences ciblés en fin de 2de année sont C1 pour la LVA, notamment dans les compétences de réception, et B2-C1 pour la LVB.

L’étude des langues vivantes, dans toutes les classes préparatoires économiques et commerciales, a comme objectifs :

- de consolider et d’approfondir les compétences de l’enseignement du second degré, dans le prolongement des enseignements du cycle terminal (en tronc commun et, le cas échéant, en enseignement de spécialité LLCER), sur le plan linguistique et culturel ;
- de faire travailler la langue en contexte sur la base de supports variés ;
- de faire acquérir aux étudiants un niveau plus élevé de compréhension et d’expression, tant à l’écrit qu’à l’oral ; le développement des compétences orales et oratoires en langue étrangère – prise de parole en continu et en interaction – fait l’objet d’une attention particulière et d’un entraînement régulier ;
- d’assurer la mise en place des repères culturels indispensables à la connaissance de la civilisation et de la culture des pays concernés, de façon à éclairer les réalités économiques, sociales et politiques du monde contemporain ; on proposera, le cas échéant, des thématiques croisées avec d’autres disciplines ;
- d’apprendre à utiliser des ouvrages et des outils de référence, d’approfondir les compétences acquises précédemment pour rechercher, sélectionner et exploiter des documents. Les ressources et outils numériques sont utilisés avec profit ;
- d’entraîner à la traduction de textes variés, à la compréhension fine de documents, et à différents types de production écrite.

Organisation des enseignements

Le premier semestre est conçu pour aider les étudiants, dans leur diversité, à réussir la transition entre le lycée et les études supérieures. Il aura une fonction bien particulière, dont l’objectif essentiel est la prise en charge individualisée et l’homogénéisation du niveau des étudiants, en tenant compte, pour le compenser le cas échéant, de leur historique de formation dans chacune des deux langues étudiées.

Pour cela, les premiers mois devront être axés sur :
- un travail de la langue et sur la langue en contexte ;
- l’accès progressif à une compréhension fine, à l’écrit comme à l’oral ;
- l’acquisition d’une expression maîtrisée et adéquate ;
- l’acquisition d’une méthode adaptée aux différents savoir-faire visés.

Dans le cadre de la liberté pédagogique, le professeur choisit ses méthodes et sa progression. Il organise son enseignement en suivant deux principes directeurs :

a) le professeur choisit le contexte, les problématiques et les méthodes qui favorisent les apprentissages et diversifie les modes d’acquisition des savoirs et des compétences. Il explicite pour les élèves les objectifs poursuivis, les méthodes utilisées et les critères d’évaluation ;

b) le professeur privilégie la mise en activité des étudiants : l’acquisition des connaissances et des capacités est d’autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Ils sont amenés à manipuler la langue, les notions et les concepts en exerçant leur esprit critique. La pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d’initiative et l’autonomie des étudiants.

Programmes de la classe préparatoire économique et commerciale technologique (ECT)

NOR : ESRS2035788A
arrêté du 28-1-2021 - JO du 7-2-2021
MESRI - DGESIP - A1-2

Vu Code de l’éducation, notamment articles D. 612-19 à D. 612-29 ; arrêtés du 23-3-1995 modifiés ; arrêté du 3-7-1995 modifié ; avis du Cneser du 12-1-2021 ; avis du CSE du 21-1-2021

Article 1 - Les programmes de première et seconde années de mathématiques et informatique de la classe préparatoire économique et commerciale technologique (ECT), fixés à l'annexe I de l'arrêté du 3 juillet 1995 susvisé, sont remplacés par ceux figurant à l'annexe 1 du présent arrêté.

Article 2 - Les programmes de première et seconde années de droit et d'économie de la classe préparatoire économique et commerciale technologique (ECT), fixés respectivement aux annexes VI et IV de l'arrêté du 3 juillet 1995 susvisé, sont remplacés par ceux figurant à l'annexe 2 du présent arrêté.

Article 3 - Les programmes de première et seconde années de techniques de gestion et informatique fixés à l'annexe V de l'arrêté du 3 juillet 1995 susvisé, sont remplacés par les programmes de management et sciences de gestion figurant à l'annexe 3 du présent arrêté.

Article 4 - Les programmes de première et seconde années de culture générale fixés à l'annexe II de l'arrêté du 3 juillet 1995 susvisé, sont remplacés par les programmes de lettres et philosophie figurant à l'annexe 4 du présent arrêté.

Article 5 - Les programmes de première et seconde années de langues vivantes étrangères (LVE) fixés à l'annexe III de l'arrêté du 3 juillet 1995 susvisé, sont remplacés par ceux figurant à l'annexe 5 du présent arrêté.

Article 6 - Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie.

Article 7 - Les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021-2022 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023 pour les classes de seconde année.
Dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie, les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022 pour les classes de seconde année.

Article 8 - Le présent arrêté sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait le 28 janvier 2021

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
Édouard Geffray

Pour le ministre des Outre-mer et par délégation,
La directrice générale des outre-mer,
Sophie Brocas

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
La directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle,
Anne-Sophie Barthez

Annexes

↳ *Annexes 1 à 5*

- Annexe 1 : programmes de mathématiques-informatique - 1re et 2de années
- Annexe 2 : programmes de droit et d'économie - 1re et 2de années
- Annexe 3 : programmes de management et sciences de gestion - 1re et 2de années
- Annexe 4 : programmes de lettres et philosophie - 1re et 2de années
- Annexe 5 :programmes de langues vivantes étrangères - 1re et 2de années

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie technologique
ECT

Annexe 1
Programmes de mathématiques - informatique

$1^{ère}$ et 2^{nde} années

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie technologique
ECT

Programmes de mathématiques - informatique

1ère année

Table des matières

INTRODUCTION

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, notamment dans les domaines de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, ...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse...).

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise à développer en particulier chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser les concepts et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.
- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

3 Architecture des programmes

Le niveau de référence à l'entrée de la filière EC voie technologique est celui de l'enseignement obligatoire de la classe de terminale sciences et technologies du management et de la gestion. Le programme

se situe dans le prolongement de ceux des classes de première et terminale de la filière STMG.
Il est indispensable que chaque enseignant ait une bonne connaissance des programmes du lycée, afin que ses approches pédagogiques ne soient pas en rupture avec l'enseignement qu'auront reçu les étudiants en classes de première et de terminale.

Le programme s'organise autour de quatre points qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- Une approche de l'algèbre linéaire est présentée en première année par le biais des systèmes d'équations linéaires et l'introduction du calcul matriciel, qui sera poursuivi en seconde année.

- L'analyse en 1ère année, vise à mettre en place l'ensemble des outils usuels autour des suites et des fonctions. L'aspect opératoire et l'interprétation graphique sont privilégiés. Aucune difficulté théorique n'est soulevée.

- Les probabilités et les statistiques s'inscrivent dans la continuité de la formation initiée dès la classe de troisième et poursuivie jusqu'en classe de terminale. Le cadre principal est celui des univers finis pour lesquels le langage abstrait des probabilités est mis en place.

- L'analyse de données sous forme descriptive ou l'utilisation d'une base de données relationnelles permettent d'aborder différents aspects de la manipulation de données volumineuses.
- L'utilisation d'un langage de programmation et de certaines de ses fonctionnalités est enseignée tout au long de l'année au service du programme de mathématiques. Cette pratique régulière permettra aux étudiants de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple de la simulation de lois de probabilité.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. Les probabilités, par exemple, permettent d'utiliser certains résultats d'analyse (suites, séries, intégrales...) et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté; en revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur y conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Dans le contenu du premier semestre, figurent les notions nécessaires et les objets de base qui serviront d'appui à la suite du cours. Ces éléments sont accessibles à tous les étudiants quelles que soient les pratiques antérieures et potentiellement variables de leurs lycées d'origine. Ces contenus vont, d'une part, permettre une approche plus approfondie et rigoureuse de concepts déjà présents mais peu explicités en classe de terminale, et d'autre part, mettre en place certaines notions et techniques de calcul et de raisonnement fondamentales pour la suite du cursus.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus, des applications ou des exemples d'activités.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités, ils ne correspondent pas au cœur de formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur; pour certains résultats, marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée. Les démonstrations ne sont pas exigibles.

La pratique des automatismes installée au lycée dans l'objectif d'acquérir des connaissances, des méthodes et des stratégies immédiatement mobilisables peut être poursuivie sous différentes formes, en accord avec le contenu du cours.

Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main par les étudiants des techniques usuelles et bien délimitées inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les parties du programme pouvant être traitées en liaison avec l'informatique. Le langage de programmation de référence choisi pour ce programme est Python.

Le langage Python comporte de nombreuses fonctionnalités permettant d'illustrer simplement certaines notions mathématiques. Ainsi, on utilisera dès que possible l'outil informatique en cours de mathématiques pour visualiser et illustrer les notions étudiées. Dans certaines situations, en continuité avec les programmes de lycée, l'utilisation d'un tableur peut s'avérer adaptée.

Les étudiants ont déjà une pratique algorithmique acquise au lycée. Dans leurs études futures, ils seront amenés à utiliser différents logiciels conçus pour la résolution de problématiques liées à certains contextes. Une pratique régulière d'outils informatiques les prépare utilement en ce sens. Par ailleurs, l'utilisation d'un outil informatique (programme informatique ou tableur) permet l'observation de résultats mathématiques en situation, l'exploration et la modélisation de situations non triviales plus réalistes et offre la possibilité d'expérimenter et de conjecturer.

Enseignement de mathématiques du premier semestre

Le premier semestre doit permettre la consolidation des notions étudiées jusqu'en terminale tout en les approfondissant.

I - Outils mathématiques

Ce chapitre présente quelques points de vocabulaire, quelques notations, ainsi que des modes de raisonnements indispensables pour avoir la capacité d'argumenter rigoureusement sur un plan mathématique. Ces outils ne doivent pas faire l'objet d'un exposé théorique, les notions seront introduites progressivement au cours du semestre en utilisant celles déjà acquises au lycée et à l'aide d'exemples nombreux et variés issus des différents chapitres étudiés, et pourront être renforcées au delà, en fonction de leur utilité.

1 - Raisonnement

On confrontera les étudiants à divers modes de raisonnements (démontrer une implication, une équivalence, raisonnement par l'absurde, raisonnement par récurrence) à l'aide d'exemples variés issus des différents chapitres étudiés.

Les étudiants doivent savoir :

• utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » ;

• utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel et repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;

Notations : $\exists$, $\forall$.
Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs pour formuler de façon précise certains énoncés et leur négation. En revanche, l'emploi des quantificateurs en guise d'abréviations est exclu.

• distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;

• utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;

• formuler la négation d'une proposition ;

• utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;

• reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde ;

• raisonnement par récurrence (récurrence simple).

On commence par le mettre en œuvre sur des exemples élémentaires. Tout exposé théorique sur le raisonnement par récurrence est exclu.

2 - Ensembles, applications

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications. On s'appuiera sur des représentations graphiques.

a) Ensembles, parties d'un ensemble

Ensemble, élément, appartenance. Sous-ensemble (ou partie), inclusion. Ensemble vide. Réunion. Intersection. Ensembles disjoints. Complémentaire. Complémentaire d'une union et d'une intersection. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Lois de Morgan.	On fera le lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques usuels (« et », « ou »). Le complémentaire d'une partie A de E est noté $\bar{A}$.
Produit cartésien.	On introduira les notations $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$.
Cardinal d'un ensemble fini. Si A et B sont disjoints : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$. Formule de Poincaré pour deux ensembles. $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$.	La notion de cardinal est introduite pour son application au calcul des probabilités (uniquement dans le cas de l'équiprobabilité). Tout exercice de dénombrement pur est exclu.

b) Applications

Définition. Image, antécédent. Composition. Bijection, application réciproque.	Ces notions seront introduites sur des exemples simples. La notion d'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée n'est pas un attendu du programme.

3 - Calculs numériques et algébriques

Il s'agit de rappeler les notations $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ *et* $\mathbf{R}$, *les propriétés des opérations arithmétiques, les règles de calcul, le traitement des égalités et des inégalités.*

Puissances entières de 10. Puissances entières d'un réel.	On attend en particulier la maîtrise des formules $(xy)^n = x^n y^n$, $x^{n+m} = x^n x^m$...
Développement, factorisation d'expressions algébriques. Racine carrée d'un réel positif. Propriétés.	On manipulera également des quotients.
Identités remarquables.	Les attendus se limitent aux formules suivantes : $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
Manipulation des inégalités.	
Notion d'intervalle. Intervalle ouvert, fermé, semi-ouvert.	
Résolution d'équations et d'inéquations simples. Résolution de systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.	Il s'agit d'une reprise des types d'équations et d'inéquations abordées dans les classes antérieures et pratiquées en gestion.

4 - Polynômes à coefficients réels

Toute étude théorique sur les polynômes est exclue. On identifie polynôme et fonction polynomiale.

Racines et signe d'un polynôme du premier et du second degré. Discriminant.	Somme et produit des racines Illustration graphique. $\boxed{\blacktriangleright}$ Factorisation d'un trinôme du second degré de discriminant positif ou nul.
Polynômes de degré quelconque. Somme, produit de polynômes.	
Factorisation d'un polynôme par $(x-a)$ si a est racine de ce polynôme.	Pratique, sur des exemples, de la division euclidienne. $\boxed{\blacktriangleright}$
Application à l'étude d'équations et d'inéquations.	Illustration graphique.

5 - Fonction valeur absolue

Définition, notation, propriétés, représentation graphique.	Lien avec la distance dans $\mathbf{R}$.

II - **Suites réelles**

On présentera des exemples de suites issus du monde économique (capital et taux d'intérêt, emprunt à annuités constantes).
Les notions de comportement et de limite ne seront abordées qu'au second semestre.
Ce chapitre fournira l'occasion d'illustrer le raisonnement par récurrence et donnera l'occasion de consolider les connaissances du lycée de programmation en Python.

Suites constantes, suites arithmétiques, suites géométriques.	Calcul du n-ième terme. $\boxed{\blacktriangleright}$ Savoir montrer qu'une suite est constante, arithmétique ou géométrique.
Suites arithmetico-géométriques	Calcul du n-ième terme. $\boxed{\blacktriangleright}$ Une formule explicite pourra être donnée, mais on introduira la méthode sur des exemples.
Terme général d'une suite.	Sur des exemples, application à la recherche du terme général d'autres suites à l'aide des suites usuelles. Aucune étude générale de suites $u_{n+1} = f(u_n)$ n'est au programme.
Somme des n premiers nombres entiers naturels et somme des n premiers termes de la suite (q^k). Notation $\sum$. Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique, somme des n premiers termes d'une suite géométrique.	Calculs de sommes portant sur les suites arithmétiques et géométriques. Transformation de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} au_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)$. $\boxed{\blacktriangleright}$

III - **Fonctions réelles d'une variable réelle**

Il s'agit de fournir aux étudiants un ensemble de connaissances de référence sur les fonctions usuelles et les notions nécessaires à leur représentation graphique. Les fonctions logarithme et exponentielle

n'étant étudiées qu'au second semestre, il convient donc ici d'utiliser des fonctions qui se déduisent simplement des fonctions polynomiales, rationnelles, valeur absolue ou racine carrée.
On utilise autant que possible des représentations graphiques pour présenter et illustrer les concepts introduits.

1 - Généralités

Vocabulaire : ensemble de définition, image, antécédent, représentation graphique d'une fonction. Fonctions paires, impaires. Fonctions monotones, strictement monotones. Fonctions majorées, minorées, bornées. Somme, produit, quotient de fonctions, composée de fonctions.	Illustration avec les fonctions usuelles connues : carré, cube, inverse, racine carrée, valeur absolue.
Introduction de la notion de fonction bijective, fonction réciproque.	Lien avec l'équation $f(x) = c$.

2 - Limites

La définition formelle d'une limite est hors programme. Toute étude théorique sur les limites est exclue. Les résultats seront énoncés sans démonstration et illustrés par des représentations graphiques.

Limite d'une fonction en un point. Limite à droite, limite à gauche. Extension de la notion de limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$. Notion de limite infinie en un point, en $+\infty$ ou en $-\infty$. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une fonction composée.	▶
Limites des fonctions polynomiales et rationnelles en $+\infty$ et en $-\infty$.	Les limites sont données par les limites des monômes de plus haut degré ou leur quotient.
Interprétation graphique des limites : droites asymptotes, asymptotes parallèles aux axes.	▶ Toute recherche systématique des branches infinies est hors-programme.

3 - Continuité

Continuité d'une fonction en un point. Continuité de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions continues. Composition de deux fonctions continues.	Une fonction f est continue en a si et seulement si $f(x)$ admet pour limite $f(a)$ quand x tend vers a. Le prolongement par continuité est hors programme.

4 - Dérivabilité

Dérivabilité d'une fonction en un point, nombre dérivé.	Interprétation graphique. ▶

Équation de la tangente en un point.	Approximation affine au voisinage d'un point. ▶
Fonction dérivée.	Notation f'.
Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une fonction composée.	
Caractérisation des fonctions constantes et monotones par le signe de la dérivée.	Résultat admis. Principe de Lagrange : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f' \geqslant 0$ sur I, ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
Tableau de variation.	Sur des exemples, application à l'étude d'équations et d'inéquations, à l'obtention de majorations et de minorations.
Extremum local d'une fonction dérivable.	Une fonction f, dérivable sur un intervalle ouvert I, admet un extremum local en un point de I si sa dérivée s'annule en changeant de signe en ce point.
Dérivée seconde, notation f''.	La notion de fonction de classe C^p ou C^∞ est hors programme.
Représentation graphique de fonctions.	

5 - Convexité

Les fonctions convexes sont des outils de modélisation en économie. On pourra s'appuyer sur un exemple simple (par exemple, une fonction de coût) pour en motiver la définition. Les fonctions étudiées sont au moins de classe C^2.Tous les résultats de ce paragraphe seront admis et illustrés par des représentations graphiques. L'inégalité de la convexité n'est pas un attendu. La notion de convexité sera abordée principalement pour préciser des représentations graphiques de fonctions.

Définition d'une fonction convexe.	Une fonction est convexe (respectivement concave) si la courbe est au-dessous (respectivement au-dessus) des cordes. ▶
Position d'une courbe par rapport aux tangentes dans le cas où la fonction est convexe et dérivable. Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables. Si la dérivée d'une fonction convexe f de classe C^2 sur un intervalle ouvert s'annule en un point, f admet un minimum en ce point.	▶
Caractérisation d'un point d'inflexion si f est deux fois dérivable.	▶
Représentation graphique des fonctions convexes. Utilisation récapitulative des notions précédentes pour l'étude graphique de fonctions.	Allure locale du graphe. Exemples d'étude de points d'inflexion.

IV - **Probabilités sur un univers fini**

L'objectif est de mettre en place dans le cas fini, un cadre dans lequel on puisse énoncer des résultats généraux et mener des calculs de probabilités sans difficulté théorique. On fera le lien avec l'emploi des arbres pondérés préconisé durant le cycle terminal du lycée.

1 - Espaces probabilisés finis

a) Observation d'une expérience aléatoire - Événements

Expérience aléatoire. Univers Ω des résultats observables, événements. Opérations sur les événements, événements incompatibles, événements contraires.	On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples.
Système complet d'événements finis.	On se limitera aux systèmes complets d'événements de type $A_1, ..., A_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) où les A_i sont des parties deux à deux disjointes et de réunion égale à Ω.

b) Probabilité

Une probabilité est une application P définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et à valeurs dans $[0,1]$ vérifiant $P(\Omega)=1$ et pour tous A et B incompatibles de $\mathcal{P}(\Omega)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Formule de Poincaré (ou du crible) pour deux événements.	Cas de l'équiprobabilité.

c) Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle. Si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.	Notation P_A.
Formule des probabilités composées.	Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors : $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2) \ldots P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$
Formule des probabilités totales.	Si $A_1, ..., A_n$ est un système complet, alors pour tout événement B on a : $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$
Formule de Bayes.	

d) Indépendance en probabilité

Indépendance de deux événements.	$P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Indépendance mutuelle de n événements.
Si n événements A_i sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i, avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

2 - Variables aléatoires réelles

On rappelle que l'univers Ω considéré est fini. Toutes les définitions qui suivent concernent ce seul cas.

Une variable aléatoire est une application de Ω dans $\mathbf{R}$.	On adoptera les notations habituelles telles que $[X = x]$, $[X \leqslant x]$, etc.
Système complet associé à une variable aléatoire.	
Fonction de répartition d'une variable aléatoire X.	$F_X(x) = P([X \leqslant x])$.
Loi de probabilité d'une variable aléatoire.	La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire. Résultat admis.
Espérance d'une variable aléatoire finie. $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.	$E(X) = \sum_i x_i P([X = x_i])$. Linéarité de l'éspérance.
Variable aléatoire $Y = g(X)$ lorsque g est une fonction à valeurs réelles.	
Théorème de transfert.	$E(g(X)) = \sum_i g(x_i) P([X = x_i])$. Théorème admis
Variance d'une variable aléatoire. Écart-type.	Notations $V(X)$, $\sigma(X)$.
$V(aX + b) = a^2 V(X)$.	
Formule de Kœnig-Huygens.	$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
Variables centrées, centrées réduites.	Notation X^* pour la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

Enseignement de mathématiques du second semestre

I - Systèmes linéaires et introduction au calcul matriciel

Ce chapitre sera repris, en deuxième année, avec une étude plus spécifique des matrices carrées. Tout développement théorique est hors programme.

1 - Systèmes linéaires

Résolution.
Méthode du pivot de Gauss.

On présentera la méthode du pivot de Gauss à l'aide d'exemples numériques et on se limitera à des systèmes de trois équations à trois inconnues.
On prendra les notations suivantes pour le codage des opérations élémentaires sur les lignes :
$L_i \leftrightarrow L_j$; $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ avec $i \neq j$;
$L_i \leftarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \neq 0$; $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ avec $i \neq j$ et $\alpha \neq 0$.

2 - Calcul matriciel

L'objectif est d'introduire les matrices qui seront utilisées en seconde année. On s'appuie sur des exemples numériques de matrices réelles. La notation des coefficients sous la forme $m_{i,j}$ n'est pas un attendu du programme. Le programme exclut toute notion de structure.

Définition d'une matrice à n lignes et p colonnes.
Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.
Matrices lignes, matrices colonnes.
Opérations sur les matrices : multiplication par un scalaire, somme, produit de deux matrices.

Les définitions des opérations sur les matrices seront présentées à l'aide d'exemples issus de situations concrètes. Les propriétés des opérations seront admises sans démonstration et illustrées sur des exemples.

Ecriture matricielle d'un système.

II - Compléments d'analyse

En analyse, on évitera la recherche d'hypothèses minimales, tant dans les théorèmes que dans les exercices et problèmes, préférant des méthodes efficaces pour un ensemble assez large de fonctions usuelles.

Pour les résultats du cours, on se limite aux fonctions définies sur un intervalle de $\mathbf{R}$*. Les étudiants doivent pouvoir traiter les situations qui s'y ramènent.*

Toute étude théorique sur les limites (suites ou fonctions) est exclue. On utilise autant que possible des représentations graphiques pour présenter et illustrer les concepts introduits. Les résultats seront énoncés sans démonstration.

1 - Suites réelles

Ce chapitre sera l'occasion de revenir sur le raisonnement par récurrence. On utilisera autant que possible la représentation graphique des suites pour illustrer ou conjecturer leur comportement, en

particulier pour illustrer la notion de convergence. ▶	
Suite monotone, minorée, majorée, bornée.	
Limite d'une suite, définition des suites convergentes. Généralisation aux limites infinies.	$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbf{R}$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les u_n pour tous les indices n sauf pour un nombre fini d'entre eux. ▶
Unicité de la limite.	
Opérations sur les limites. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre. Existence d'une limite par encadrement.	On étendra sans démonstration tous les résultats connus sur les limites de fonctions de la variable réelle aux suites. Le théorème de composition de limite d'une suite convergente par une fonction continue est hors-programme.
Théorème de la limite monotone.	Toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge. Toute suite croissante (resp. décroissante) non majorée (resp. non minorée) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

2 - Continuité sur un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.	Ces énoncés seront admis.
Fonction continue strictement monotone sur un intervalle. Caractère bijectif.	On utilisera ce résultat pour étudier des équations du type $f(x) = k$. ▶. On admettra la continuité de la fonction réciproque. Représentation graphique de la fonction réciproque. Toute étude théorique sur les fonctions réciproques est exclue.
Corollaire (TVI et bijection).	Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$ et $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]a, b[$. Extension au cas des autres intervalles, éventuellement en considérant les limites au bord. Application à la dichotomie. ▶

3 - Fonctions logarithme et exponentielle

Les fonctions hyperboliques sont hors programme.

Fonction logarithme népérien. Dérivée, limites, représentation graphique. Propriétés algébriques du logarithme.	La fonction logarithme est introduite comme primitive de la fonction inverse sur $\mathbf{R}_+^*$. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Fonction exponentielle. Dérivée, limites, représentation graphique. Propriétés algébriques de l'exponentielle.	La fonction exponentielle est introduite comme réciproque de la fonction logarithme. $\exp(a+b) = \exp(a)\,\exp(b)$. Notation e^x.
Fonctions puissances (exposant réel).	
Croissances comparées des fonctions exponentielle, puissances et logarithme au voisinage de l'infini et au voisinage de 0.	Pour $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\ln x}$, $\lim\limits_{x\to 0} (x^\alpha \ln x)$. Pour n entier naturel non nul, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x$.

III - **Probabilités sur un univers fini**

1 - Coefficients binomiaux

On donne dans ce paragraphe l'interprétation combinatoire de ces coefficients mais on évitera toute technicité dans les exercices.

Factorielle, notation $n!$.	Interprétation de $n!$ en tant que nombre de permutations d'un ensemble à n éléments. ▶
Parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. Coefficients binomiaux, notation $\dbinom{n}{k}$. $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Relation $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$. Formule du triangle de Pascal : $\dbinom{n+1}{k} = \dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k-1}$.	On pourra faire le lien entre les parties à k éléments d'un ensemble à n éléments et le nombre de chemins d'un arbre réalisant k succès pour n répétitions. Ces relations pourront faire l'objet de manipulations sur la notation factorielle. La formule de Pascal fournit un algorithme de calcul pour le calcul numérique des coefficients. ▶

2 - Lois usuelles finies

Chacune de ces lois sera illustrée par un exemple concret d'une situation qu'elle modélise. Les étudiants doivent savoir reconnaître ces lois à partir de situations concrètes.

Loi certaine. Espérance et variance.

Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Espérance et variance. Loi de Bernoulli. Espérance et variance. Loi binomiale. Espérance et variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$. ▶ Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. ▶
Application : formule du binôme de Newton. $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} a^k b^{n-k}$	Lorsque a et b sont strictement positifs, lien avec la loi $\mathcal{B}(n,p)$ pour $p = \dfrac{a}{a+b}$. La formule du binôme de Newton dans le cas général pourra être démontrée par récurrence.

IV - **Intégration sur un segment**

Pour le calcul d'intégrales à partir des primitives, on se limitera à des exemples simples. Les changements de variable sont hors programme.

1 - Définition

Aire sous la courbe d'une fonction positive.	Dans le cas où f est affine positive, on constatera que cette fonction « aire sous la courbe » admet f pour dérivée.
Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Toute fonction f continue sur un intervalle y admet au moins une primitive F.	Admis. Sur un intervalle si F est une primitive de f alors toute autre primitive est de la forme $F+c$ où c est une constante.
Intégrale d'une fonction continue sur un segment.	Définition : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur I. Cette définition est indépendante du choix de la primitive F de f sur I.

2 - Premières propriétés de l'intégrale

Relation de Chasles.	
Interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction continue positive.	Sur des exemples, illustration à l'aide de la méthode des rectangles. $\boxed{\blacktriangleright}$

3 - Application

Introduction de la notion de variable aléatoire à densité : exemple de la loi uniforme sur un segment.	Simulation. $\boxed{\blacktriangleright}$

Enseignement annuel d'informatique et d'algorithmique

I - Éléments d'informatique et d'algorithmique

L'objectif est de poursuivre la formation initiée au lycée concernant l'algorithmique et l'utilisation de l'outil informatique en mathématiques au travers de thèmes empruntés au programme pour comprendre, illustrer et éclairer les notions introduites. Dès qu'un calcul numérique est envisagé, dès qu'un problème incite à tester expérimentalement un résultat, dès qu'une situation aléatoire peut être modélisée avec des outils informatiques, le recours à des algorithmes et des logiciels devra devenir naturel.

L'utilisation de l'outil informatique se fait en continuité avec le cours de mathématiques et sera suivi d'une mise en œuvre sur ordinateur. Les séances de travaux pratiques doivent se faire le plus souvent possible sur ordinateur. Les étudiants, au cours de leurs études ultérieures puis de leur parcours professionnel, seront amenés à utiliser des outils informatiques divers choisis pour leurs fonctionnalités, et seule une pratique régulière de ces outils informatiques peut leur permettre d'en acquérir la maîtrise. De plus, en adoptant cette démarche exploratoire permise par le dialogue interactif avec la machine, cette pratique peut s'avérer bénéfique pour les apprentissages et faciliter la compréhension de concepts plus abstraits.

Le programme d'informatique s'articule autour de trois thèmes : études de suites , statistiques descriptives univariées, bases de données relationnelles.

L'ordre dans lequel les thèmes sont abordés est libre, mais il est préférable de mener ces activités en cohérence avec la progression du cours de mathématiques.

Les exemples traités dans un thème devront être tirés, autant que possible, de situations réelles (traitement de données économiques, sociologiques, historiques, démographiques, en lien avec le monde de l'entreprise ou de la finance, etc.), en faisant dès que possible un rapprochement avec les autres disciplines.

Pour certains thèmes, il sera nécessaire d'introduire de nouvelles notions mathématiques ; celles-ci seront introduites en préambule lors des séances d'informatique ; elles ne pourront en aucun cas être exigibles des étudiants, et toutes les précisions nécessaires seront données lors de leur utilisation.

Le langage informatique retenu pour la programmation dans ce programme des classes économiques et commerciales, option technologique, est Python.

1 - Langage Python

Le langage Python propose un grand nombre de bibliothèques logicielles, avec des utilités variées. Les bibliothèques jugées nécessaires sont listées, chacune avec une liste restreinte de fonctions essentielles que les étudiants devront avoir manipulées. Seules celles dans la colonne de gauche sont exigibles, et leur syntaxe précise doit être rappelée. D'autres fonctions, par commodité, pourront être utilisées en classe, mais ceci ne pourra se faire qu'avec parcimonie. L'objectif principal de l'activité informatique reste la mise en pratique de connaissances mathématiques.

a) Types de base

Affectation : `nom = expression`	L'expression peut être du type numérique, booléen, matriciel (ndarray) ou chaîne de caractères.

# permet d'insérer un commentaire	On insiste sur l'importance de l'ajoût judicieux de commentaires.
`+` `-` `*` `/` `**`	Opérations arithmétiques de base.
`==` `>` `<` `>=` `<=` `!=`	Comparaison, test.
`True` `False` `and` `or` `not`	Logique.
`from ... import *, import ... as`	Importation d'une bibliothèque.

b) Structures de contrôle

On réinvestit les notions de compteurs et d'accumulateurs vues au lycée. La maîtrise des structures de programmation de base (if, while, for) constitue l'un des objectifs majeurs de l'informatique en première année.

Instruction d'affectation : =.

Instruction conditionnelle `if`, `elif`, `else`.

Boucle `for` ; Boucle `while`.

Définition d'une fonction :
`def` $f(p_1, \ldots, p_n)$
`return`.

c) Utilisation de bibliothèques

Pour le calcul numérique, le traitement statistique ou la simulation de phénomènes aléatoires, certaines bibliothèques s'avèrent utiles. Elles sont listées ci-dessous avec les fonctions pertinentes. Toute utilisation d'une telle fonction doit obligatoirement être accompagnée de la documentation utile, sans que puisse être attendue une quelconque maîtrise par les étudiants de ces éléments.

`from ... import *, import ... as`	Importation d'une bibliothèque.

— Dans la bibliothèque `numpy`
Exemple d'importation : `import numpy as np`

`np.e, np.pi`	Constantes e et π.
`np.exp, np.log, np.sqrt, np.abs, np.floor`	Ces fonctions peuvent s'appliquer à des variables numériques ou vectoriellement (à des matrices ou vecteurs) élément par élément.
`np.array.`	Création de tableaux ou matrices. `np.zeros, np.ones, np.eye, np.arange , np.linspace, np.reshape`. Extraction ou modification d'un élément, d'une ligne ou d'une colonne du tableau.
`np.dot`	Multiplication matricielle. On pourra utiliser `a,b = np.shape(M)` pour obtenir la taille de la matrice `M`.
`+` `-` `*` `/` `**`	Opérations arithmétiques de base : coefficient par coefficient.
`np.sum, np.min, np.max, np.mean, np.cumsum, np.median, np.var, np.std`	Ces opérations peuvent s'appliquer sur une matrice entière ou bien pour chaque colonne (ou chaque ligne). Exemple : `mean(M), mean(M,0), mean(M,1)`

— Dans la librairie $\boxed{\texttt{numpy.random}}$

Exemple d'importation : `import numpy.random as rd`

`rd.random`.

— Dans la librairie $\boxed{\texttt{pandas}}$

Exemple d'importation : `import pandas as pd`

`pd.mean, pd.std.`	Indicateurs statistiques.

— Dans la librairie $\boxed{\texttt{matplotlib.pyplot}}$

Exemple d'importation : `import matplotlib.pyplot as plt`

`plt.plot, plt.show`	Représentations graphiques de fonctions, de suites. On pourra utiliser les commandes non exigibles `xlim, ylim, axis, grid, legend`. Représentations statistiques `plt.hist, plt.bar, plt.boxplot`.

2 - Liste de savoir-faire exigibles en première année

C1 : Savoir manipuler les structures algorithmiques de base (if, for, while), connaître la syntaxe d'une fonction simple et savoir l'utiliser.

C2 : Savoir produire des graphiques et indicateurs afin d'interpréter des données statistiques.

C3 : Savoir étudier des suites numériques, calculer des valeurs, tracer des graphiques et conjecturer des résultats sur le comportement de la suite.

C4 : Stocker, organiser et extraire des données structurées volumineuses.

C5 : Savoir modéliser des phénomènes aléatoires et effectuer des simulations de variables aléatoires.

II - Liste de thèmes

1 - Suites

(Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : **C1** et **C3**)

Calcul des termes d'une suite.	Exploitation graphique des résultats. Exemples : taux d'intérêt, emprunt.
Calculs de valeurs approchées de la limite d'une suite.	On utilisera des structures répétitives et conditionnelles en exploitant l'étude mathématique. Valeur approchée d'une constante.
Détermination du rang d'arrêt.	

2 - Statistiques descriptives univariées

(Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : **C2**

Dans ce paragraphe, on analysera des données statistiques issues de l'économie, du monde de l'entreprise ou de la finance, en insistant sur les représentations graphiques. On insistera sur le rôle des différents indicateurs de position et de dispersion étudiés.

Série statistique associée à un échantillon. Effectifs, fréquences, fréquences cumulées, diagrammes en bâton, histogrammes.	On pourra également utiliser les commandes : `pd.read_csv, head, shape, pd.describe`
Indicateurs de position : moyenne, médiane, mode, quantiles.	`pd.median, pd.count, pd.sort_values`
Indicateurs de dispersion : étendue, variance et écart-type empiriques, écart inter-quantile.	
Analyse d'un caractère quantitatif : caractéristiques de position (moyenne, médiane) ; mode(s) ; caractéristiques de dispersion (variance et écart-type empiriques, quartiles, déciles).	On notera bien que les paramètres empiriques sont calculés à partir de l'échantillon observé. On montrera les avantages et les inconvénients des caractéristiques liées à la structure euclidienne (moyenne et écart-type) et ceux qui sont liés à la structure d'ordre (quantiles).

3 - Bases de données

(Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : **C4**)

L'administration, les banques, les assurances, les secteurs de la finance utilisent des bases de données, systèmes d'informations qui stockent dans des fichiers les données nombreuses qui leur sont nécessaires. Une base de données relationnelle permet d'organiser, de stocker, de mettre à jour et d'interroger des données structurées volumineuses utilisées simultanément par différents programmes ou différents utilisateurs. Un logiciel, le système de gestion de bases de données (SGBD), est utilisé pour la gestion (lecture, écriture, cohérence, actualisation...) des fichiers dans lesquels sont stockées les données. L'accès aux données d'une base de données relationnelle s'effectue en utilisant un langage informatique qui permet de sélectionner des données spécifiées par des formules de logique, appelées requêtes d'interrogation et de mise à jour.
L'objectif est de présenter une description applicative des bases de données en langage de requêtes SQL (Structured Query Language). Il s'agit de permettre d'interroger une base présentant des données à travers plusieurs relations. On pourra pour introduire la problématique donner l'exemple de la base de données utilisée par un progiciel de gestion intégré (PGI), outil informatique permettant de piloter une entreprise, présenté dans le cours de management. Cette base de données stocke les informations communes à de nombreux services (comptabilité,gestion du personnel, gestion des stocks, fichier clients...). On introduira les concepts d'interrogation et de mise à jour d'une base de données à l'aide d'exemples simples issus de ce contexte.

Modèle relationnel : relation, attribut, domaine, clef primaire "PRIMARY KEY", clef étrangère "FOREIGN KEY", schéma relationnel.	
Vocabulaire des bases de données : table, champ, colonne, schéma de tables, enregistrements ou lignes, types de données. Lecture d'un fichier de données simples. Notion de descripteur.	On s'en tient à une notion sommaire de domaine : entier "INTEGER", chaîne "TEXT".
Opérateurs arithmétiques $+$, $-$, $*$.	
Opérateurs de comparaison : $=$, $<>$, $<$, $<=$, $>$, $>=$.	
Opérateurs logiques : "AND", "OR", "NOT".	

a) Commandes exigibles

"WHERE"	
"SELECT nom_de_champ FROM nom_de_table".	Sélection de données dans une table.
"INSERT INTO nom_de_table ".	Insertion de données dans une table. On pourra utiliser "VALUES (élément1, élément2,...)".
"DELETE FROM nom_de_table ".	Suppression de données d'une table.
"UPDATE nom_de_ table ".	Mise à jour de données d'une table.

b) Commandes non exigibles

On pourra utiliser par commodité et si besoin la liste d'opérateurs, fonctions et commandes ci-dessous. Ce ne sont pas des attendus du programme et ils sont non exigibles.

Les opérateurs ensemblistes : union "UNION", intersection "INTERSECTION", différence "EXCEPT".

Les opérateurs spécifiques de l'algèbre relationnelle : projection, sélection (ou restriction), renommage, produit cartésien .

Les fonctions d'agrégation : min "MIN", max "MAX", somme "SUM", moyenne "AVG", comptage "COUNT".

Les commandes "DISTINCT", "ORDER BY"

4 - Probabilités

(Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : **C1** **C2** et **C5**)

Utilisation de la fonction `rd.random` pour simuler des expériences aléatoires élémentaires conduisant à une loi usuelle.	Loi uniforme, loi binomiale. `rd.randint` .
Simulation de phénomènes aléatoires.	

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie technologique
ECT

Programmes de mathématiques - informatique

2nde année

Table des matières

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, notamment dans les domaines de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, ...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse...).

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.

- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.
- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

3 Architecture des programmes

Le programme de mathématiques de deuxième année de la filière EC voie technologique se situe dans le prolongement de celui de première année et permet d'en consolider les acquis. Son objectif est de fournir aux étudiants le bagage nécessaire pour suivre les enseignements spécialisés d'économie et de gestion dispensés en Grande Ecole ou dans une formation universitaire de troisième année de Licence.

Il s'organise autour de quatre points forts :

- En algèbre linéaire, le programme se concentre sur le calcul matriciel. Le principal objectif est l'introduction de la notion de valeurs propres et de vecteurs propres et la diagonalisation des matrices carrées de taille inférieure à 3. On évitera des exemples trop calculatoires.

- En analyse, les séries et les intégrales généralisées sont étudiées en vue de leurs applications aux probabilités (variables aléatoires discrètes infinies et variables aléatoires à densité).

- En probabilités, l'étude des variables aléatoires discrètes, initiée au lycée et poursuivie en première année de classe préparatoire, se prolonge au troisième semestre par l'étude des couples et des suites de variables aléatoires discrètes ; au quatrième semestre, les notions sur les variables aléatoires à densité, abordées dès la première année, sont complétées. L'objectif de cette partie du programme est de permettre, en fin de formation, une approche plus rigoureuse et une compréhension plus aboutie des concepts d'estimation ponctuelle ou par intervalles de confiance que les étudiants ont rencontrés dès le lycée.

- Les travaux pratiques de mathématiques et d'informatique sont organisés autour de la poursuite de l'étude des fonctionnalités du langage SQL et, avec Python, de la simulation de lois de probabilités en continuité du programme de première année, et de thèmes de statistiques en lien avec le programme de mathématiques, avec l'objectif d'éclairer ces notions par des illustrations concrètes. Les savoir-faire et compétences que les étudiants doivent acquérir lors de ces séances de travaux pratiques sont spécifiés dans la liste des exigibles et rappelés en préambule de chaque thème. Les nouvelles notions mathématiques introduites dans certains thèmes ne font pas partie des exigibles du programme. L'enseignement de ces travaux pratiques se déroulera sur les créneaux horaires dédiés à l'informatique.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme «admis», la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les séances de travaux dirigés permettent de privilégier la prise en main, puis la mise en œuvre par les étudiants, des techniques usuelles et bien délimitées, inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les parties du programme pouvant être traitées en liaison avec l'informatique.

Le langage Python comporte de nombreuses fonctionnalités permettant d'illustrer simplement certaines notions mathématiques. Ainsi, on utilisera dès que possible l'outil informatique en cours de mathématiques pour visualiser et illustrer les notions étudiées. Dans certaines situations, en continuité avec les programmes de lycée, l'utilisation d'un tableur peut s'avérer adaptée.

Les étudiants ont déjà une pratique algorithmique acquise au lycée. Dans leurs études futures, ils seront amenés à utiliser différents logiciels conçus pour la résolution de problématiques liées à certains contextes. Une pratique régulière d'outils informatiques les prépare utilement en ce sens. Par ailleurs, l'utilisation d'un outil informatique (programme informatique ou tableur) permet l'observation de résultats mathématiques en situation, l'exploration et la modélisation de situations non triviales plus réalistes et offre la possibilité d'expérimenter et de conjecturer.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU TROISIÈME SEMESTRE

I - **Matrices**

Le programme exclut toute notion de structure. On ne traite que le cas des matrices réelles.

Matrices carrées d'ordre n. Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Matrices triangulaires, matrices diagonales, matrice identité. Matrices inversibles.	
Critère d'inversibilité d'une matrice triangulaire.	Résultat admis.
Critère d'inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2.	$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Formule de l'inverse dans ce cas. La notation $\det(A)$ pourra être utilisée, mais elle sera limitée au cas des matrices carrées d'ordre 2. La notion de déterminant est hors-programme.
Exemples de calcul des puissances n-ièmes d'une matrice. Cas d'une matrice diagonale.	
Formule du binôme pour les matrices qui commutent.	On se limitera à des exemples simples, par exemple lorsque l'une des matrices est nilpotente.

Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires.

Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss.
Calcul de l'inverse de la matrice A par la résolution du système $AX = Y$.

On se limitera à des matrices carrées d'ordre inférieur ou égal à 3.

II - Compléments d'intégration : propriétés de l'intégrale

Ce chapitre sera l'occasion de revenir sur les calculs d'intégrales introduits au S2.

Linéarité de l'intégrale.

Intégration par parties.

Si u, v, u' et v' sont des fonctions continues sur $[a, b]$, alors :
$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$.

Positivité de l'intégrale. Comparaison d'intégrales.

III - Compléments sur les sommes et séries numériques

1 - Compléments sur les sommes

Ce chapitre sera l'occasion de revenir sur les calculs de sommes traités en première année $\boxed{\blacktriangleright}$.

Somme télescopique.

Décalage d'indice.

On se limitera, sur des exemples simples, à des décalages d'indice de type $k' = k + 1$.

2 - Séries

Les séries sont introduites exclusivement pour leurs applications au calcul des probabilités. Aucune difficulté ne sera soulevée.

Définition. Convergence d'une série. Somme d'une série convergente.

Condition nécessaire de convergence.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Série géométrique. Convergence et somme.

La série $\sum x^n$ converge si et seulement si $|\,x\,| < 1$, et dans ce cas : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
Les dérivées des séries géométriques ne font pas partie des attendus du programme.

IV - Probabilités et statistiques

Tout excès de technicité est exclu.

1 - Couples de variables aléatoires discrètes finies

Loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires. Lois marginales, lois conditionnelles.	La loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes est caractérisée par la donnée de $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y])$.
Indépendance de deux variables aléatoires.	X et Y sont indépendantes si, pour tous intervalles réels I et J, les événements $[X \in I]$ et $[Y \in J]$ sont indépendants. On remarquera que si l'une des variables aléatoires X, Y est constante, X et Y sont indépendantes.
Espérance d'une somme de deux variables aléatoires, linéarité de l'espérance.	Résultat admis.
Espérance d'un produit de deux variables aléatoires.	$E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyP([X = x] \cap [Y = y])$. Résultat admis.
Cas de deux variables aléatoires X et Y indépendantes.	$E(XY) = E(X)E(Y)$. Résultat admis. La réciproque est fausse.
Covariance. Propriétés.	Notation $\text{Cov}(X, Y)$. Linéarité à droite, à gauche. Symétrie. Si $a \in \mathbf{R}$, $\text{Cov}(X, a) = 0$. $\text{Cov}(X, X) = V(X)$.
Formule de Kœnig-Huygens.	$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Si X et Y sont indépendantes, leur covariance est nulle, la réciproque étant fausse.
Variance d'une somme de deux variables aléatoires.	
Coefficient de corrélation linéaire.	Notation $\rho(X, Y)$. Si $\sigma(X)\sigma(Y) \neq 0$, $\rho(X, Y) = \dfrac{\text{Cov (X, Y)}}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.
Propriétés.	$\lvert\rho(X, Y)\rvert \leqslant 1$. Interprétation dans le cas où $\rho(X, Y) = \pm 1$.

2 - Variables aléatoires discrètes infinies

a) Généralités

On se limitera aux variables aléatoires positives dont l'image est indexée par $\mathbf{N}$. *Aucune difficulté théorique ne sera soulevée au moment de l'extension des propriétés.*

Notion d'espace probabilisé avec Ω non fini.
Extension des définitions et des propriétés des variables aléatoires discrètes au cas où l'image est un ensemble infini dénombrable : loi de probabilité, fonction de répartition, espérance, variance, écart-type.

b) Lois usuelles

Chacune des lois usuelles sera illustrée par un exemple concret d'une situation qu'elle modélise.

Loi géométrique.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. La reconnaissance de la loi géométrique comme loi du premier succès est exigible.
Espérance et variance.	Résultats admis.
Loi de Poisson.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
Espérance et variance.	Résultats admis.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU QUATRIÈME SEMESTRE

I - Réduction des matrices carrées

L'objectif est l'introduction de la notion de valeurs propres et de vecteurs propres d'une matrice. La notion de polynôme minimal, la résolution générale des systèmes $AX = \lambda X$ (avec λ paramètre quelconque) et toute théorie sur la réduction sont hors programme.

Dans tout ce paragraphe, on évitera les méthodes trop calculatoires pour la recherche des éléments propres d'une matrice. En particulier, la résolution de systèmes à paramètres est à proscrire. Dans la pratique, on se limitera à des matrices carrées d'ordre inférieur ou égal à 3.

Polynôme d'une matrice. Polynôme annulateur.	Sur des exemples, utilisation d'un polynôme annulateur pour la détermination de l'inverse d'une matrice carrée. Toutes les indications devront être données aux candidats pour l'obtention d'un polynôme annulateur. On pourra vérifier que le polynôme $X^2 - (a+d)\,X + (ad - bc)$ est un polynôme annulateur de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Matrices carrées diagonalisables.	Une matrice carrée A est diagonalisable s'il existe une matrice D, diagonale, et une matrice carrée P, inversible, telles que $D = P^{-1}AP$.
Valeur propre, vecteur propre d'une matrice carrée.	Avec les notations de la définition précédente, on remarquera que la matrice P est construite à partir de vecteurs propres de A et la matrice D des valeurs propres correspondantes, mais leur construction n'est pas exigible.
Si Q est un polynôme annulateur de A, toute valeur propre de A est racine de Q.	Résultat admis.

Recherche de valeurs propres.

Pour ce faire, on utilisera un polynôme annulateur.
La recherche de vecteurs propres ne pourra être demandée que dans le cas de valeurs propres de multiplicité 1. Dans les autres cas, les vecteurs propres devront être donnés.

Sur des exemples, diagonalisation d'une matrice carrée d'ordre inférieur ou égal à 3.
Application au calcul des puissances de A.

Sur des exemples, étude de suites linéaires récurrentes d'ordre 2 et de systèmes de suites récurrentes.
La méthode générale de résolution est hors-programme.

II - **Compléments d'analyse**

Les notions introduites dans ce chapitre le sont exclusivement pour leurs applications au calcul des probabilités. Aucune difficulté ne sera soulevée.

Le calcul des intégrales généralisées est effectué par des recherches de primitives sur des intervalles du type $[a,b]$, l'application de la relation de Chasles, et des passages à la limite en $-\infty$ et/ou $+\infty$.

Les intégrales généralisées en un point réel sont hors-programme.

Intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue sur $[a,+\infty[$. Convergence et définition.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie, et dans ce cas, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue sur $]-\infty,b]$.

Extension aux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Aucune difficulté théorique ne sera soulevée lors du passage du calcul des intégrales des fonctions continues à celui des intégrales des fonctions continues sauf en un nombre fini de points.

III - **Probabilités et statistiques**

1 - Variables aléatoires à densité continue par morceaux

Ce paragraphe généralise l'étude de la loi uniforme effectuée en première année.

Le passage du cas discret au cas continu n'est pas explicité. On se limitera à des calculs de probabilités du type $P([X\in I])$, où I est un intervalle de $\mathbf{R}$.

Densité de probabilité.	Une fonction f définie sur $\mathbf{R}$ est une densité de probabilité si elle est positive, continue sur $\mathbf{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. On se limitera en pratique à des fonctions continues par morceaux, cette notion étant elle-même hors-programme.
Variable aléatoire à densité.	Une variable aléatoire X admet une densité si sa fonction de répartition F_X peut s'écrire sous la forme $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est une densité de probabilité. Sur des exemples, détermination d'une densité de $aX+b$ ou de X^2.
Espérance, variance et écart-type.	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée.

2 - Variables aléatoires à densité usuelles

Chacune des lois usuelles sera illustrée par un exemple concret d'une situation qu'elle modélise.

Loi uniforme. Densité et fonction de répartition. Espérance et variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$.
Loi exponentielle. Densité et fonction de répartition. Espérance et variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
Loi normale (ou de Laplace-Gauss) de paramètres m et σ^2, où $\sigma > 0$. Espérance et variance.	Densité. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Résultats admis.
Loi normale centrée réduite.	Densité. $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ si et seulement si $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. On attend des étudiants qu'ils sachent utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite. Pour tout réel x : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

3 - Convergences et approximations

a) Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

On pourra démontrer ces inégalités dans le cas d'une variable aléatoire discrète ou à densité.

Inégalité de Markov.	Si X est une variable aléatoire à valeurs positives et admettant une espérance, $$\forall a > 0, \quad P([X \geqslant a]) \leqslant \frac{E(X)}{a}.$$ Résultat non exigible. On pourra appliquer cette inégalité à $Y = \|X\|^r, r \in \mathbf{N}^*$.
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, $$\forall \varepsilon > 0, \quad P([\| X - E(X) \| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$ Résultat non exigible.

b) Suites de variables aléatoires discrètes finies

Indépendance mutuelle de n variables aléatoires.	Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si, pour tout choix de n intervalles réels $I_1, \ldots, I_n$, les événements $[X_1 \in I_1], \ldots, [X_n \in I_n]$ sont mutuellement indépendants.
Indépendance mutuelle d'une suite de variables aléatoires.	Les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sont dites mutuellement indépendantes si, pour tout entier $n \geqslant 1$, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.
Espérance de la somme de n variables aléatoires.	
Variance d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.	Application à la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.

c) Loi faible des grands nombres

Loi faible des grands nombres.	Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance m et une même variance et soit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P([\|\overline{X}_n - m\| \geqslant \varepsilon]) = 0$. Illustrations. $\boxed{\blacktriangleright}$.

4 - Estimation

L'objectif de ce chapitre est, sans insister sur les aspects formels, de dégager la signification de la loi des grands nombres (approche fréquentiste) et de mettre en place la problématique de l'estimation. On introduit sur un exemple simple et concret (par exemple un sondage) cette problématique : on considère un phénomène aléatoire, qu'on a abstrait par une variable aléatoire réelle X dans une famille de lois *dépendant d'un paramètre inconnu θ (sur l'exemple du sondage, une loi de Bernoulli). Le problème de l'estimation consiste alors à déterminer une valeur approchée du paramètre θ à partir d'un échantillon de données $x_1, \ldots, x_n$ obtenues en observant n fois le phénomène.*

On supposera que cet échantillon est la réalisation de n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ muni d'une famille de probabilités $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$. Les $X_1, \ldots, X_n$ seront supposées P_θ-indépendantes et de même loi que X pour tout θ. On pourra éventuellement introduire la notion d'estimateur, mais ce n'est pas un attendu du programme. Dans les cas considérés, le paramètre sera déterminé par la moyenne de la variable aléatoire. On s'appuie sur la loi faible des grands nombres pour justifier l'utilisation de l'estimateur $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ pour estimer l'espérance commune des variables aléatoires indépendantes X_i de même loi que X.

Echantillon.

a) Estimation ponctuelle.

La réalisation de $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ observée sur l'échantillon $x_1, \ldots, x_n$ est l'estimation du paramètre obtenue sur cet échantillon.

On donne les exemples de la loi de Bernoulli et de la loi de Poisson.

b) Estimation par intervalle de confiance.

La démarche consiste non plus à donner une estimation ponctuelle du paramètre θ mais à trouver un intervalle aléatoire, appelé intervalle de con

fiance, qui le contienne avec une probabilité minimale donnée. Ce paragraphe a uniquement pour but de préciser le vocabulaire employé. Les situations seront étudiées sous forme d'exercices dans des séances d'exercices et de travaux pratiques, aucune connaissance autre que ce vocabulaire n'est exigible sur les intervalles de confiance. On introduit l'intervalle de confiance obtenu à partir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. On en explique la signification. On remarque que la précision augmente avec la taille de l'échantillon. La démonstration n'est pas un attendu du programme.

Intervalle de confiance : La probabilité que l'intervalle $\left[\bar{X}_n - \sqrt{\frac{V(X)}{na}}, \bar{X}_n + \sqrt{\frac{V(X)}{na}}\right]$ contienne la moyenne $E(X)$ est supérieure à $1 - a$.

On se limitera au cas d'une variable de Bernoulli.
Résultat non exigible.
En pratique, la variance V est inconnue, mais on peut la majorer par $\frac{1}{4}$.
On particularise numériquement les intervalles de confiance au seuil de confiance de 90 % et de 95 %.

Intervalle de confiance de la moyenne d'une loi normale dont l'écart-type est connu.

On remarque que dans la pratique, l'écart-type n'est pas connu, ce qui conduit à utiliser l'écart-type de l'échantillon (écart-type empirique).

Enseignement annuel d'informatique et d'algorithmique

I - Éléments d'informatique et d'algorithmique

En première année, les élèves ont consolidé les bases de manipulation du langage Python. L'objectif de l'enseignement d'informatique de seconde année est de permettre aux étudiants de l'utiliser de manière judicieuse et autonome pour illustrer ou modéliser des situations concrètes en mobilisant leurs connaissances mathématiques.

Le programme d'informatique s'articule autour de quatre thèmes : statistiques descriptives bivariées, études de suites et de fonctions, simulation de lois, estimation.

L'ordre dans lequel les thèmes sont abordés est libre, mais il est préférable de mener ces activités en cohérence avec la progression du cours de mathématiques.

Les exemples traités dans un thème devront être tirés, autant que possible, de situations réelles (traitement de données économiques, sociologiques, historiques, démographiques, en lien avec le monde de l'entreprise ou de la finance, etc.), en faisant dès que possible un rapprochement avec les autres disciplines.

Pour certains thèmes, il sera nécessaire d'introduire de nouvelles notions mathématiques ; celles-ci seront introduites lors des séances d'informatique ; elles ne pourront en aucun cas être exigibles des étudiants, et toutes les précisions nécessaires seront données lors de leur utilisation.

Le langage informatique retenu pour la programmation dans ce programme des classes économiques et commerciales, option technologique, est Python.

Toute la richesse du langage Python ne peut pas être entièrement maîtrisée par un étudiant, aussi seules les fonctions et commandes exigibles du programme de première année sont exigibles, et leur syntaxe précise doit être rappelée. D'autres fonctions, par commodité, pourront être utilisées en classe, mais ceci ne pourra se faire qu'avec parcimonie. L'objectif principal de l'activité informatique reste la mise en pratique de connaissances mathématiques. Ces commandes supplémentaires devront être présentées en préambule et toutes les précisions nécessaires devront être données lors de leur utilisation et leur interprétation. On favorisera à cette occasion l'autonomie et la prise d'initiatives des étudiants grâce à l'utilisation de l'aide de Python, et à l'usage d'opérations de «copier-coller» qui permettent de prendre en main rapidement des fonctions nouvelles et évitent d'avoir à connaître par cœur la syntaxe de commandes complexes.

L'objectif de ces travaux pratiques n'est pas l'écriture de longs programmes mais l'assimilation de savoir-faire et de compétences spécifiés dans la liste des exigibles et rappelés en préambule de chaque thème.

1 - Liste des savoir-faire et compétences

C1 : Produire et interpréter des résumés numériques et graphiques d'une série statistique (simple, double) ou d'une loi.

C2 : Modéliser et simuler des phénomènes (aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique.

C3 : Porter un regard critique sur les méthodes d'estimation et de simulation.

C4 Stocker, organiser et extraire des données structurées volumineuses.

II - **Langage Python**

Les commandes exigibles ont été listées dans le programme de première année.

III - **Liste des thèmes**

1 - Statistiques descriptives bivariées

(Durée indicative : 4 heures. Compétences développées : **C1** et **C3**)

On s'appuiera sur les représentations graphiques pour montrer l'intérêt et les limites des indicateurs.

Série statistique à deux variables, nuage de points associé. Point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage.	On tracera le nuage de points et on pourra effectuer des pré-transformations pour se ramener au cas linéaire.
Covariance empirique, coefficient de corrélation empirique, droites de régression.	Analyse de deux caractères quantitatifs : covariance empirique, corrélation linéaire empirique, ajustement affine par la méthode des moindres carrés. On différenciera les variables explicatives des variables à expliquer et on soulignera la distinction entre corrélation et causalité. On pourra donner des exemples d'utilisation de la droite de régression pour faire des prévisions dans le cadre de problèmes concrets. On pourra utiliser les commandes : `plt.scatter, np.polyfit, np.corrcoef` ou un tableur

2 - Simulation de lois, application au calcul d'espérances

(Durée indicative : 4 heures. Compétences développées : **C1**, **C2**, et **C3**)

Ces simulations de variables aléatoires seront introduites comme illustrations de problèmes concrets, et permettront d'en vérifier la compréhension par les étudiants. Dans toutes les simulations effectuées, on pourra comparer les échantillons obtenus avec les distributions théoriques, en utilisant des diagrammes en bâtons et des histogrammes. On pourra aussi tracer la fonction de répartition empirique et la comparer à la fonction de répartition théorique. On pourra utiliser les générateurs de nombres aléatoires selon les lois uniformes, binomiales, géométriques, normales, de la bibliothèque `numpy.random` *:* `rd.random, rd.binomial, rd.randint, rd.geometric, rd.poisson, rd.exponential, rd.normal` .

Simulation de la loi uniforme sur $[0, 1]$; sur $[a, b]$.	
Simulation de phénomènes aléatoires à partir de lois usuelles. Méthodes de simulation d'une loi géométrique.	Comparaison entre différentes méthodes : utilisation d'une loi de Bernoulli et d'une boucle `while`, utilisation du générateur `rd.random`.
Simulation de lois usuelles.	

3 - Bases de données

(Durée indicative : 4 heures. Compétences développées : **C4**)

Dans la continuité du programme de première année, on poursuit l'étude du langage SQL avec la création de table et l'interrogation avancée via l'instruction JOIN. On introduira ces concepts à l'aide d'exemples simples issus de contextes appropriés.

a) Commandes exigibles

"SELECT* FROM nom_de_table_1 INNER JOIN nom_de_table_2".	Réalisation d'une jointure. On pourra ajouter une condition " ONΦ" dans le cas où Φ est une conjonction d'égalités. Aucune autre notion de jointure n'est dans ce programme.
"CREATE TABLE nom_de_table".	Création d'une table.

b) Commandes non exigibles

Les commandes non exigibles ont été listées dans le programme de première année.

4 - Théorème limite central

(Durée indicative : 4 heures. Compétences développées : **C1**, **C2**, et **C3**)

L'objectif est ici de dégager des conséquences importantes du théorème limite central qui n'est pas au programme. On met en œuvre sur des exemples ce théorème, qu'on pourra énoncer sans formaliser la notion de convergence. On souhaite dégager la pertinence de l'utilisation de la loi normale pour modéliser les phénomènes résultant de nombreux phénomènes aléatoires indépendants et de l'intervalle de confiance asymptotique dont on pourra mettre en valeur la précision.

Etude de la distribution des moyennes empiriques par simulation informatique de la loi de $X = \dfrac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}$ où $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une même loi discrète d'espérance μ et d'écart type σ.	On cherche à visualiser la convergence vers la loi normale d'espérance μ et d'écart type σ. On pourra produire un échantillon de taille N des moyennes empiriques d'échantillons de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type σ, et le représenter sous forme d'un histogramme. On observera l'effet de l'augmentation de n sur la dispersion des moyennes.
Simulation informatique de la loi de $X = \dfrac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}$ où $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme à densité sur $[0, 1]$.	On remarquera que la variable aléatoire centrée réduite associée à X est une approximation de la loi normale centrée réduite et on sensibilisera les étudiants au théorème limite central, en testant cette simulation avec d'autres lois.
Intervalle de confiance asymptotique.	On compare l'intervalle de confiance obtenu avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec l'intervalle de confiance asymptotique, qu'on présentera en invoquant le théorème limite central pour estimer le paramètre d'une loi de Bernoulli.

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie technologique
ECT

Annexe 2
Programmes de droit et d'économie

1ère et 2nde années

ECT – PROGRAMMES DE DROIT ET D'ÉCONOMIE

PRÉAMBULE

Les enseignements de Droit et d'Économie, en classe préparatoire aux grandes écoles voie économique et commerciale option technologique, s'inscrivent dans la continuité de l'enseignement « Droit-économie » prodigué au lycée en voie technologique. Chaque programme propose des approfondissements et des prolongements en prenant appui sur des questionnements en lien avec la réalité dans ses dimensions juridiques ou économiques.

L'enseignement du droit et de l'économie permettent de développer chez l'étudiant :

- une capacité à comprendre les enjeux du monde contemporain, afin de pouvoir mener une réflexion critique ;
- une compréhension de la diversité des approches autour d'un même sujet ;
- un discernement pour exercer sa citoyenneté en se situant au sein de la société, en identifiant les droits et obligations afférents à une situation et en formulant des raisonnements argumentés.

1- PROGRAMME DE DROIT

L'enseignement de droit vise à développer la compréhension et la maîtrise des mécanismes juridiques fondamentaux. Ce programme centré sur l'entreprise permet de parcourir un éventail de questions rencontrées lors de l'exercice d'une activité économique.

Il accorde une place importante à la veille juridique qui exprime le caractère évolutif du droit et qui s'avère indispensable aujourd'hui pour tout acteur devant se référer au droit. Structurée autour d'un thème permanent et défini, la veille juridique vise à mobiliser les sources de droit comme objet de l'étude et de la compréhension de l'évolution du droit.

S'inscrivant dans la continuité de l'enseignement de droit en voie technologique, l'étudiant va poursuivre ses apprentissages autour de 3 objectifs :

- acquérir une culture juridique à travers notamment une activité de veille juridique qui vise à repérer les évolutions du droit pour en identifier les incidences afférentes ;
- mobiliser des notions juridiques à partir de l'analyse de situations juridiques didactisées issues de la vie des entreprises ;
- mettre en œuvre les différentes méthodologies juridiques : qualification juridique, argumentation, recherche et exploitation d'une documentation juridique.

Le programme s'articule en deux parties :

- une première partie consacrée à la veille juridique,
- une seconde partie structurée autour de 5 thèmes présentant chacun un questionnement. Ce choix vise à favoriser le développement de l'argumentation par la construction de réponses aux questions formulées. Dans ce cadre, l'étudiant sera amené à développer les capacités énoncées à partir des contenus notionnels et d'éléments issus de l'actualité juridique.

PREMIÈRE PARTIE - VEILLE JURIDIQUE : LE DROIT DES ENTREPRISES, UN DROIT ÉVOLUTIF ET VIVANT

Dans le cadre de l'enseignement du droit, l'activité de veille juridique doit permettre, au travers notamment de l'étude des sources de droit, de faire prendre conscience à l'étudiant du caractère évolutif du droit et des liens qu'il entretient avec les différentes activités de l'entreprise.
L'étudiant développe la capacité à analyser et à exploiter les sources de droit pour comprendre comment les sources de droit principalement nationales et européennes encadrent l'activité des entreprises et comment elles évoluent au regard du thème de veille défini ci-dessous.
Les sources de droit obéissent à une hiérarchie qui forme un ordre juridique cohérent. Les contenus notionnels visés dans la seconde partie du programme sont issus de ces sources.

L'activité de veille juridique accompagne donc l'acquisition et la compréhension des notions et capacités tout au long de l'étude du programme et porte sur le thème suivant :

« **Activités des entreprises et libertés individuelles** »

Le thème de veille juridique constitue un fil directeur dans la formation des étudiants et son exercice s'opère en continu au fur et à mesure de l'avancée du programme et dans la limite de celui-ci.

L'activité de veille pourra permettre aux étudiants de développer et de construire un travail collaboratif valorisant ainsi une capacité nécessaire à la poursuite d'études supérieures. L'accès à des équipements informatiques et à des outils numériques est nécessaire afin de permettre aux étudiants de mobiliser les différentes modalités de veille et de curation.
À cette occasion, sont mobilisées et enrichies les capacités méthodologiques et transversales de l'étudiant(e) énoncées ci-dessous :

- repérer parmi les sources du droit les éléments pertinents permettant de comprendre l'évolution du droit des entreprises ;
- analyser et exploiter une documentation juridique fournie (arrêt, article juridique…) au regard des éléments de veille étudiés ;
- déterminer la règle applicable dans une situation juridique donnée ;
- apprécier l'apport d'un document au regard du thème de la veille juridique.

D'autres capacités plus spécifiques à l'étude des sources du droit sont mobilisées par les étudiant(e)s tout au long de leurs deux années de formation dans la perspective du thème de veille :

- analyser les sources de droit garantes des libertés individuelles des personnes dans le cadre de l'activité économique ;
- expliquer le rôle du pouvoir législatif et le rôle du pouvoir réglementaire ;
- analyser le rôle et l'apport de la jurisprudence de la Cour de cassation et de la Cour européenne des droits de l'homme (CEDH) pour les entreprises ;
- analyser et comprendre la portée des décisions d'autorités administratives indépendantes (AAI) pour les entreprises et l'activité économique ;
- identifier les missions du défenseur des droits ;
- expliquer l'intérêt pour l'entreprise de recourir au droit négocié dans l'exercice de ses activités.

DEUXIÈME PARTIE - LES THÈMES JURIDIQUES MOBILISANT DES QUESTIONS POSÉES PAR LE DROIT AUX ENTREPRISES

THÈME 1 - LE CADRE JURIDIQUE DE LA VIE DES ENTREPRISES

- **Qu'est-ce que le droit pour les entreprises ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Identifier les finalités et spécificités de la règle de droit pour l'activité de l'entreprise.	La règle de droit : finalités et caractéristiques Le droit objectif et les droits subjectifs La personnalité juridique
- Expliquer la distinction entre les différents droits des personnes juridiques.	La classification des droits La distinction entre droits patrimoniaux et droits extrapatrimoniaux
- Justifier l'application du droit à une entreprise.	Le droit au respect de la vie privée Les caractéristiques juridiques de l'entreprise

- **Comment s'articulent les sources du droit pour encadrer l'activité des entreprises ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Déterminer l'origine des différentes sources du droit s'appliquant aux entreprises. ***- Expliquer l'application de la hiérarchie des sources de droit dans le cadre de l'activité économique.*** ***- Distinguer les missions des organes de contrôle de la hiérarchie des sources .***	La typologie des sources de droit La classification des institutions et organes nationaux et européens créateurs de la règle de droit Les acteurs et les mécanismes du contrôle de la hiérarchie des sources : le contrôle de légalité, contrôle de constitutionnalité, le contrôle de conventionalité

- **Comment le droit permet-il de régler les litiges impliquant des entreprises ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Analyser les grands principes de la justice qui s'appliquent aux entreprises en France.	Les grands principes de la justice Le principe du contradictoire
-Proposer une voie de recours pertinente d'accès à la justice.	Les voies de recours : appel, pourvoi et saisine de la CEDH
- Déterminer le champ d'application d'une règle de droit.	La spécialisation des règles de droit Les conditions de mise en œuvre de la règle
- Apporter la preuve de l'existence d'un droit.	Les actes et faits juridiques Les systèmes de preuve Les procédés de preuve

THÈME 2 - LA PROTECTION DES DROITS DES ENTREPRISES

➢ **Quelle est l'étendue des libertés économiques et quelles en sont les limites?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Justifier le rôle et la portée des libertés économiques. ***- Analyser les limites des libertés économiques.*** ***- Qualifier les pratiques anticoncurrentielles.***	La liberté d'entreprendre La liberté du commerce et de l'industrie L'ordre public de protection ; l'ordre public de direction La liberté de la concurrence Les pratiques anticoncurrentielles : entente illicite et abus de position dominante

➢ **Comment entreprendre ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Conseiller sur le choix d'un type de structure juridique pour entreprendre. ***- Analyser les conséquences de l'acquisition de la personnalité juridique pour l'entreprise.*** ***- Identifier les conditions d'attribution de la commercialité.***	L'entreprise individuelle (dans le domaine commercial) Le type de société commerciale : notion de société de personnes, de société de capitaux, de société hybride Les mécanismes juridiques de protection du patrimoine des propriétaires de l'entreprise Les personnes physiques et personnes morales La qualité de commerçant

➢ **Comment le droit encadre-t-il l'exploitation des actifs immatériels des entreprises ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Identifier et mettre en œuvre les modalités juridiques de protection de la propriété industrielle. ***- Analyser les conditions de mise en œuvre du RGPD.*** ***- Analyser la protection de l'entreprise face à des comportements déloyaux.*** ***- Identifier les informations protégées par le secret des affaires et les modalités juridiques de cette protection.***	La propriété industrielle Le brevet La marque Les mécanismes de protection : action civile en contrefaçon, action en nullité, action en déchéance, action en épuisement du droit La territorialité de la protection : protection nationale et européenne Le RGPD : données personnelles, traitement et territorialité Les faits constitutifs de concurrence déloyale Le secret des affaires

THÈME 3 - LE CONTRAT : UN INSTRUMENT JURIDIQUE D'ORGANISATION DES RELATIONS ÉCONOMIQUES DES ENTREPRISES AVEC LEURS PARTENAIRES

➢ **Quels sont les enjeux juridiques de la formation du contrat pour les entreprises ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Expliquer le rôle du contrat dans la sécurisation des relations de l'entreprise avec ses partenaires. ***- Analyser les modalités de formation du contrat dans le cadre d'une relation économique.***	La notion d'obligation La classification des contrats Le principe du consensualisme Le principe de la force obligatoire du contrat pour les parties Le principe de la liberté contractuelle La négociation du contrat La formation du contrat Les vices du consentement La violence économique Le principe de bonne foi (négociation, formation et validité) L'action en nullité

➢ **Comment le contrat permet-il à l'entreprise de s'adapter à l'évolution du contexte économique ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Évaluer la possibilité de la révision du contrat pour l'entreprise. ***- Analyser les effets juridiques de certaines clauses contractuelles.***	Le droit à la renégociation dans le cadre de l'imprévision La clause résolutoire La clause pénale La clause suspensive La clause de renégociation

➢ **Quelles sont les réponses juridiques en cas de manquement contractuel ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Conseiller un ou plusieurs mécanismes mobilisables par le créancier en cas de manquement contractuel. ***- Identifier les causes d'exonération possibles.***	L'exception d'inexécution L'exécution forcée La réduction du prix La résolution ou résiliation du contrat Les conditions de la mise en jeu de la responsabilité contractuelle La réparation La clause limitative de responsabilité La clause d'exonération de responsabilité La cause étrangère (force majeure, fait d'un tiers et fait du créancier)

➢ **Comment préserver l'équilibre contractuel entre l'entreprise et le consommateur ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
-Qualifier une personne de consommateur ou de non professionnel dans une situation juridique donnée. ***- Montrer les spécificités d'un contrat de consommation.*** ***- Analyser les conséquences juridiques d'une clause d'abusive en droit de la consommation.*** ***- Analyser les obligations des entreprises pour l'exécution du contrat de vente formé avec un consommateur.***	La notion de consommateur, non-professionnel et professionnel L'obligation d'information L'obligation de conseil Le droit de rétractation du consommateur La protection du consommateur dans le cadre du contrat électronique La garantie légale de conformité La clause abusive L'obligation de délivrance conforme La garantie des vices cachés

THÈME 4 - LA RESPONSABILITÉ CIVILE EXTRACONTRACTUELLE DES ENTREPRISES

➢ **Sur quels fondements l'entreprise peut-elle voir sa responsabilité extracontractuelle engagée ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Distinguer les fondements de la responsabilité civile de la responsabilité pénale. ***- Identifier les caractéristiques du dommage réparable dans une situation juridique donnée.*** ***- Conseiller une ou plusieurs actions en réparation dans une situation donnée et en déduire les modes d'exonération possibles.*** ***- Évaluer le risque de mise en œuvre de la responsabilité civile du fait du préjudice écologique résultant de l'activité d'une entreprise.***	La distinction entre responsabilité civile et responsabilité pénale Les différents types de dommages Les caractères du dommage réparable Les conditions de mise en jeu de la responsabilité civile extracontractuelle La responsabilité du fait personnel La responsabilité du fait des choses La responsabilité de l'employeur du fait de ses salariés Les causes d'exonération (faits justificatifs et cause étrangère) Le régime spécial de responsabilité du fait des produits défectueux et ses causes spécifiques d'exonération Le préjudice écologique

➢ **Comment le droit cherche-t-il à préserver l'équilibre dans les relations commerciales ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Identifier la présence d'un déséquilibre dans une relation commerciale et en déduire les conséquences juridiques. ***- Caractériser une rupture brutale de relations commerciales établies et en déduire les conséquences juridiques.***	Les pratiques restrictives de concurrence Le déséquilibre significatif L'obtention d'un avantage sans contrepartie La rupture brutale des relations commerciales établies

THÈME 5 : LES RELATIONS INDIVIDUELLES DE TRAVAIL DANS LES ENTREPRISES

- **Comment le droit reconnait-il l'existence d'une relation de travail avec les entreprises ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Distinguer le contrat de travail du contrat d'entreprise ou du contrat de prestation de services.	La définition du contrat de travail Les critères d'existence du contrat de travail
- Conseiller le choix d'un contrat de travail dans une situation donnée.	Les principaux types de contrats de travail : le CDI et le CDD La conclusion des contrats de travail Le régime juridique du CDI et du CDD
- Analyser l'exercice du pouvoir de direction de l'employeur face aux droits des salariés.	Les pouvoirs de l'employeur Les droits individuels des salariés

- **Quels sont les principaux aménagements que les entreprises peuvent apporter à la relation de travail ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Analyser la mise en œuvre de clauses particulières du contrat de travail dans une situation donnée.	La clause d'essai La clause de non-concurrence La clause de mobilité géographique
- Qualifier l'évolution de la relation de travail et en déduire le régime juridique applicable.	La modification du contrat de travail Le changement des conditions de travail Les effets sur le contrat de travail de la modification de la situation juridique de l'employeur

- **Comment les parties au contrat de travail peuvent-elles rompre leur relation de travail ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Déterminer le mode de rupture du contrat de travail adapté dans une situation donnée et en déduire le régime juridique applicable. ***- Analyser les suites de la rupture du contrat de travail.***	Les motifs du licenciement pour fait personnel Les motifs du licenciement economique La rupture initiée par le salarié : la démission La rupture conventionnelle individuelle La rupture conventionnelle collective La prise d'acte de la rupture La transaction La mise en oeuvre de la clause de non concurrence La mise en oeuvre de la clause de confidentialité

2- PROGRAMME D'ÉCONOMIE

L'enseignement d'économie vise à développer la compréhension du monde contemporain, à travers l'étude de questions économiques permettant aux étudiants de construire un raisonnement argumenté à partir d'un dossier documentaire ou d'une problématique posée.

S'inscrivant dans la continuité de l'enseignement d'économie en voie technologique, l'étudiant va poursuivre ses apprentissages méthodologiques autour de 4 objectifs :

- analyser une documentation économique non retraitée et de nature variée (textes économiques, tableaux, graphiques, schémas…) ;
- mobiliser des notions et des données économiques pour expliquer des phénomènes économiques ;
- structurer une argumentation sur un sujet contemporain donné ;
- synthétiser un dossier documentaire après avoir hiérarchisé les informations.

Au travers des différents travaux proposés, les étudiants seront amenés à développer leur sens critique.

Le programme s'articule autour de 5 thèmes présentant chacun un questionnement. Ce choix vise à favoriser le développement de l'argumentation par la construction de réponses aux questions formulées. Dans ce cadre, l'étudiant sera amené à développer les capacités énoncées à partir des contenus notionnels et d'éléments issus de l'actualité économique.

THÈME 1 : LES FONDEMENTS ET LES FINALITÉS DE L'ACTIVITÉ ÉCONOMIQUE

- **Comment l'activité économique crée-t-elle de la richesse ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Distinguer les principales ressources mobilisées pour produire des biens et des services. ***- Analyser l'allocation des ressources.*** ***- Évaluer la pertinence du PIB pour mesurer la richesse.*** ***-Comparer à l'aide du PIB les performances économiques d'un pays dans le temps et dans l'espace.***	La rareté des ressources Les principales classifications des biens et services Les ressources pour produire La technologie de production Les besoins humains L'allocation des ressources : choix économique sous contraintes, coût d'opportunité, raisonnement à la marge Le Produit intérieur Brut (PIB) Le revenu national brut (RNB)

- **Quelles sont les transformations contemporaines du système productif ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Caractériser un système productif national. ***- Identifier les principales transformations contemporaines du système productif.*** ***- Analyser les causes des mutations du système productif et les défis économiques et sociaux qui en découlent.***	La structure du système productif La classification des activités économiques (secteurs et branches) La concentration de l'offre, Les effets de la demande (notamment niveau de vie et effet revenu) Les effets de l'offre (notamment gains de productivité et évolution des prix relatifs) La tertiarisation La désindustrialisation La numérisation de l'économie L'ouverture des économies

- **Quelles relations d'interdépendance entretiennent les acteurs de l'activité économique ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Décrire les fonctions et les ressources principales des agents économiques résidents. ***- Expliquer le rôle de la monnaie dans les échanges entre les agents économiques.*** ***-Identifier les différents flux d'échanges entre les agents économiques résidents et non-résidents.*** ***- Analyser les relations d'interdépendance entre les différents agents économiques.***	Les secteurs institutionnels Les principales fonctions économiques des agents Les ressources principales des agents La monnaie : attributs, fonction, formes, les crypto-actifs. La création monétaire Les différents types de marchés Les flux de production, de consommation et d'investissement entre les agents résidents Les flux de revenu : revenus primaires et revenu disponible Les principaux flux du compte des transactions courantes L'équilibre emplois et ressources en biens et services L'équilibre épargne-investissement en économie fermée et ouverte

THÈME 2 : LE FONCTIONNEMENT DE L'ÉCONOMIE DE MARCHÉ

➢ **Pourquoi l'économie de marché s'est-elle imposée ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
-Expliquer la formation du prix d'équilibre sur un marché. ***-Discuter des différentes fonctions d'un prix sur un marché.*** ***-Expliquer le rôle du marché dans le fonctionnement de l'économie.***	Les déterminants de l'offre et de la demande et leurs effets La loi de l'offre et de la demande Les rôles des prix : rôle informationnel, rôle autorégulateur, rôle incitatif L'équilibre économique de marché L'intervention de l'État sur les prix Les principes du capitalisme Le libéralisme et l'interventionnisme L'économie de marché(s)

➢ **Quelles sont les dynamiques contemporaines de la concurrence et de la compétition entre firmes sur les marchés ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Caractériser un marché. ***- Analyser le rôle de la concurrence dans une économie de marché.*** ***- Expliquer la réalité de la concurrence imparfaite sur de nombreux marchés.***	Les structures de marché et l'intensité concurrentielle La concurrence parfaite et imparfaite La concentration horizontale et verticale Les indicateurs de concentration d'un marché Le pouvoir de marché La contestabilité d'un marché Les effets de la concurrence sur les consommateurs et sur les producteurs La concurrence et le bien être : le surplus collectif Le paradoxe de la concurrence et la dynamique de concentration des marchés Les stratégies de différenciation Les effets de réseau Les pratiques anticoncurrentielles : ententes illicites et abus de position dominante

- **Quelles sont les réponses de l'État aux défaillances de marché et aux imperfections de la concurrence ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Expliquer les défaillances de marché dans l'allocation des ressources. ***- Analyser la capacité de l'État à remédier aux défaillances de marché.*** ***- Questionner l'efficacité de la politique de concurrence pour répondre aux imperfections de marché.***	Les externalités Les biens collectifs, les biens communs Les monopoles naturels Les asymétries d'informations La réglementation : interdictions, normes, obligations Les solutions incitatives : fiscalité, subventions, distribution de droits de propriété Les missions et instruments de la politique de la concurrence Les stratégies d'ouverture à la concurrence et de déréglementation des marchés

THÈME 3 : ORIGINE ET SOUTENABILITÉ DE LA CROISSANCE CONOMIQUE

- **D'où vient la croissance économique ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Analyser l'origine de la croissance économique à partir de la première révolution industrielle. ***- Caractériser les facteurs de la croissance.*** ***- Distinguer les explications théoriques de la croissance.***	La croissance économique Les révolutions industrielles Le rattrapage économique Les explications conjoncturelles de la croissance du PIB Les déterminants de la croissance de long terme La productivité globale des facteurs La croissance extensive et intensive La croissance effective et la croissance potentielle Les cycles longs de la croissance : innovations et destruction-créatrice La croissance et le progrès technique Le rôle de l'État dans la croissance de long terme

- **Quelles influences du système bancaire et financier sur la croissance économique ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Analyser la structure et le fonctionnement des systèmes financiers. ***- Analyser les modalités de financement des entreprises et de l'État.*** ***-Expliquer les effets du financement de l'économie par les banques et les marchés financiers, sur la croissance économique.***	La finance directe et la finance indirecte Les fonctions principales du système bancaire et financier Les modes de financement alternatifs La structure des marchés de capitaux : marché monétaire et marché financier (marchés dérivés exclus) La libéralisation de la finance et la financiarisation de l'économie Les risques bancaires et le cycle du crédit L'efficience des marchés financiers et la formation de bulles spéculatives Les crises financières et les modes de propagation à l'économie réelle

- **Quels sont les enjeux d'une croissance économique inclusive et durable ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Analyser les effets ambivalents de la croissance économique sur le développement économique et humain. ***- Caractériser les dimensions du développement durable.*** ***- Analyser la relation entre croissance économique et inégalités économiques.***	La croissance et le développement économique Les indicateurs de mesure du niveau de développement humain Le développement durable La soutenabilité forte et faible La croissance et la répartition des revenus Les inégalités économiques de revenus et de patrimoine contemporaines La croissance économique inclusive Les modalités de transmission des inégalités à la croissance

- **Repenser la croissance ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Expliquer les limites de la croissance économique. ***- Identifier les enjeux d'une croissance soutenable.*** ***- Analyser les modèles économiques alternatifs à la croissance économique.***	L'état stationnaire Le capital naturel, les biens premiers et les capabilités La transition écologique La croissance verte La finance responsable La décroissance L'économie sociale et solidaire, L''économie collaborative L'économie de la fonctionnalité Les limites des modèles économiques alternatifs à la croissance économique

THÈME 4 : OUVERTURE INTERNATIONALE DES ÉCONOMIES

- **Pourquoi les économies font elles le choix de s'ouvrir ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Analyser les principales évolutions contemporaines du commerce européen et mondial. ***- Expliquer le choix de l'ouverture aux échanges de biens et de services.*** ***- Justifier la régulation du commerce international.***	Les indicateurs de l'intégration commerciale des nations La structure du commerce mondial Les échanges inter branches et intra branches Les fondements du libre-échange Les EMN, les IDE et les chaînes de valeur mondiales La dynamique du marché européen L'OMC et les principes du multilatéralisme Le régionalisme

- **Quelles sont les principales controverses relatives à l'ouverture internationale des économies ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Présenter les effets de l'ouverture du commerce international sur les inégalités et l'environnement. ***- Analyser les enjeux de la globalisation financière.*** ***- Discuter des avantages et des contraintes de l'appartenance à la zone euro.***	Les inégalités internes Les effets de l'ouverture du commerce international sur : - le système productif et sur l'emploi - les effets sur le bien être - les effets de composition d'échelle et de progrès technique La globalisation financière La stabilité financière Risque systémique Les crises financières (à l'exclusion des crises de changes) La zone monétaire optimale Zone euro : avantages, modalités de gouvernance, politique monétaire unique, l'encadrement des politiques budgétaires

- **Comment l'Etat cherche-t-il à adapter son économie au contexte de l'ouverture internationale ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Présenter la nature et les effets des politiques commerciales nationales. ***- Étudier les politiques industrielles et de compétitivité nationales.*** ***- Analyser les enjeux des politiques d'attractivité du territoire.***	Les politiques tarifaires et non tarifaires Protectionnisme : justifications et effets La politique industrielle La politique de compétitivité La politique d'attractivité du territoire La politique de concurrence La stratégie européenne de compétitivité

THÈME 5 : LA RÉGULATION PUBLIQUE DES QUESTIONS ÉCONOMIQUES, SOCIALES ET ENVIRONNEMENTALES

- **Pourquoi mettre en œuvre des actions de régulation macroéconomique par des politiques économiques ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Distinguer les principaux déséquilibres macro-économiques. ***- Identifier les principales formes de la politique économique.*** ***- Analyser la place de l'État face à la question des biens publics globaux.***	L'inflation/déflation Le chômage Le déséquilibre extérieur Les politiques économiques : typologie, objectifs et instruments La typologie des biens publics mondiaux

- **Quelles régulations face aux problèmes économiques ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Analyser les fondements et les contraintes de la politique budgétaire. ***- Identifier les caractéristiques d'une fiscalité efficace dans une économie globalisée.*** ***- Analyser les fondements et les contraintes de la politique monétaire des banques centrales.*** ***- Expliquer le besoin de coopération interétatique en matière de politiques économiques.***	Les stabilisateurs automatiques de la politique budgétaire Les multiplicateurs de la politique budgétaire La soutenabilité des finances publiques La crédibilité de la politique budgétaire La fiscalité optimale, la fiscalité incitative La concurrence fiscale La coopération fiscale internationale L'indépendance des banques centrales Les politiques monétaires conventionnelles et non-conventionnelles L'efficacité du policy mix Les organes et institutions régionales et internationales

- **Quelles politiques face aux problèmes d'emploi et de chômage ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Analyser les déséquilibres sur le marché du travail. ***- Expliquer les causes des déséquilibres sur le marché du travail.*** ***- Discuter l'efficacité des politiques de l'emploi.***	Le chômage : mesure et formes L'emploi : taux d'emploi, taux d'activité La rigidité du marché du travail et des salaires Le dualisme du marché du travail Les politiques actives et passives de l'emploi Les politiques d'action sur la demande et l'offre de travail La flexibilité et sécurité sur le marché du travail

- **Quelles politiques face aux risques sociaux, aux inégalités économiques et aux défis environnementaux ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Analyser la protection sociale. ***- Identifier les principales politiques sociales de lutte contre les inégalités économiques et la pauvreté.*** ***- Présenter les politiques de l'environnement.***	Les politiques de redistribution Les politiques sociales La protection sociale : logiques d'assurance, d'assistance, de protection universelle Les effets de la mondialisation sur l'environnement La politique environnementale : principes généraux et instruments de la politique environnementale

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie technologique
ECT

Annexe 3
Programmes de management et sciences de gestion

1ère et 2nde années

Programme de Management et Sciences de gestion (classe ECT)

Le programme de « management et sciences de gestion » en classe préparatoire aux grandes écoles voie économie et commerciale option technologique (CPGE ECT) intègre des savoirs et démarches disciplinaires que les étudiants ont abordés au cours du cycle terminal du lycée en série Sciences et Technologies du Management et de la Gestion (STMG)[1]. Il constitue une étape d'un parcours de formation au terme duquel les étudiants prétendent à l'obtention d'un master en école de management ou à l'université. L'enseignement de « management et sciences de gestion » place délibérément les étudiants en position d'analyser des situations organisationnelles complexes ; ils sont conduits à étudier la pertinence des solutions mises en œuvre pour répondre à des problématiques de gestion repérées. Cet enseignement répond à une double exigence, de consolidation et d'approfondissement des savoirs de sciences de gestion mais également de développement de capacités de réflexion, d'analyse et d'argumentation. Dans cette perspective, le recours à des éléments théoriques permet d'éclairer et d'enrichir les analyses conduites.

Cet enseignement s'intéresse à l'entreprise à la fois comme un tout, au sens où les stratégies retenues l'engagent dans des axes de développement globaux, mais aussi comme un système complexe conduisant à réaliser des compromis selon les situations ou les parties prenantes considérées. La confrontation de différents angles d'analyse doit permettre aux étudiants de porter un regard réflexif sur les choix stratégiques et sur les enjeux, la portée, la cohérence des choix de gestion retenus au regard des spécificités du contexte d'étude.

L'enseignement de « management et sciences de gestion » en CPGE ECT intègre nécessairement les évolutions actuelles qui déterminent le cadre stratégique contingent auquel les entreprises sont confrontées et constituent des sources d'opportunités qu'elles peuvent saisir : nouvelles attentes exprimées par les parties prenantes, différentes dimensions de la performance, exigences éthiques et de développement durable, digitalisation de plus en plus avancée des activités ou encore élaboration et mise en œuvre de nouveaux modèles économiques (« business model »). L'enseignement de « management et sciences de gestion » intègre également une perspective temporelle qui s'appuie à la fois sur des éléments historiques de l'entreprise et sur la nécessité de s'adapter à des contraintes liées au temps pour assurer sa pérennité et son développement. En outre, il intègre aussi une perspective interculturelle en lien avec l'internationalisation des processus et la mondialisation de l'environnement.

C'est à l'intérieur de ce cadre d'analyse que le programme de « management et sciences de gestion » doit permettre aux étudiants de développer progressivement des capacités transversales, auxquelles chacun des thèmes contribue :

- analyser l'entreprise et ses différents processus dans leur complexité (attentes des parties prenantes, interdépendance entre les fonctions, prise en compte des facteurs de contingence, spécificité des types d'activité : BtoB, BtoC, CtoC, …) ;
- analyser les apports et les conséquences de la digitalisation de l'entreprise sur sa stratégie et sa mise en œuvre, y compris sur le plan technologique ;
- analyser les déterminants de la prise de décision des managers, les dilemmes, les arbitrages, auxquels ils sont confrontés ;

[1] Première STMG, en management ainsi qu'en sciences de gestion et numérique et, en classe de terminale STMG, en management, sciences de gestion et numérique (enseignement commun et enseignements spécifiques : gestion et finance, mercatique (marketing), ressources humaines et communication, systèmes d'information de gestion).

- étudier les enjeux, les modalités et les conséquences de la prise en compte des intérêts des différentes parties prenantes de l'entreprise, y compris sur les plans éthique et responsable ;
- intégrer les contraintes et les dynamiques temporelles à l'œuvre au sein de l'entreprise et dans son environnement ;
- appréhender l'entreprise dans une dimension internationale, globale et interculturelle;
- articuler entre elles les différentes dimensions de la performance.

Le programme ne constitue pas une progression et il ne doit pas être abordé de manière séquentielle. En effet, l'analyse de situations d'entreprise complexes nécessite la mobilisation d'éléments issus de différents thèmes. Il est donc essentiel d'envisager ce programme en valorisant les liens entre les thèmes afin de développer les capacités transversales. Il est attendu des étudiants qu'ils puissent analyser des situations d'entreprise existantes à partir de données réelles. Il est fortement suggéré d'expliciter, d'analyser les arbitrages à effectuer, les tensions à résoudre entre différents éléments de la prise de décision. Les notions à mobiliser sont évoquées comme autant de balises ou d'arguments permettant de structurer l'étude de ces situations. Le niveau analytique peut également être renforcé par le recours à des documents de nature théorique ouvrant la réflexion des étudiants sur des enjeux organisationnels auxquels les décideurs sont confrontés, ou sur des compromis à trouver.

Le programme est structuré en 6 thèmes :
Thème 1 – Analyse du contexte stratégique
Thème 2 –Système d'information et décision
Thème 3 – Organisation et coordination des activités
Thème 4 – Analyse de la performance et des équilibres financiers
Thème 5 – Mobilisation des ressources humaines
Thème 6 – Élaboration et valorisation de l'offre

Thème 1 – Analyse du contexte stratégique

Quels que soient les secteurs d'activité considérés ou leur degré de maturité, la définition et la mise en œuvre des orientations stratégiques d'une entreprise prennent appui sur l'analyse de son environnement ainsi que sur celle de ses ressources et de leur combinaison. Dans cette perspective, les étudiants doivent être capables d'étudier le cadre stratégique d'une entreprise, en relation avec ses différentes missions, finalités et objectifs, à partir des outils usuels du diagnostic stratégique. Selon la logique entrepreneuriale ou managériale sous-jacente, ils doivent être également en mesure de positionner l'entreprise au sein de son réseau de parties prenantes[2]. Les étudiants doivent être enfin en capacité d'apprécier les relations de l'entreprise avec son écosystème, c'est-à-dire l'ensemble des acteurs intervenant, à des degrés divers, dans le processus de création de valeur mis en œuvre.

L'analyse du cadre stratégique permet de justifier les stratégies définies et mises en œuvre ainsi que les choix de gestion. Dès lors, il est attendu des étudiants qu'ils soient en mesure d'apprécier la pertinence des décisions stratégiques prises au niveau global (ou niveau « corporate ») et par domaine d'activités stratégiques (ou niveau « business ») et, quand cela est possible, celle de leurs évolutions successives. Pour ce faire, ils pourront, à titre d'exemples, s'intéresser à la capacité de l'entreprise à atteindre un niveau de performance (globale) suffisant pour assurer sa pérennité et son développement, à transformer les ressources et les compétences détenues en offre dont la valeur peut être perçue comme supérieure à celle de ses concurrents, à obtenir des avantages concurrentiels soutenables et durables, etc.

L'approche par les modèles économiques (ou « business models ») traduit la logique globale par laquelle une entreprise crée et capte de la valeur, en identifiant les différentes sources possibles de performance permettant d'assurer une meilleure prise en charge de la complexité de l'environnement. Elle constitue à la fois un outil de compréhension du fonctionnement d'une entreprise et un outil de créativité en produisant de nouvelles idées génératrices de valeur concernant l'offre, l'organisation de l'entreprise, les modalités de gestion de sa chaîne de valeur ou son insertion dans l'environnement. Dans cette perspective, les étudiants doivent être en mesure d'apprécier, dans le temps, la cohérence entre les choix stratégiques retenus et le modèle économique, classique ou innovant, implicitement ou explicitement, mis en œuvre.

Ce thème est organisé autour de quatre capacités, articulées selon un niveau de difficulté croissant d'analyse et d'argumentation. Il permet d'envisager l'étude du contexte et des choix stratégiques à partir de plusieurs entrées : l'étude des opportunités et des menaces de l'environnement, l'étude des ressources et des compétences détenues ou à développer, les décisions de nature stratégiques, la définition et la mise en œuvre du modèle économique de l'entreprise. Il est attendu des étudiants qu'ils puissent analyser la cohérence entre les décisions de niveau stratégique et toutes les autres décisions.

Capacités	Notions
Repérer les éléments de base d'analyse du cadre stratégique de l'entreprise	Finalités, missions, objectifs, responsabilité sociétale de l'entreprise Domaines d'activités stratégiques Ressources, compétences Chaîne de valeur, création de valeur, captation de valeur

[2] Selon l'approche développée par Freeman.

	Macro-environnement / Micro-environnement Parties prenantes Logique entrepreneuriale et logique managériale
Évaluer la place et le potentiel de développement de l'entreprise sur son/ses marché(s)	Potentiel stratégique des ressources et compétences Position concurrentielle Facteurs clés de succès (FCS) Avantage(s) concurrentiel(s) Synergies Portefeuille d'activités stratégiques
Analyser la dynamique et la pertinence des choix stratégiques des entreprises	Stratégie globale (spécialisation, diversification, recentrage) Stratégie de domaine (stratégie de domination, de différenciation et de focalisation) Stratégie d'internationalisation Modalités de développement et d'internationalisation (croissance interne, croissance externe, croissance conjointe, etc.) Frontières de l'entreprise (intégration, externalisation) et écosystèmes d'affaires Innovation
Analyser la cohérence du modèle économique avec les orientations stratégiques de l'entreprise	Caractéristiques d'un modèle économique (*par exemple l'offre faite aux clients, les clients, l'organisation interne, la structure des coûts, les sources de revenus*) Modèles économiques (traditionnel, low-cost, freemium, plateforme, …)

Thème 2 –Système d'information et décision

Compte tenu de l'évolution et de l'instabilité de l'environnement, l'entreprise doit développer des capacités d'adaptation. Elle devient alors ouverte, intégrée à son écosystème et collabore avec ses partenaires pour structurer sa chaîne de valeur et se transformer. Pour cela, elle a besoin d'informations afin d'améliorer la connaissance de son environnement. Dans ce contexte, la numérisation[3] peut constituer un levier de reconfiguration des processus. Elle contribue à faciliter la communication, à améliorer la coordination, à diffuser la connaissance. Les étudiants doivent être capables d'analyser le rôle des informations pour une entreprise et de présenter les différentes fonctionnalités d'un système d'information (collecte, stockage, analyse et diffusion des informations), d'en repérer les différentes composantes, d'identifier sa contribution au fonctionnement de l'entreprise. Ils doivent également être en capacité de distinguer et d'analyser les différents processus mis en œuvre et, plus généralement, la façon avec laquelle le système d'information (SI) structure l'organisation de l'entreprise et prend en charge la diffusion ainsi que le partage des informations entre les acteurs.

Les informations participent également au processus de prise de décision. Elles le facilitent ou l'enrichissent en même temps que leur nombre, en constante augmentation, est susceptible de le complexifier. C'est dans ce cadre que les étudiants doivent être capables d'analyser les enjeux de la décision, notamment en termes de rationalité, de risque ou encore d'automatisation de la décision.

Si la digitalisation des processus favorise un fonctionnement cohérent de l'organisation, affecte la culture d'entreprise et facilite la prise de décision, elle reste soumise à des contraintes et peut être une source de vulnérabilités devant être prises en compte. Les étudiants doivent mettre en évidence les opportunités et les risques associés.

Le système d'information et les décisions stratégiques sont liés. Les étudiants doivent être en mesure d'analyser ces interactions notamment en termes d'alignement stratégique, de gouvernance ou encore de besoins en information, de mise en œuvre des procédures de contrôle et d'évaluation. Ils doivent également être capables d'analyser comment le système d'information devient fondement d'innovations organisationnelles et comment la digitalisation de l'entreprise peut transformer la chaine de valeur, l'expérience client et les pratiques de fidélisation tout en modifiant à la fois les compétences, les métiers et les parcours professionnels.

L'étude du système d'information permet de présenter la grande diversité de ses usages. Les services rendus par le système d'information aux différents métiers de l'entreprise sont étudiés (par exemple : système d'information marketing, système d'information des ressources humaines, système d'information comptable) en mobilisant les autres thèmes du programme.

Capacités	Notions
Présenter les composantes du système d'information	Données, informations, qualités de l'information Source des données, réseaux sociaux Sources d'informations, traces numériques Système d'information / système informatique Dimensions humaine, technologique et organisationnelle Base de données, droits d'accès Modélisation d'un processus organisationnel *(indications complémentaires : il est recommandé d'utiliser le modèle*

[3] Le terme numérique se rapporte ici à la fois aux technologies et aux processus qui les mobilisent.

	évènement résultats avec acteur et le schéma de processus). Progiciel de gestion intégré / Workflow
Présenter les rôles du système d'information	Coordination / Outils collaboratifs (Réseau social d'entreprise…) Veille, Mémorisation / Intelligence collective Communication interne et externe Régulation / Contrôle / Indicateurs / Tableaux de bord Aide à la décision Gestion des connaissances / Communautés de pratiques
Présenter les enjeux de la prise de décision	Décision / types de décision Processus de décision et contraintes Rationalité, biais cognitifs Risque / incertitude Intelligence artificielle / Intelligence décisionnelle Big Data Intérêt et attentes des parties prenantes
Présenter les enjeux de la digitalisation des processus	Digitalisation des processus Risques informatiques / risques pour les individus Sécurité du système d'information Cybersécurité Utilisation et protection des données personnelles et stratégiques / RGPD Transformation humaine et culturelle (nature des emplois, appropriation des outils, freins culturels, …)
Analyser les interactions entre le système d'information et l'action stratégique	Gouvernance des systèmes d'information Alignement stratégique

Thème 3 – Organisation et coordination des activités

Au regard des attentes, de l'incertitude et de l'instabilité croissantes de l'environnement, l'organisation, la coordination et le contrôle des activités contribuent directement à la performance des entreprises tout en étant un élément clé du développement de nouveaux modèles économiques. Les étudiants doivent être en capacité d'analyser la relation d'influence réciproque entre structure et stratégie.

En outre, la coordination des processus internes à l'organisation ou impliquant des partenaires répond à des exigences multiples dont la prise en compte simultanée renforce la capacité concurrentielle des entreprises en même temps qu'elle permet de satisfaire les intérêts des différentes parties prenantes. Il s'agit, tout à la fois, de maîtriser les coûts (coûts d'approvisionnement, coût de production, etc), d'assurer un niveau élevé de qualité de produit et de service ainsi que de satisfaction des clients (renouvellement de l'offre, délai de mise sur le marché, délai de livraison, etc), d'adapter la production ou encore de respecter les principes du développement durable (traçabilité, recyclage, etc). Dans un contexte où les technologies actuelles permettent d'optimiser et d'automatiser les processus, les étudiants doivent être capables d'analyser les enjeux et les modalités de l'organisation des activités requises pour amener au consommateur un produit ou un service depuis sa conception jusqu'à sa distribution.

Dans ce cadre, les étudiants doivent être en capacité, pour chacun des acteurs sollicités (producteurs, sous-traitants, prestataires, distributeurs, etc) d'analyser la valeur ainsi créée en comparant la satisfaction des utilisateurs vis-à-vis du produit ou du service avec les coûts engagés pour mettre en place les ressources qui assurent cette satisfaction. Dans une logique de contrôle et pour favoriser la prise de décision, les étudiants doivent également être en mesure d'analyser les écarts entre les coûts prévisionnels et les coûts réalisés. De manière générale, ils doivent être capables de mesurer le risque d'exploitation d'une entreprise en fonction des spécificités et de l'évolution de son cadre stratégique.

Capacités	Notions
Caractériser la structure de l'entreprise et étudier sa pertinence	Modes et degrés de spécialisation Centralisation / décentralisation Formalisation Mécanismes de coordination Nouvelles formes structurelles : organisation par processus, structure par projet, structure en réseau *(indications complémentaires : seules les composantes de la structure sont présentées sans entrer dans le détail des différentes configurations structurelles*).
Analyser l'organisation de la chaîne de valeur et ses enjeux	Activités principales / activités de soutien Processus de production Gestion de la chaîne logistique Externalisation / intégration / entreprise étendue Coopération / coopétition Productivité / flexibilité Efficience / efficacité
Analyser la valeur et contrôler le processus de création de valeur	Arbitrage coût / qualité / délai Lean management Structure de coût (fixes / variables, directs / indirects, moyen / marginal) Calcul de coûts partiels

	Calcul des coûts complets à partir des méthodes des centres d'analyse et à base d'activités *(indications complémentaires : la prise en compte des prestations croisées ainsi que la valorisation des stocks sont exclues du calcul des coûts complets).* Calcul des coûts spécifiques Contrôle des coûts et calcul des écarts de coût prévisionnel / réalisé *(indications complémentaires : la décomposition des écarts se limite aux écarts sur prix et écarts sur quantité)*
Évaluer le risque d'exploitation (ou opérationnel)	Seuil de rentabilité Marge et indice de sécurité Levier d'exploitation

Thème 4 – Analyse de la performance et des équilibres financiers

La turbulence de l'environnement rend fondamentaux le rôle et les qualités de l'information et notamment de l'information comptable et financière, qui favorise l'efficience du système de gestion de l'entreprise et la prise de décision. Les étudiants doivent alors être capables d'identifier et analyser avec pertinence l'information permettant de justifier, étayer et rationaliser les décisions prises dans le contexte proposé.

La gestion de l'entreprise doit aussi prendre en compte les attentes des différentes parties prenantes, qui requièrent des informations afin d'apporter un éclairage en matière de décision, en matière d'investissement (prêteurs/actionnaires), d'achat/vente (clients/fournisseurs), ou encore pour améliorer son attractivité (collaborateurs). Pour mieux les satisfaire et les fidéliser, l'entreprise se doit de répartir sa valeur ajoutée entre ces différentes parties prenantes. Dès lors, de nombreux enjeux et compromis apparaissent. Les étudiants doivent alors être capables d'évaluer cette répartition, de mesurer la performance de l'entreprise et de justifier les choix effectués.

La gestion financière a notamment pour objet l'étude des ressources financières et de leur emploi. Aussi, l'enjeu pour l'entreprise tient dans la mesure de la nature du risque lié à l'équilibre financier et à sa capacité à faire face à ses échéances. Dans ce cadre, les étudiants doivent être capables d'analyser le compte de résultat et le bilan en cohérence avec le contexte, grâce à des indicateurs et ratios pertinents et d'examiner l'évolution de l'activité et des performances réalisées, y compris par des comparaisons avec celles du secteur.

Les informations comptables et financières apportent un éclairage nécessaire en matière de décisions d'investissement et de financement. Cet éclairage est d'autant plus fondamental qu'il existe des biais informationnels entre les emprunteurs et les prêteurs, des risques financiers émanant, soit de la gestion de l'entreprise, soit de l'environnement. Les étudiants devront donc être capables d'analyser des décisions en matière d'investissement ou de financement et de justifier ces choix au regard du contexte stratégique proposé.

Capacités	Notions
Repérer les éléments d'information comptable	Système d'information comptable Documents de synthèse (*indications complémentaires : limiter au bilan et compte de résultat*) Communication financière
Analyser la performance économique et la rentabilité	Indicateurs de performance liés à l'activité : soldes intermédiaires de gestion (SIG), capacité d'autofinancement (CAF), ratios Rentabilité économique et rentabilité financière Analyse de la répartition de la valeur ajoutée
Analyser les équilibres financiers	Bilan fonctionnel (*indications complémentaires : l'étude du tableau de financement est exclue*) FRNG, BFRE et BFRHE et Trésorerie nette Ratios de structure et de rotation (*indications complémentaires : les formules de calcul des ratios sont fournies)* Déterminants de la variation de la trésorerie (*indications complémentaires : le calcul de l'ETE et son analyse sont exclus)*

Analyser les choix d'investissement	Choix d'investissement Flux nets de trésorerie (*indications complémentaires : le calcul des FNT peut être demandé*) Rentabilité économique d'un investissement (VAN, TRI, DRCI) (*indications complémentaires : les calculs du TRI et du DRCI sont uniquement effectués par la méthode de l'interpolation linéaire avec bornes*) Taux d'actualisation (*indications complémentaires : on analysera ses déterminants et ses conséquences*)
Analyser les choix de financement	Moyens de financement de l'entreprise *(indications complémentaires : l'étude des nouveaux moyens de financement est intégrée*) Choix de financement Effet de levier

Thème 5 – Mobilisation des ressources humaines

La gestion des ressources humaines permet non seulement la mise en œuvre des choix stratégiques mais en détermine également la faisabilité voire l'émergence. Elle joue un rôle central dans la mise à disposition et le développement de ressources humaines, la construction d'actions collectives, la coordination mais aussi dans la mise en œuvre de la responsabilité sociétale des entreprises ou la construction de la marque employeur. À ce titre, les étudiants doivent être capables d'en identifier les enjeux comme condition essentielle de la compétitivité et de la pérennité des entreprises.

La gestion des ressources humaines cherche à attirer, à valoriser, à développer et à fidéliser les compétences dans un contexte stratégique, organisationnel, réglementaire et technologique évolutif. Les nouvelles formes d'emploi, les évolutions en matière de formation professionnelle, les problématiques actuelles autour de la diversité, de l'inclusion ou du télétravail figurent parmi les enjeux essentiels à prendre en compte. Sur la base d'un diagnostic mobilisant le calcul et le choix d'indicateurs pertinents, les étudiants doivent être en mesure d'analyser les leviers d'action disponibles pour favoriser l'adéquation entre ressources et besoins.

La mobilisation des ressources humaines conduit à agir non seulement sur l'individu mais également sur le collectif. Les étudiants doivent être capables d'analyser la pertinence et la cohérence des dispositifs destinés à susciter la motivation et l'engagement des individus au travail et d'en mesurer les effets (performance, bien-être, mais aussi développement des risques psychosociaux). L'étude de la dimension collective doit leur permettre d'évaluer l'importance du climat social, des compromis à réaliser et d'envisager les moyens d'action possibles pour fédérer les acteurs.

La digitalisation des processus, abordée dans le thème 2 du programme, a non seulement des conséquences sur la nature du travail, mais concerne également spécifiquement la fonction ressources humaines. Les étudiants doivent pouvoir décrire les modalités de la digitalisation de l'activité et de la fonction RH et en analyser les conséquences, tant sur l'individu que sur l'organisation.

Les dispositifs mis en œuvre pour mobiliser les ressources humaines et les outils et modes d'action qui les accompagnent posent enfin des questions éthiques dont les étudiants doivent prendre conscience.

Il est attendu des étudiants qu'ils soient en mesure de mettre en évidence l'interdépendance entre la fonction ressources humaines et les autres domaines du management, en particulier la stratégie, la structure de coût, le système d'information (apports et conséquences des Big Data et de l'intelligence artificielle, des progiciels de gestion intégrés…) ou encore l'analyse de la performance économique (productivité du travail, masse salariale…). La mise en évidence des transversalités avec l'enseignement de droit est également souhaitable.

Capacités	Notions
Présenter les enjeux stratégiques de la gestion des ressources humaines (GRH).	Responsabilité sociétale des entreprises Culture d'entreprise Marque employeur, marketing RH Compétences (valorisation, développement)
Construire et interpréter les éléments d'un diagnostic RH	Indicateurs RH Bilan social, tableau de bord social Masse salariale et déterminants de son évolution *(Indications complémentaires : les calculs liés à la*

	masse salariale restent élémentaires et excluent le traitement des effets de structure, d'effectif…) Climat social Risques psychosociaux (stress, burnout, harcèlement…)
Repérer et analyser les leviers d'actions pour favoriser l'adéquation entre besoins et ressources humaines	Gestion prévisionnelle des emplois et des compétences (GPEC) Modes de recrutement Diversité, inclusion Intégration Formation professionnelle (enjeux, obligations) Employabilité Mobilité professionnelle, gestion des carrières Nouvelles formes d'emploi / ubérisation *(Indications complémentaires : la conception et l'étude d'outils tels que les profils de poste sont donc exclues).*
Analyser les outils de GRH pour agir sur l'individu au travail	Motivation, satisfaction, bien-être, engagement organisationnel Fidélisation, expérience collaborateur Politique de rémunération Conditions de travail Promotion Enjeux de l'évaluation « empowerment »
Analyser les moyens d'agir sur le collectif	Styles de management Dialogue social, négociation collective, gestion des conflits Communication interne / gestion du changement Management interculturel
Analyser la digitalisation de l'activité et de la gestion des ressources humaines ainsi que leurs conséquences	Réorganisation des processus e-learning, e-recrutement Travail coopératif (et ses dispositifs numériques) Action collective, communauté de pratiques, coordination Télétravail SIRH

Thème 6 – Élaboration et valorisation de l'offre

L'analyse du marché porte sur l'offre (produits, offreurs, réseaux de distribution…) et la demande. Elle est essentielle pour permettre à l'entreprise de développer une proposition adaptée aux évolutions du marché et de créer de la valeur. Elle s'appuie sur des résultats d'études, qu'il s'agit d'interpréter, de synthétiser et de relier à une problématique managériale.

La multiplication des applications Internet et mobiles connectées et la collecte massive des données (Big Data) créent et installent de nouveaux comportements et usages chez les clients, que cela soit en BtoB, BtoC, CtoC. Dans ce contexte, également marqué par l'affirmation d'un consommateur multifacettes, à la fois émotionnel et rationnel, les étudiants doivent être en mesure d'analyser la demande, dans ses aspects quantitatifs (structure, évolution, prévision) et qualitatifs (besoins, motivations, freins, attitudes, processus d'achat…).

Les entreprises, tout à la fois, s'adaptent à ces nouveaux comportements, les initient ou les renforcent, modifient en profondeur, en cohérence avec les orientations stratégiques retenues et leur modèle économique, le rapport qu'elles entretiennent avec leurs clients. Cela renvoie tout d'abord à la façon avec laquelle elles définissent, communiquent ou commercialisent leur offre (personnalisation, expérience client, commerce phygital, …). Cela concerne ensuite la place et le rôle que les clients occupent dans l'élaboration de cette offre (réseaux sociaux, « empowerment », co-production). Dans un contexte d'affirmation et de développement d'un marketing à la fois relationnel, collaboratif, expérientiel et communautaire, marqué par une logique basée fondée non plus seulement sur le service au client mais sur la solution apportée (« Service dominant logic, co-création»), les étudiants doivent être capables de distinguer et de comprendre le lien entre le marketing stratégique (segmentation / ciblage / positionnement) et le marketing opérationnel (le plan de marchéage) ainsi que la pertinence et la cohérence des choix retenus pour chaque variable du mix (produit, prix, communication et distribution).

Enfin, les évolutions du comportement des clients d'une part, de l'élaboration et de la valorisation de l'offre d'autre part, conduisent à penser différemment la performance commerciale autour des notions de satisfaction, de confiance, de fidélité, d'attachement et d'engagement. Les étudiants doivent être en capacité de présenter les (nouveaux) enjeux de la gestion de la relation client et ses modalités de mise en œuvre sur les plans humain (rôle des vendeurs) et technologique (système d'information marketing, analyse des données, …).

Il est attendu des étudiants qu'ils soient en mesure de situer la position et le rôle des activités commerciales au sein de la chaîne de valeur, d'apprécier sa contribution à la création de valeur ou d'analyser la cohérence du marketing stratégique et du marketing mix avec la stratégie de domaine et le modèle économique de l'entreprise. Ils doivent également être capables d'identifier, sur le plan des ressources humaines, la nécessaire évolution des compétences des équipes commerciales pour accompagner la digitalisation de la relation client ainsi que le rôle et la contribution du système d'information marketing (SIM) dans sa mise en œuvre. Les étudiants doivent pouvoir mesurer la performance des actions marketing menées au regard d'indicateurs pertinents, synthétisés dans des tableaux de bord stratégiques ou opérationnels.

Capacités	Notions
Analyser le comportement des clients sur les plans quantitatif et qualitatif	Caractéristiques du marché, segments de clientèle Clients / utilisateurs / prescripteurs Prospects Demande effective / demande potentielle Demande dérivée (B to B to C) Étude de marché Prévision / saisonnalité des ventes Déterminants du comportement des clients
Caractériser les éléments du marketing stratégique	Stratégie(s) de segmentation du marché– ciblage (marketing de masse, indifférencié, différencié, concentré, individualisé) Positionnement (attributs déterminants, différenciants et saillants) Positionnement voulu / perçu / vécu
Analyser les différentes composantes de la politique de produit	Offre globale Cycle de vie Gamme Normes et labels Marque Conditionnement Expérience d'achat on et off-line
Étudier les objectifs et la complexité de la politique de prix	Déterminants de la fixation du prix : coûts, demande, concurrence Sensibilité au prix Politiques d'écrémage, de pénétration, d'alignement Modulation(s) du prix, Yield management Modèle(s) de gratuité
Analyser et évaluer la politique de communication commerciale	Cible(s), objectif(s), message(s) Communication media, hors-media Typologie de medias (paid, owned, earned) Indicateurs d'efficacité : audience (totale, utile), coût, rentabilité,….
Analyser la spécificité et la cohérence de la politique de distribution des producteurs et/ou des distributeurs	Type de canal (canal direct, court, long) Type de distribution (intégrée, intensive, sélective, exclusive) Forme du réseau (intégré, associé, mixte) Formats de vente Distribution multi-canal, cross-canal, omni-canal Dépendance / coopération producteurs et distributeurs
Présenter les enjeux de la gestion de la relation – client (GRC)	Analyse des données (datamining, marketing prédictif) Digitalisation de la relation client Satisfaction, confiance, fidélité, engagement, attachement Attrition, fidélisation, valeur à vie d'un client Rôle(s) du vendeur

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie technologique
ECT

Annexe 4
Programme de lettres et philosophie

1ère et 2nde années

CPGE économiques et commerciales
Programme « Lettres et Philosophie »

Objectifs de formation

Commun à l'ensemble des classes préparatoires économiques et commerciales, cet enseignement, qui implique à part égale les Lettres et la Philosophie, est partie constituante de la formation générale des étudiants.
Sa finalité est de former les élèves à une réflexion autonome et éclairée, par la lecture ample et directe d'œuvres de littérature et de philosophie, par l'étude des arts et des techniques, et par la pratique régulière de travaux écrits et oraux. Les étudiants développent ainsi leurs capacités à s'interroger, à conduire une pensée cohérente et à tirer profit avec finesse et pertinence de leurs connaissances.

L'enseignement « Lettres et Philosophie » a trois objectifs majeurs :

1. il permet aux élèves d'enrichir leur culture et de mieux comprendre le monde dans lequel ils vivent ;
2. il les entraîne à développer leur réflexion personnelle, ainsi qu'à aiguiser leur sens critique ;
3. il vise à développer la maîtrise de l'expression écrite et orale ainsi que l'aptitude à communiquer, compétences indispensables pour la future vie professionnelle des étudiants.

Les exercices écrits sont pris en charge collégialement par les deux professeurs de Lettres et de Philosophie.

Programme

Chaque professeur détermine librement et en pleine responsabilité, selon les parcours intellectuels et les choix pédagogiques qui répondent aux besoins des élèves, les œuvres philosophiques, littéraires ou relevant de l'ensemble des arts, dont il juge l'étude nécessaire à son enseignement. Les deux professeurs, de Lettres et de Philosophie, s'accordent pour assurer la cohérence d'ensemble de l'enseignement dispensé.

Première année

Le programme permet d'élargir et d'enrichir les connaissances acquises au cours des études secondaires, et de consolider la culture nécessaire à une réflexion personnelle. Il s'inscrit dans la continuité des enseignements de tronc commun, Lettres ou Philosophie, mais également d'un enseignement de spécialité comme « Humanités, Littérature et Philosophie ».
L'enseignement tient compte des relations qui unissent les notions ou les concepts à leur histoire, aux contextes et résonances à travers lesquels se sont précisés leur usage et leur

sens. On rapporte ainsi l'étude des œuvres littéraires, artistiques ou philosophiques aux représentations mythologiques, religieuses, esthétiques, ainsi qu'à l'histoire des sciences, des arts et des techniques.

Ce programme est constitué des rubriques suivantes :
- l'héritage de la pensée grecque et latine ;
- les apports du judaïsme, du christianisme et de l'islam à la pensée occidentale ;
- les étapes de la constitution des sciences exactes et des sciences de l'homme ;
- l'essor technologique, l'idée de progrès ;
- la société, le droit et l'Etat modernes ;
- les figures du moi et la question du sujet depuis la Renaissance ;
- l'esprit des Lumières et leur destin ;
- quelques grands courants artistiques et esthétiques depuis la Renaissance ;
- les principaux courants de pensée contemporains.

Les rubriques sont abordées selon un parcours que les professeurs de Lettres et de Philosophie déterminent ensemble, en fonction de regroupements et de problématiques dont ils ont l'initiative et la responsabilité.

Seconde année

Etude d'un thème renouvelé chaque année par arrêté conjoint du ministre chargé de l'éducation et du ministre chargé de l'enseignement supérieur.

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie technologique
ECT

Annexe 5
Programmes de langues vivantes étrangères

1ère et 2nde années

Objectifs de formation

L'enseignement des langues vivantes en classes préparatoires économiques et commerciales constitue un volet essentiel de la formation générale. La raison en est claire : les carrières auxquelles se destinent les étudiants des écoles de management ont une dimension internationale et interculturelle.

Dans cette perspective, l'enseignement obligatoire de deux langues vivantes est proposé aux étudiants afin qu'ils acquièrent les compétences linguistiques et les connaissances culturelles nécessaires à leur insertion professionnelle et à leur ouverture au monde.

Les niveaux de compétences ciblés en fin de 2[de] année sont C1 pour la LVA, notamment dans les compétences de réception, et B2-C1 pour la LVB.

L'étude des langues vivantes, dans toutes les classes préparatoires économiques et commerciales, a comme objectifs :

- de consolider et d'approfondir les compétences de l'enseignement du second degré, dans le prolongement des enseignements du cycle terminal (en tronc commun et, le cas échéant, en enseignement de spécialité LLCER), sur le plan linguistique et culturel ;
- de faire travailler la langue en contexte sur la base de supports variés ;
- de faire acquérir aux étudiants un niveau plus élevé de compréhension et d'expression, tant à l'écrit qu'à l'oral ; le développement des compétences orales et oratoires en langue étrangère – prise de parole en continu et en interaction – fait l'objet d'une attention particulière et d'un entraînement régulier ;
- d'assurer la mise en place des repères culturels indispensables à la connaissance de la civilisation et de la culture des pays concernés, de façon à éclairer les réalités économiques, sociales et politiques du monde contemporain ; on proposera, le cas échéant, des thématiques croisées avec d'autres disciplines ;
- d'apprendre à utiliser des ouvrages et des outils de référence, d'approfondir les compétences acquises précédemment pour rechercher, sélectionner et exploiter des documents. Les ressources et outils numériques sont utilisés avec profit ;
- d'entraîner à la traduction de textes variés, à la compréhension fine de documents, et à différents types de production écrite.

Organisation des enseignements

Le premier semestre est conçu pour aider les étudiants, dans leur diversité, à réussir la transition entre le lycée et les études supérieures. Il aura une fonction bien particulière, dont l'objectif essentiel est la prise en charge individualisée et l'homogénéisation du niveau des étudiants, en tenant compte, pour le compenser le cas échéant, de leur historique de formation dans chacune des deux langues étudiées.

Pour cela, les premiers mois devront être axés sur :
- un travail de la langue et sur la langue en contexte ;
- l'accès progressif à une compréhension fine, à l'écrit comme à l'oral ;
- l'acquisition d'une expression maîtrisée et adéquate ;
- l'acquisition d'une méthode adaptée aux différents savoir-faire visés.

Dans le cadre de la liberté pédagogique, le professeur choisit ses méthodes et sa progression. Il organise son enseignement en suivant deux principes directeurs :

a) le professeur choisit le contexte, les problématiques et les méthodes qui favorisent les apprentissages et diversifie les modes d'acquisition des savoirs et des compétences. Il explicite pour les élèves les objectifs poursuivis, les méthodes utilisées et les critères d'évaluation ;

b) le professeur privilégie la mise en activité des étudiants : l'acquisition des connaissances et des capacités est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Ils sont amenés à manipuler la langue, les notions et les concepts en exerçant leur esprit critique. La pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d'initiative et l'autonomie des étudiants.

Nature des classes composant les classes préparatoires scientifiques aux grandes écoles : modification

NOR : ESRS2035763A
arrêté du 5-1-2021 - JO du 7-2-2021
MESRI - DGESIP A1-2

Vu Code de l'éducation, notamment articles D. 612-19 à D. 612-29 ; arrêté du 10-2-1995 modifié ; avis du CSE du 10-12-2020 ; avis du Cneser du 15-12-2020 ; avis de la ministre des Armées du 15-12-2020

Article 1 - Le paragraphe 1 de l'article 1er de l'arrêté du 10 février 1995 susvisé, « Classes préparatoires accessibles aux titulaires du baccalauréat ou d'un titre admis en équivalence ou d'une dispense obtenue en application du premier alinéa de l'article 4 du décret susvisé », est ainsi modifié :
1° Après le quatrième alinéa est inséré l'alinéa suivant :
« classe de mathématiques, physique, ingénierie et informatique (MP2I) » ;
2° Les dixième, onzième et vingt-deuxième alinéas sont supprimés ;
3° Au douzième et au vingt-troisième alinéas, les mots : « , créée à titre transitoire, dans les conditions fixées à l'article 3 ci-dessous. » sont supprimés ;
4° Après le quatorzième alinéa est inséré l'alinéa suivant :
« classe de mathématiques, physique, informatique (MPI) ».
5° Au dix-huitième alinéa, le mot : « quatre » est remplacé par le mot : « cinq ».

Article 2 - Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie.

Article 3 - Les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021-2022 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023 pour les classes de seconde année.
Dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie, les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022 pour les classes de seconde année.

Article 4 - Le directeur général de l'enseignement scolaire, la directrice générale des outre-mer et la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle sont chargés, chacun en ce qui le concerne, de l'exécution du présent arrêté, qui sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait le 5 janvier 2021

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
Édouard Geffray

Pour le ministre des Outre-mer et par délégation,
La directrice générale des outre-mer,
Sophie Brocas

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Pour la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle,
Le chef de service, adjoint de la directrice générale,
Brice Lannaud

Organisation générale des études et les horaires des classes préparatoires scientifiques aux grandes écoles, accessibles aux titulaires d'un baccalauréat ou d'un titre admis en équivalence ou d'une dispense : modification

NOR : ESRS2035767A
arrêté du 5-1-2021 - JO du 7-2-2021
MESRI - DGESIP A1-2

Vu Code de l'éducation, notamment articles D. 612-19 à D. 612-29 ; arrêté du 23-11-1994 modifié, notamment articles 2, 4 et 5 ; arrêtés du 10-2-1995 modifiés ; avis du CSE du 10-12-2020 ; avis du Cneser du 15-12-2020 ; avis de la ministre des Armées du 15-12-2020

Article 1 - À l'article 1er de l'arrêté du 10 février 1995 fixant l'organisation générale des études et les horaires des classes préparatoires scientifiques aux grandes écoles, accessibles aux titulaires d'un baccalauréat ou d'un titre admis en équivalence ou d'une dispense, les mots : « du premier alinéa de l'article 4 du décret susvisé » sont remplacés par les mots : « de l'article D. 612-19 du Code de l'éducation ».

Article 2 - Dans l'intitulé du titre Ier du même arrêté, les mots : « mathématiques, physique, informatique » sont insérés après les mots : « Filières mathématiques et physique, ».

Article 3 - L'article 2 du même arrêté est ainsi modifié :
1° Le premier alinéa est remplacé par les dispositions suivantes :
« Afin de permettre une orientation progressive des étudiants vers les cinq classes de seconde année de mathématiques et physique (MP), mathématiques, physique, informatique (MPI), physique et chimie (PC), physique et sciences de l'ingénieur (PSI), physique et technologie (PT), les enseignements de première année sont respectivement organisés dans le cadre des quatre classes de première année de mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI), mathématiques, physique, ingénierie et informatique (MP2I), physique, chimie et sciences de l'ingénieur (PCSI) et physique, technologie et sciences de l'ingénieur (PTSI). » ;
2° Au troisième alinéa, les mots : « ou à celle de mathématiques, physique, informatique (MPI) ; » sont insérés après les mots : « physique et sciences de l'ingénieur (PSI) » ;
3° Après le troisième alinéa, est inséré un alinéa ainsi rédigé :
« La classe de mathématiques, physique, ingénierie et informatique (MP2I) conduit en seconde année, dans les conditions fixées aux articles 4-1 et 18 ci-dessous, aux classes de mathématiques et physique (MP), mathématiques, physique, informatique (MPI) ou physique et sciences de l'ingénieur (PSI). »

Article 4 - À l'article 3 du même arrêté, les mots : « de mathématiques, physique, ingénierie et informatique (MP2I), » sont insérés après les mots : « mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI), ».

Article 5 - Après l'article 4 du même arrêté, il est inséré un article 4-1 ainsi rédigé :
« Art. 4-1- En deuxième période, la classe de première année de mathématiques, physique, ingénierie et informatique (MP2I) comporte des enseignements communs et des enseignements à option.
« L'affectation des étudiants, dont on a préalablement recueilli les vœux, soit en option sciences informatiques, soit en option sciences industrielles, est effectuée sur décision et après avis des instances compétentes, à l'issue de la première période.
« Elle détermine l'accès des étudiants en classe de seconde année, l'option sciences industrielles conduisant en classe de mathématiques et physique (MP) ou de physique et sciences de l'ingénieur (PSI), et l'option de sciences informatiques en classe de mathématiques, physique, informatique (MPI). »

Article 6 - À l'article 7 du même arrêté :
- le mot : « quatre » est remplacé par le mot : « cinq » ;
- les mots : « de mathématiques, physique, informatique (MPI), » sont insérés après les mots « mathématiques et physique (MP), ».

Article 7 - I - Dans l'intitulé de l'annexe I du même arrêté, les mots : « mathématiques, physique, informatique, » sont insérés après les mots « mathématiques et physique, ». Dans les deux sous-titres de la même annexe, les mots : « "mathématiques, physique, ingénierie et informatique", » sont insérés après les mots : « "mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur", » et les mots : « "mathématiques, physique, informatique", » sont insérés après les mots : « "mathématiques et physique", ».
II - À l'annexe I du même arrêté, les lignes :
« 1re année : classes de "Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur", "Physique, chimie et sciences de l'ingénieur", "Physique, technologie et sciences de l'ingénieur"

Disciplines	**Classes**														
	Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur			Physique, chimie et sciences de l'ingénieur									Physique, technologie et sciences de l'ingénieur		
				Enseignements communs											
1re période	Cours	TD	TP				Cours	TD	TP				Cours	TD	TP
Informatique	1	-	1				1	-	1				1	-	1
Total	23	4	3				22	5,5	6,5				20	8	5,5

»
sont remplacées par les lignes :
« 1re année : classes de "Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur", "Mathématiques, physique, ingénierie et informatique", "Physique, chimie et sciences de l'ingénieur", "Physique, technologie et sciences de l'ingénieur"

Disciplines	**Classes**														
	Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur			Physique, chimie et sciences de l'ingénieur									Physique, technologie et sciences de l'ingénieur		
				Enseignements communs											
1re période	Cours	TD	TP				Cours	TD	TP				Cours	TD	TP
Informatique	-	-	1				-	-	1				-	-	1
Total	22	4	3				21	5,5	6,5				19	8	5,5

»
III - Les deux tableaux de la même annexe sont complétés de l'horaire hebdomadaire de la filière « mathématiques, physique, informatique » (1ère et 2e années), qui figure à l'annexe I du présent arrêté.
IV - Les deux tableaux de l'annexe VIII du même arrêté sont complétés de la durée hebdomadaire des interrogations orales des classes « mathématiques, physique, ingénierie et informatique » et « mathématiques, physique, informatique », qui figure à l'annexe II du présent arrêté.

Article 8 - Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie.

Article 9 - Les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021-2022 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023 pour les classes de seconde année.
Dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie, les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022 pour les classes de seconde année.

Article 10 - Le directeur général de l'enseignement scolaire, la directrice générale des outre-mer et la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle sont chargés, chacun en ce qui le concerne, de l'exécution du présent arrêté, qui sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait le 5 janvier 2021

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
Édouard Geffray

Pour le ministre des Outre-mer et par délégation,
La directrice générale des outre-mer,
Sophie Brocas

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Pour la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle,
Le chef de service, adjoint de la directrice générale,
Brice Lannaud

Annexe 1

↳ *Horaire hebdomadaire de la filière Mathématiques, physique, informatique (1re et 2e années)*

Annexe 2

↳ *Durée hebdomadaire des interrogations orales dans les classes préparatoires scientifiques Mathématiques, physique, ingénierie et informatique et Mathématiques, physique, informatique*

Annexe 1 - Horaire hebdomadaire de la filière Mathématiques, physique, informatique (1re et 2e années)

1re année : classe de Mathématiques, physique, ingénierie et informatique (MP2I)

Disciplines	Classe								
	Mathématiques, physique, ingénierie et informatique								
1ère période (S1)	**Enseignements communs**								
				Cours	**TD**	**TP**			
Mathématiques				10	2	-			
Physique				4	1	1,5			
Sciences informatiques				**2**	1	1			
Sciences industrielles				1	1	-			
Français-philosophie				2	-	-			
Langue vivante étrangère I				2	-	-			
Education physique et sportive				2	-	-			
TOTAL				**23**	**5**	**2,5**			
Langue vivante étrangère II (facultative)				2	-	-			
2e période (S2)	**Option sciences industrielles (1)**			**Enseignements communs**			**Option sciences informatiques (1)**		
	Cours	**TD**	**TP**	**Cours**	**TD**	**TP**	**Cours**	**TD**	**TP**
Mathématiques				10	2	-			
Physique				4	1	1,5			
Chimie	1	-	1						
Sciences informatiques							4	1	1
Informatique	1	-	1						
Sciences industrielles	1	1	2						
Français-philosophie				2	-	-			
Langue vivante étrangère I				2	-	-			
Education physique et sportive				2	-	-			
Travaux d'initiative personnelle encadrés				-	2	-			
TOTAL	**3**	**1**	**4**	**20**	**5**	**1,5**	**4**	**1**	**1**
Langue vivante étrangère II (facultative)				2	-	-			

(1) Les étudiants doivent choisir obligatoirement une option en S2

2e année : classe de Mathématiques, physique, informatique (MPI)

Disciplines	Classe		
	Mathématiques, physique, informatique		
1re période (S3)			
	Cours	**TD**	**TP**
Mathématiques	10	2	-
Physique	5	1	1,5
Chimie			
Sciences informatiques	4	1	1
Français-philosophie	2	-	-
Langue vivante étrangère I	2	-	-
Travaux d'initiative personnelle encadrés	-	2	-
Education physique et sportive	2	-	-
TOTAL	**25**	**6**	**2,5**
Langue vivante étrangère II (facultative)	2	-	-
2e période (S4)			
	Cours	**TD**	**TP**
Mathématiques	10	2	-
Physique	5	1	1,5
Chimie			
Sciences informatiques	4	1	1
Français-philosophie	2	-	-
Langue vivante étrangère I	2	-	-
Travaux d'initiative personnelle encadrés	-	2	-
Education physique et sportive	2	-	-
TOTAL	**25**	**6**	**2,5**
Langue vivante étrangère II (facultative)	2	-	-

Annexe 2 - Durée hebdomadaire des interrogations orales dans les classes préparatoires scientifiques Mathématiques, physique, ingénierie et informatique et Mathématiques, physique, informatique

1re année

Classe Mathématiques, physique, ingénierie et informatique	Interrogations orales				
	Mathématiques	Informatique	Physique	Français-philosophie	Langue vivante étrangère
1re période (S1)	15 mn	5 mn	10 mn	(a)	10 mn
2e période (S2)					
Option sciences industrielles	20 mn	-	10 mn	(a)	10 mn
Option sciences informatiques	15 mn	5 mn	10 mn	(a)	10 mn

(a) Une séance d'interrogation de 30 minutes par trimestre, soit trois séances au total pour l'année

2e année : classe de Mathématiques, physique, informatique (MPI)

Classe Mathématiques, physique, informatique	Interrogations orales				
	Mathématiques	Informatique	Physique	Français-philosophie	Langue vivante étrangère
	15 mn	5 mn	10 mn	(a)	10 mn

(a) Deux séances d'interrogation de 30 minutes réparties sur les deux premiers trimestres

Programme de mathématiques de la classe préparatoire scientifique Mathématiques, physique, ingénierie et informatique (MP2I), et relatif aux programmes de la classe préparatoire scientifique Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI) et au programme de sciences industrielles de l'ingénieur de la classe préparatoire scientifique Mathématiques et physique (MP)

NOR : ESRS2035779A
arrêté du 5-1-2021 - JO du 7-2-2021
MESRI - DGESIP - A1-2

Vu Code de l'éducation, notamment articles D. 612-19 à D. 612-29 ; arrêtés du 10-2-1995 modifiés ; arrêté du 3-7-1995 modifié ; arrêté du 20-6-1996 modifié ; avis du CSE du 10-12-2020 ; avis du Cneser du 15-12-2020 ; avis de la ministre des Armées du 15-12-2020

Article 1 - I. Le programme de première année de mathématiques de la classe préparatoire scientifique Mathématiques, physique, ingénierie et informatique (MP2I) figure à l'annexe 1 du présent arrêté.
II. Les programmes de première année de mathématiques, de physique et de chimie de la classe préparatoire scientifique Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI), figurant respectivement aux annexes I, II et III de l'arrêté du 3 juillet 1995 susvisé, sont remplacés par ceux figurant respectivement aux annexes 1 et 2 du présent arrêté.

Article 2 - Les programmes de première et seconde années de sciences industrielles de l'ingénieur des classes préparatoires scientifiques Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI) et Mathématiques et physique (MP), figurant respectivement à l'annexe IV de l'arrêté du 3 juillet 1995 susvisé et à l'annexe IV de l'arrêté du 20 juin 1996 susvisé, sont remplacés par ceux figurant à l'annexe 3 du présent arrêté.

Article 3 - Les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021-2022 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023 pour les classes de seconde année.

Article 4 - Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie.

Article 5 - Le directeur général de l'enseignement scolaire, la directrice générale des outre-mer et la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle sont chargés, chacun en ce qui le concerne, de l'exécution du présent arrêté, qui sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait le 5 janvier 2021

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
Édouard Geffray

Pour le ministre des Outre-mer et par délégation,
La directrice générale des outre-mer,
Sophie Brocas

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Pour la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle,

Le chef de service, adjoint de la directrice générale,
Brice Lannaud

Annexes

↳ *Annexes 1 à 3*

- Annexe 1 : programmes de mathématiques
- Annexe 2 : programme de physique-chimie
- Annexe 3 : programmes de sciences industrielles de l'ingénieur

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voies Mathématiques, physique, ingénierie et informatique (MP2I) et Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI)

Annexe 1
Programme de mathématiques

Classes préparatoires MPSI et MP2I
Programme de mathématiques

Table des matières

Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires scientifiques MPSI, PCSI, PTSI, MP2I, MP, PC, PSI, PT, MPI sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.

Objectifs de formation

En classe préparatoire scientifique, les mathématiques constituent conjointement une discipline scientifique à part entière, développant des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques, et une discipline fournissant des connaissances et des méthodes nécessaires aux autres disciplines scientifiques.
La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels :

- fournir un solide bagage de connaissances, de concepts et de méthodes ;
- exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé ;
- développer l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur ;
- promouvoir la réflexion personnelle des étudiantes et étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples ; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires scientifiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :

- **chercher**, mettre en œuvre des stratégies : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner**, argumenter : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer**, utiliser le langage symbolique : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

Chercher

Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation, TIPE) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser

Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions

entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension-même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et illustrent certains résultats d'analyse.
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

Architecture et contenu du programme

L'année est découpée en deux semestres. Les contenus du programme peuvent se répartir en trois champs : algèbre, analyse et probabilités. L'algèbre et l'analyse occupent le plus grand volume sur les deux semestres, tandis que les probabilités sont introduites au second semestre. Si la géométrie n'apparaît pas comme un champ autonome, son importance dans la représentation des objets du programme ne saurait être sous-estimée. Ainsi, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour l'étude des nombres complexes, l'algèbre linéaire, les espaces euclidiens, les fonctions d'une variable réelle. Les notions de géométrie affine et euclidienne étudiées au lycée sont reprises dans un cadre plus général.
L'étude de chaque domaine permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, d'établir des liens avec les autres disciplines, et de nourrir les thèmes susceptibles d'être abordés lors des TIPE.

Outre l'étude des nombres complexes, le programme d'algèbre comprend deux volets. Le premier est l'étude de l'arithmétique des entiers relatifs et des polynômes à une indéterminée. Le second, nettement plus volumineux, est consacré aux notions de base de l'algèbre linéaire, pour laquelle un équilibre est réalisé entre les points de vue géométrique et numérique. Il importe de souligner le caractère général des méthodes linéaires, notamment à travers leurs interventions en analyse et en géométrie.

Le programme d'analyse est centré autour des concepts fondamentaux de fonction et de suite. Les interactions entre les aspects discret et continu sont mises en valeur. Le programme d'analyse combine l'étude de problèmes qualitatifs et quantitatifs, il développe conjointement l'étude du comportement global de suite ou de fonction avec celle de leur comportement local ou asymptotique. À ce titre, les méthodes de l'analyse asymptotique font l'objet d'une section spécifique, qui est exploité ultérieurement dans l'étude des séries. Pour l'étude des solutions des équations, le programme allie les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact et les méthodes d'approximation. Enfin, les familles sommables et les fonctions de deux variables préparent au programme de deuxième année.

L'enseignement des probabilités se place dans le cadre des univers finis. Il a vocation à interagir avec le reste du programme. La notion de variable aléatoire permet d'aborder des situations réelles nécessitant une modélisation probabiliste. L'accent mis sur cette notion permet de travailler rapidement avec des événements construits en termes de variables aléatoires.

La pratique de calculs simples permet aux étudiants de s'approprier de manière effective les notions du programme. Le choix a donc été fait d'introduire très tôt un module substantiel visant à consolider les pratiques de calcul (dérivation des fonctions, calcul de primitives, résolution de certains types d'équations différentielles). Les théories sous-jacentes sont étudiées ultérieurement, ce qui doit en faciliter l'assimilation.
Les étudiants doivent savoir mettre en œuvre directement (c'est-à-dire sans recourir à un instrument de calcul), sur des exemples simples, un certain nombre de méthodes de calcul, mais aussi connaître leur cadre d'application et la forme des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

En cohérence avec l'introduction d'un enseignement d'algorithmique au lycée, le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels). Il identifie un certain nombre d'algorithmes qui doivent être connus et pratiqués par les étudiants. Ceux-ci doivent également savoir utiliser les fonctionnalités graphiques des calculatrices et des logiciels.

Le volume global du programme a été conçu pour libérer des temps dédiés à une mise en activité effective des étudiants, quel que soit le contexte proposé (cours, travaux dirigés, TIPE).

Organisation du texte

Le programme définit les objectifs de l'enseignement et décrit les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; il précise aussi certains points de terminologie et certaines notations. Il fixe clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.
À l'intérieur de chaque semestre, le programme est décliné en sections. Chaque section comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. À l'intérieur de chaque semestre, le professeur conduit en toute liberté, dans le respect de la cohérence de la formation globale, l'organisation de son enseignement et le choix de ses méthodes. En particulier, la chronologie retenue dans la présentation des différentes sections de chaque semestre ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression. Cependant, la progression retenue au cours du premier semestre doit respecter les objectifs de l'enseignement dispensé au cours de cette période. Ces objectifs sont détaillés dans le bandeau qui suit le titre « Premier semestre ».
Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

– celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différentes sections ;
– celles qui sont indiquées dans les bandeaux ou dans la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
– celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit en particulier des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme.

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

Afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les autres disciplines scientifiques.

Premier semestre

Le premier semestre vise deux objectifs majeurs.

- Aménager un passage progressif de la classe de terminale à l'enseignement supérieur, en commençant par renforcer et approfondir les connaissances des bacheliers. À ce titre, trois sections jouent un rôle particulier.
  - La section « Raisonnement et vocabulaire ensembliste » regroupe des notions dont la plupart ont été mises en place au lycée. Il s'agit de les consolider et de les structurer afin qu'elles soient maîtrisées par les étudiants à la fin du premier semestre. Cette section n'a pas vocation à être enseignée d'un seul tenant ni en tout début de semestre.
  - Les sections « Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie » et « Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral » sont axées sur les techniques de calcul. La seconde est fondée sur des théorèmes admis à ce stade, mais démontrés plus loin dans le programme. Cette présentation en deux temps, destinée à faciliter les apprentissages, peut être modulée par le professeur.
- Susciter la curiosité et l'intérêt des étudiants en leur présentant un spectre suffisamment large de problématiques et de champs nouveaux.
  - La section « Nombres complexes » permet l'étude algébrique et géométrique de ces nombres. Elle aborde des applications à la trigonométrie ainsi qu'une première approche des équations algébriques.
  - Les sections « Nombres réels et suites numériques » et « Limites, continuité, dérivabilité » fondent l'analyse réelle sur des bases solides.
  - La section « Calcul matriciel et systèmes linéaires » fournit le vocabulaire et les techniques de résolution des systèmes linéaires, et prépare l'algèbre linéaire du second semestre.
  - Par les possibilités qu'elle offre de combiner beaucoup d'idées et de techniques étudiées au cours du premier semestre, la section « Polynômes » constitue un objet d'étude pertinent pour la fin du semestre.

Le professeur organise l'enseignement de la manière qui lui semble la plus profitable, en gardant à l'esprit le fait que la maîtrise rapide des techniques de calcul est un impératif, notamment en vue de l'enseignement de physique-chimie.
Les ensembles de nombres usuels $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sont supposés connus. Toute construction est hors programme.

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Cette section regroupe les différents points de vocabulaire, notations, outils et raisonnements nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique. Ces notions doivent être introduites de manière progressive. Leur acquisition est un objectif pour la fin du premier semestre.
Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Rudiments de logique	
Quantificateurs.	L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviation est exclu.
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par disjonction des cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.	Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.
Raisonnement par récurrence (simple, double, forte).	On pourra relier le raisonnement par récurrence au fait que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément. Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.
b) Ensembles	
Ensemble, appartenance. Ensemble vide. Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et A^c pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathscr{P}(E)$.
Recouvrement disjoint, partition.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Applications et relations	
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathscr{F}(E,F)$ et F^E.
Famille d'éléments d'un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f\|_A$.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition.	
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	Notation f^{-1}. Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.
Relation binaire sur un ensemble.	
Relation d'équivalence, classes d'équivalence.	La notion d'ensemble quotient est hors programme. Les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble sous-jacent. Congruences dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Z}$. Notation $a \equiv b\ [c]$.
Relation d'ordre. Ordre partiel, total.	

Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie

Cette section « boîte à outils » complète l'enseignement du lycée sur un certain nombre de points importants pour la suite :

- *calculs de sommes et de produits, dont la formule du binôme ;*
- *résolution de petits systèmes linéaires par l'algorithme du pivot ;*
- *manipulation d'inégalités et résolution d'inéquations ;*
- *utilisation du cercle trigonométrique, manipulation des lignes et fonctions trigonométriques.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Sommes et produits	
Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.	Notations $\sum_{i\in I} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i\in I} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Cas où I est vide.
Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.	Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.
Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$.	
Factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$.	
Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.	Exemples de sommes triangulaires.
Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.	Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k<0$ et $k>n$.
Formule du binôme dans $\mathbb{R}$.	
b) Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot	
Système linéaire à coefficients réels de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues.	Interprétation géométrique : intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$, de plans dans $\mathbb{R}^3$.
Algorithme du pivot et mise en évidence des opérations élémentaires.	Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \neq 0)$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Inégalités	
Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations. Intervalles de $\mathbb{R}$.	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.
Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $\lvert x-a\rvert \leqslant b$.
Dans $\mathbb{R}$, parties majorées, minorées, bornées. Majorant, minorant; maximum, minimum.	
Partie entière d'un nombre réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$.
d) Trigonométrie	
Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.	
Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.	Notation $a \equiv b\ [2\pi]$.
Cosinus et sinus de $\pi \pm x$, de $\frac{\pi}{2} \pm x$. Cosinus et sinus des angles usuels.	Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.
Formules d'addition $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$. Cas particulier des formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.	On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a)\sin(b)$.
Fonctions circulaires cosinus et sinus.	On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.
Pour $x \in \mathbb{R}$, inégalité $\lvert\sin(x)\rvert \leqslant \lvert x\rvert$.	
Fonction tangente.	Notation tan. Dérivée, variations, représentation graphique.
Tangente de $\pi \pm x$. Tangente des angles usuels.	Interprétation sur le cercle trigonométrique.
Formule d'addition $\tan(a \pm b)$.	Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ en fonction de $\tan(t/2)$.

Nombres complexes

L'objectif de cette section, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

- *l'étude algébrique du corps $\mathbb{C}$ et la notion d'équation algébrique;*
- *l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane;*
- *l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Opérations sur les nombres complexes.	
Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).
b) Conjugaison et module	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations.	Image du conjugué dans le plan complexe.
Module.	Interprétation géométrique de $\lvert z - z'\rvert$, cercles et disques.
Relation $\lvert z\rvert^2 = z\overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient.	
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$.	Notation $\mathbb{U}$.
Exponentielle d'une somme.	
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q), \sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
d) Forme trigonométrique	
Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ ($r > 0$) d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.	
Transformation de $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t - \varphi)$.	
e) Équations algébriques	
Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.	
Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
Somme et produit des racines.	
f) Racines n-ièmes	
Description des racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.
g) Exponentielle complexe	
Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$.	Notations $\exp(z)$, e^z. Module et arguments de e^z.
Exponentielle d'une somme.	
Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.	
Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.	
h) Interprétation géométrique des nombres complexes	
Interprétation géométrique des module et arguments de $\frac{c-a}{b-a}$.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.
Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az + b$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.	Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.
Interprétation géométrique de la conjugaison.	L'étude générale des similitudes est hors programme.

Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

Le point de vue adopté dans cette section est pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre les techniques de base de l'analyse. La mise en place rigoureuse des notions abordées fait l'objet de sections ultérieures.

Les objectifs de formation sont les suivants :
- *l'introduction de fonctions pour établir des inégalités et résoudre des problèmes d'optimisation ;*
- *la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu ;*
- *le calcul de dérivées et de primitives ;*
- *la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable ;*
- *l'application des deux points précédents aux équations différentielles.*

Le cours sur les équations différentielles est illustré par des exemples issus des autres disciplines scientifiques.

A - Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.
Somme, produit, composée.	
Monotonie (large et stricte).	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si et seulement si $\lvert f \rvert$ est majorée.
b) Dérivation	
Dérivée d'une fonction.	Notations $f'(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade. Exemples simples de calculs de dérivées partielles.
Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.	Résultats admis à ce stade.
Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.	Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.
Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.	La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	
Dérivées d'ordre supérieur.	
c) Fonctions usuelles	
Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.	
Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.	
Inégalités $\exp(x) \geqslant 1+x$, $\ln(1+x) \leqslant x$.	
Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.	Dérivée, variations, représentation graphique.

Contenus	Capacités & Commentaires
Fonctions hyperboliques sh, ch, th.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.
d) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle	
Dérivée d'une fonction à valeurs complexes. Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient. Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.	La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire. Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.

B - Primitives et équations différentielles linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Intégration par parties, changement de variable.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
b) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ensemble des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée. Méthode de la variation de la constante. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.	Équation homogène associée.

Contenus	Capacités & Commentaires
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

Nombres réels et suites numériques

L'objectif de cette section est de donner une base solide à l'étude des suites réelles. On insiste sur le caractère fondamental de la propriété de la borne supérieure.

Dans l'étude des suites, on distingue nettement les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ensembles de nombres usuels	
Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels. Approximations décimales d'un réel.	Les constructions des ensembles de nombres usuels (et en particulier celle de $\mathbb{R}$) sont hors programme. Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.
Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.	
b) Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure). Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.	Notations $\sup X$, $\inf X$.
c) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\left(\lvert u_n\rvert\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
d) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $u_n \longrightarrow \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Passage à la limite d'une inégalité large. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Utilisation d'une majoration de la forme $\lvert u_n - \ell\rvert \leqslant v_n$, où (v_n) converge vers 0.

Contenus	Capacités & Commentaires
e) Suites monotones	
Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.	
f) Suites extraites	
Suite extraite. Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite. Théorème de Bolzano-Weierstrass.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ. Principe de démonstration par dichotomie.
g) Traduction séquentielle de certaines propriétés	
Partie dense de $\mathbb{R}$. Caractérisation séquentielle de la densité.	Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide. Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.
Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).	Résultats analogues pour X non vide minorée (resp. non minorée).
h) Suites complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
Théorème de Bolzano-Weierstrass.	
i) Suites particulières	
Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.	Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.
Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.	
Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.	Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de (u_n), on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de $f(x) - x$, et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f.

Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité, dérivabilité, convexité

Dans cette section, on démontre les théorèmes de base relatifs aux fonctions réelles de variable réelle et on développe l'étude des fonctions convexes amorcée en terminale. Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et, sauf dans les paragraphes A-d) et B-e), sont à valeurs réelles. On dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré en a si a est réel, avec un intervalle $]A, +\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty, A[$ si $a = -\infty$.

L'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ est l'occasion d'introduire la notion de vitesse de convergence. Sur des exemples, on met en évidence divers comportements (convergence lente, géométrique, quadratique) en explicitant le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision donnée. On pourra en particulier présenter la méthode de Newton. De même, l'étude de la dérivabilité donne un prétexte pour présenter la notion de discrétisation, à travers la méthode d'Euler.

A - Limites et continuité

Le paragraphe a) consiste largement en des adaptations au cas continu de notions déjà étudiées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de disposer d'outils efficaces (développements limités).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Limite d'une fonction en un point	
Étant donné un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.	
Si f possède une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie). Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition. Passage à la limite d'une inégalité large. Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$),par majoration (limite $-\infty$). Théorème de la limite monotone.	
b) Continuité en un point	
Continuité, prolongement par continuité en un point.	La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
Continuité à gauche, à droite. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
c) Continuité sur un intervalle	
Continuité sur un intervalle.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Principe de démonstration par dichotomie.
Image d'un intervalle par une fonction continue. Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone. Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Image d'un segment par une fonction continue.	
Une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone.	La démonstration n'est pas exigible.
Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.	La démonstration n'est pas exigible.
d) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.

B - Dérivabilité

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite.	Définition par le taux d'accroissement. Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas $$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h), \text{ où } \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$ Interprétation géométrique : tangente. Interprétation cinématique : vitesse instantanée.
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une fonction réciproque.
b) Extremum local et point critique	
Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.
c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\lvert f'\rvert$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.	Interprétations géométrique et cinématique. La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle. Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.	La fonction f' est alors continue en a.
d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$	
Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.
e) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathscr{C}^1$.	On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».

C - Convexité

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$.	Interprétation géométrique.
Inégalité de Jensen : si f est une fonction convexe sur un intervalle I, on a l'inégalité $$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$ quels que soient les réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme 1 et quels que soient les éléments $x_1, \dots, x_n$ de I.	Tout développement général sur les barycentres est hors programme.
Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.	
Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.	
b) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables	
Caractérisation des fonctions convexes dérivables.	
Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.	
Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.	

Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de la divisibilité des entiers et des congruences. L'approche préconisée reste élémentaire en ce qu'elle ne fait pas appel au langage des structures algébriques.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples.	Caractérisation des couples d'entiers associés.
Théorème de la division euclidienne.	
b) PGCD et algorithme d'Euclide	
PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul.	Notation $a \wedge b$. Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{N}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
Algorithme d'Euclide.	L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $a \wedge b$. $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, PGCD de ka et kb.
Extension au cas de deux entiers relatifs.	
Relation de Bézout.	Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.
PPCM.	Notation $a \vee b$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Entiers premiers entre eux	
Couple d'entiers premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss. Si a et b sont premiers entre eux et divisent n, alors ab divise n. Si a et b sont premiers à n, alors ab est premier à n. PGCD d'un nombre fini d'entiers, relation de Bézout. Entiers premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	Forme irréductible d'un rationnel.
d) Nombres premiers	
Nombre premier. L'ensemble des nombres premiers est infini. Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers. Pour p premier, valuation p-adique. Valuation p-adique d'un produit.	Crible d'Ératosthène. Notation $v_p(n)$. Caractérisation de la divisibilité en termes de valuations p-adiques. Expressions du PGCD et du PPCM à l'aide des valuations p-adiques.
e) Congruences	
Relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$. Opérations sur les congruences : somme, produit. Utilisation d'un inverse modulo n pour résoudre une congruence modulo n. Petit théorème de Fermat.	Notation $a \equiv b\ [n]$. Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont hors programme.

Structures algébriques usuelles

Cette section a pour but l'introduction des notions les plus élémentaires relatives aux groupes, anneaux, corps, afin de traiter de manière unifiée un certain nombre de situations.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Loi de composition interne	
Loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité. Partie stable.	On évite l'étude de lois artificielles. Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.
b) Structure de groupe	
Groupe.	Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif. Exemples usuels : groupes additifs $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_n$.
Groupe des permutations d'un ensemble. Groupe produit. Sous-groupe : définition, caractérisation. Morphisme de groupes. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme.	Notation S_X.
Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité. Isomorphisme.	Notations $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Structures d'anneau et de corps	
Anneau.	Tout anneau est unitaire. Exemples usuels : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
Calcul dans un anneau.	Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.
Groupe des inversibles d'un anneau.	
Anneau intègre. Corps.	Les corps sont commutatifs.
Sous-anneau.	
Morphisme d'anneaux. Isomorphisme.	

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Le but de cette section est de présenter une initiation au calcul matriciel. Ainsi, on prépare l'étude géométrique de l'algèbre linéaire menée au second semestre, on revient sur l'étude des systèmes linéaires et on obtient des exemples fondamentaux d'anneaux.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Opérations sur les matrices	
Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation $A^\top$.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	
b) Opérations élémentaires	
Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.	
c) Systèmes linéaires	
Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.	
Système compatible.	Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.
Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.	On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.
e) Anneau des matrices carrées	
Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n.
Matrices symétriques, antisymétriques.	Notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Inverse d'une transposée.	
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.	
Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.	Toute technicité est exclue.
Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.	Cas particulier des matrices diagonales.

Polynômes et fractions rationnelles

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de base des polynômes et fractions rationnelles. Il s'agit d'objets particulièrement riches, dont l'étude interagit avec beaucoup de thèmes abordés pendant le semestre. Par exemple :

- *l'étude des équations algébriques enrichit le calcul algébrique et suggère des problèmes de localisation des racines, mettant en jeu des techniques analytiques dans le cas réel, plus géométriques dans le cas complexe ;*
- *l'interpolation de Lagrange permet de reconstituer un polynôme en fonction de ses valeurs en suffisamment de points et donne lieu à des problèmes issus de la théorie de l'approximation (majoration de l'erreur d'interpolation).*

L'arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ est développée selon le plan déjà utilisé pour l'arithmétique de $\mathbb{Z}$, ce qui autorise un exposé allégé. Le programme se limite au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Anneau des polynômes à une indéterminée	
Anneau $\mathbb{K}[X]$.	La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme.
Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.	Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.
Degré d'une somme, d'un produit.	L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre.
Composition.	
b) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés.	
Théorème de la division euclidienne.	Algorithme de la division euclidienne.
c) Fonctions polynomiales et racines	
Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.	Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ».
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.	Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale. Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.
Multiplicité d'une racine.	
Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines (formules de Viète).	Les formules concernant la somme et le produit doivent être connues des étudiants ; les autres doivent être retrouvées rapidement.
d) Dérivation	
Dérivée formelle d'un polynôme.	Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz.	
Formule de Taylor polynomiale.	
Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	
PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul. Algorithme d'Euclide.	Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé un PGCD de A et B. L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de A et B sont associés. Un seul est unitaire, on le note $A \wedge B$.
Relation de Bézout.	Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.
PPCM.	Notation $A \vee B$.
Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss. PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	Adaptation des résultats présentés lors de l'étude de l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.
f) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$	
Théorème de d'Alembert-Gauss.	La démonstration est hors programme.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.	Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités. Deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune. Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.	Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.
g) Formule d'interpolation de Lagrange	
Si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \dots, y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i.	Expression de P. Description des polynômes Q tels que $Q(x_i) = y_i$ pour tout i.
h) Fractions rationnelles	
Corps $\mathbb{K}(X)$.	La construction de $\mathbb{K}(X)$ est hors programme.
Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle. Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.	
i) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$	
Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.	La démonstration est hors programme. Toute technicité dans les exemples est exclue. Application au calcul de primitives, de dérivées k-ièmes.
Si λ est un pôle simple, coefficient de $\dfrac{1}{X-\lambda}$.	
Décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.	

Deuxième semestre

Le deuxième semestre s'organise autour de trois objectifs majeurs.

- Introduire les notions fondamentales relatives à l'algèbre linéaire et aux espaces préhilbertiens.
- Prolonger les sections d'analyse du premier semestre par l'étude de l'analyse asymptotique, de l'intégration sur un segment, des séries numériques, des familles sommables et par une brève introduction aux fonctions de deux variables.
- Consolider et enrichir les notions relatives aux variables aléatoires sur un univers fini introduites au lycée.

Le professeur a la liberté d'organiser l'enseignement du semestre de la manière qui lui semble la mieux adaptée. Il est cependant fortement préconisé de traiter la section « Analyse asymptotique » en début de semestre et la section « Fonctions de deux variables » à la fin.

Le programme d'algèbre linéaire est divisé en deux sections. La première étudie les objets géométriques : espaces, sous-espaces, applications linéaires; la seconde fait le lien avec le calcul matriciel. Cette séparation n'est qu'une commodité de rédaction et le professeur peut organiser l'ensemble comme il le souhaite.

Analyse asymptotique

L'objectif de cette section est d'introduire les techniques asymptotiques fondamentales, dans les cadres continu et discret. Les fonctions et les suites y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant. On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison.

Les développements limités sont les principaux outils du calcul asymptotique. Afin d'en disposer au plus tôt, on traitera en premier lieu les fonctions. Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir mener à bien rapidement des calculs asymptotiques simples. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels.

Cette section permet de revenir sur la problématique de la vitesse de convergence introduite au premier semestre lors de l'étude des fonctions de variable réelle.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Relations de comparaison : cas des fonctions	
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\overline{\mathbb{R}}$. Lien entre ces relations.	Notations $$f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)),\ f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)),\ f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x).$$ La relation $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ est définie à partir du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas localement. Pour la relation $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, on donne les deux formes $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x)+o(g(x))$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs. Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \to 0$. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées de $\ln^{\beta}(x)$, x^{α}, $e^{\gamma x}$ en $+\infty$, de $\ln^{\beta}(x)$, x^{α} en 0.
Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O. Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles f, g, h vérifient $f \leqslant g \leqslant h$ et si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Développements limités	
Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.	Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a.
Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.	
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.
Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathscr{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$. Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$, Arctan. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan.	
Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.	Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.
Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.	
c) Relations de comparaison : cas des suites	
Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.
d) Problèmes d'analyse asymptotique	
Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales.	La notion d'échelle de comparaison est hors programme.
Formule de Stirling. Traduction comme développement asymptotique de $\ln(n!)$.	La démonstration n'est pas exigible.

Espaces vectoriels et applications linéaires

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire ;*
- *reconnaître les problèmes linéaires et les traduire à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire ;*
- *définir la notion de dimension, qui décrit le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire ; on insistera sur les méthodes de calcul de dimension et on fera apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentation : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires ;*
- *présenter quelques notions de géométrie affine, afin d'interpréter géométriquement certaines situations.*

En petite dimension, l'intuition géométrique permet d'interpréter les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension au cas général ; on en tirera parti par de nombreuses figures.

Le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tout développement théorique sur les espaces de dimension infinie est hors programme.

A - Espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.	
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.
Sous-espace vectoriel engendré par une partie A.	Notations $\mathrm{Vect}(A)$, $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant A contient $\mathrm{Vect}(A)$.
c) Familles de vecteurs	
Famille (partie) génératrice.	
Famille (partie) libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
d) Somme de deux sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

B - Espaces de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\ldots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\ldots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.	
Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n)$.
c) Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.	
Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.	
Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.	
Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	

C - Applications linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	
Noyau d'une application linéaire.	Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et si $u\in\mathcal{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Im}\,u = \mathrm{Vect}\,(u(x_i))_{i\in I}$.	
Application linéaire de rang fini.	Notation $\mathrm{rg}(u)$.
Le rang de $v\circ u$ est majoré par $\min(\mathrm{rg}(u),\mathrm{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties. Anneau $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$.	Notations id_E, id. Non commutativité si $\dim E \geqslant 2$. Notation vu pour la composée $v \circ u$. Notation u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \mathrm{id}$.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}(E)$. Notation u^k pour $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
c) Détermination d'une application linéaire	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension. Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité. Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible. Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie. Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathcal{L}(E_1,F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	
d) Théorème du rang	
Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}\, u$. Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $n = \dim \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{rg}(u)$.	
e) Formes linéaires et hyperplans	
Forme linéaire. Hyperplan, défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle.	Formes coordonnées relativement à une base. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.	En dimension n, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.
Comparaison de deux équations d'un même hyperplan. Si E est un espace de dimension finie n, l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans.	Système d'équations d'un sous-espace vectoriel ; cas des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, des droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. L'étude de la dualité est hors programme.

D - Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Le but de cette partie, qu'il convient d'illustrer par de nombreuses figures, est double :
- *montrer comment l'algèbre linéaire permet d'étendre les notions de géométrie affine étudiées au collège et au lycée et d'utiliser l'intuition géométrique dans un cadre élargi.*
- *modéliser un problème affine par une équation $u(x) = a$ où u est une application linéaire, et unifier plusieurs situations de ce type déjà rencontrées.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Présentation informelle de la structure affine d'un espace vectoriel : points et vecteurs. Translation.	L'écriture $B = A + \vec{u}$ est équivalente à la relation $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
Sous-espace affine d'un espace vectoriel, direction. Hyperplan affine.	Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Intersection de sous-espaces affines.	
Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $a \in F$. L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine dirigé par $\operatorname{Ker} u$.	Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques, la recherche de polynômes interpolateurs.

Matrices

Les objectifs de cette section sont les suivants :
- *présenter les liens entre applications linéaires et matrices, de manière à exploiter les changements de registres (géométrique, numérique, formel) ;*
- *étudier l'effet d'un changement de bases sur la représentation matricielle d'une application linéaire et la relation d'équivalence qui s'en déduit sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$;*
- *introduire brièvement la relation de similitude sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

A - Matrices et applications linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.	Exemple : matrice, dans la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ vu comme plan vectoriel réel, de la similitude de multiplicateur $a + ib$.
Isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E, F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.	
Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de $\mathscr{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base.	
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes.
b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	On identifie ici $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n.	Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Lien entre les diverses notions de rang.
Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Systèmes linéaires	
Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.	
Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A.	Structure affine de l'ensemble des solutions.
Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

B - Changements de bases, équivalence et similitude

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Changements de bases	
Matrice de passage d'une base à une autre. Inversibilité et inverse d'une matrice de passage. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur. Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.
b) Matrices équivalentes et rang	
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est de rang r, il existe un couple de bases dans lequel u a pour matrice J_r.	La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.
Matrices équivalentes.	
Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.	Classification des matrices équivalentes par le rang.
Invariance du rang par transposition. Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.	
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application : calcul du rang.
c) Matrices semblables et trace	
Matrices semblables.	Interprétation géométrique. Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.
Trace d'une matrice carrée.	Notation $\operatorname{tr}(A)$.
Linéarité de la trace, relation $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, invariance par similitude.	
Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation $\operatorname{tr}(uv) = \operatorname{tr}(vu)$.	Notation $\operatorname{tr}(u)$. Trace d'un projecteur.

Groupe symétrique et déterminants

A - Groupe symétrique

Le groupe symétrique est introduit en vue de l'étude des déterminants, mais aussi pour son intérêt propre et ses interventions possibles dans diverses questions d'algèbre et de probabilités.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Groupe des permutations de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$. Cycle, transposition. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence, unicité, commutativité.	Notation S_n. Notation $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$. La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants doivent savoir décomposer une permutation.
b) Signature d'une permutation	
Décomposition d'une permutation en produit de transpositions. Signature : il existe un unique morphisme de groupes de S_n dans $\{-1,1\}$ envoyant toute transposition sur -1.	La démonstration n'est pas exigible.

B - Déterminants

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- *introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;*
- *établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;*
- *indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Formes n-linéaires alternées	
Forme n-linéaire alternée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Antisymétrie, effet d'une permutation.	La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures. Si f est une forme n-linéaire alternée et si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1,\dots,x_n)=0$.
b) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base	
Si e est une base, il existe une unique forme n-linéaire alternée f pour laquelle $f(e)=1$; toute forme n-linéaire alternée est un multiple de $\det_e$.	Notation $\det_e$. La démonstration de l'existence n'est pas exigible.
Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.	Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).
Comparaison, si e et e' sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$. La famille $(x_1,\dots,x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1,\dots,x_n)\neq 0$.	
c) Déterminant d'un endomorphisme	
Déterminant d'un endomorphisme. Déterminant d'une composée.	Caractérisation des automorphismes.
d) Déterminant d'une matrice carrée	
Déterminant d'une matrice carrée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes.
Déterminant d'un produit.	Relation $\det(\lambda A)=\lambda^n \det(A)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Caractérisation des matrices inversibles. L'application det induit un morphisme de $\mathrm{GL}(E)$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$) sur $\mathbb{K}^*$. Déterminant d'une transposée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux lignes.
e) Calcul des déterminants	
Effet des opérations élémentaires. Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire. Déterminant de Vandermonde.	Lien avec les polynômes de Lagrange.
f) Comatrice	
Comatrice. Relation $A\,\mathrm{Com}(A)^\top = \mathrm{Com}(A)^\top A = \det(A)\, I_n$.	Notation $\mathrm{Com}(A)$. Expression de l'inverse d'une matrice inversible.

Intégration

Cette section a pour principal objectif de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment et d'en établir les propriétés principales. Elle offre l'occasion de revenir sur les techniques de calcul intégral, mais aussi de traiter des exercices d'esprit plus théorique.

Les méthodes de calcul approché d'intégrales donnent l'occasion de revenir sur la problématique de l'approximation. On pourra ainsi comparer les performances de la méthode des rectangles et de celle des trapèzes.

La notion de continuité uniforme est introduite uniquement en vue de la construction de l'intégrale. L'étude systématique des fonctions uniformément continues n'est pas un attendu du programme.

Le corps $\mathbb{K}$ est pris égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le professeur peut soit se placer d'emblée dans le cadre des fonctions à valeurs complexes, soit traiter en premier lieu le cas réel avant de procéder à une brève extension.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Continuité uniforme	
Continuité uniforme. Théorème de Heine.	Exemple des fonctions lipschitziennes. La démonstration n'est pas exigible.
b) Fonctions continues par morceaux	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier, fonction continue par morceaux.	Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.
c) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Le programme n'impose pas de construction particulière. Interprétation géométrique de l'intégrale. Notations $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale : $\displaystyle\left\lvert\int_{[a,b]} f\right\rvert \leqslant \int_{[a,b]} \lvert f\rvert$.	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.

Contenus	Capacités & Commentaires
Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.	
Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.	Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment.
d) Sommes de Riemann	
Pour f continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$	Interprétation géométrique. Démonstration exigible pour f lipschitzienne.
e) Lien entre intégrale et primitive	
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue.	
Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.	
f) Formules de Taylor globales	
Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange.	L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales.

Dénombrement

Cette section est introduite essentiellement en vue de son utilisation en probabilités ; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique.

Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- *parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;*
- *l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\lvert A\rvert$, $\mathrm{Card}(A)$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.	
Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	
Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.	La formule du crible est hors programme.
Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre.	
Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Probabilités

Cette section, qui a vocation à interagir avec l'ensemble du programme, a pour objectif de donner aux étudiants une bonne pratique des variables aléatoires dans le cadre fini.

Pour enrichir la pratique de la modélisation probabiliste développée au lycée, on met en évidence qu'une situation probabiliste finie peut être décrite par un n-uplet de variables aléatoires, l'univers étant vu dans cette optique comme une source suffisante d'aléa. L'objectif de cette présentation est de pouvoir travailler le plus tôt possible avec des événements construits en termes de variables aléatoires. La construction d'un univers fini susceptible de porter un n-uplet de variables aléatoires peut être présentée, mais ne constitue pas un objectif du programme.

Les exemples et activités proposés sont de nature plus conceptuelle qu'au lycée. On pourra faire travailler les étudiants sur des marches aléatoires ou des chaînes de Markov en temps fini, sur des permutations aléatoires (loi uniforme sur S_n), des graphes aléatoires, des inégalités de concentration…

Le programme de probabilités de première année s'achève sur une approche non asymptotique de la loi faible des grands nombres qui justifie l'approche fréquentiste des probabilités.

A - Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Univers, événements, variables aléatoires	
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).
Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.	Notations $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$.
b) Espaces probabilisés finis	
Probabilité sur un univers fini.	Espace probabilisé fini (Ω, P). Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leqslant x)$.
Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1. Une distribution de probabilités sur un ensemble fini est une famille de réels positifs indexée par cet ensemble et de somme 1.	Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.
Probabilité uniforme.	
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. L'application P_B est une probabilité.	
Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A\|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.
d) Loi d'une variable aléatoire	
Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans E.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x\in E}$. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.
Variable aléatoire $f(X)$.	Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E.	Notation $X \sim \mathscr{U}(E)$.
Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathscr{B}(p)$. Interprétation comme succès d'une expérience.
Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.
Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X = x, Y = y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
e) Événements indépendants	
Les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Famille finie d'événements indépendants.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$. L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.
f) Variables aléatoires indépendantes	
Les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers Ω sont indépendantes si pour tout $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathscr{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par $P\big((X, Y) = (x, y)\big) = P(X = x)P(Y = y)$.
Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$.	Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes ayant chacune la probabilité p de succès.
Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.

B - Espérance et variance

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe	
Espérance $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x)$ d'une variable aléatoire X.	L'espérance est un indicateur de position. Formule $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$. Variable aléatoire centrée.
Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire. Espérance d'une variable constante, de Bernoulli, binomiale.	Exemple : $\mathrm{E}(\mathbb{1}_A) = P(A)$.
Formule de transfert : $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$.	On souligne que la formule de transfert s'applique en particulier aux couples et aux n-uplets.
Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.	Extension au cas de n variables aléatoires indépendantes.
b) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance	
Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle.	Variance et écart type sont des indicateurs de dispersion. Variable aléatoire réduite.
Relation $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$. Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.	
Covariance de deux variables aléatoires.	Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.

Contenus	Capacités & Commentaires
Relation $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes. Variance d'une somme, cas de variables décorrélées.	On retrouve la variance d'une variable binomiale.
c) Inégalités probabilistes	
Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	Application à l'obtention d'inégalités de concentration. Application à une moyenne de variables indépendantes de même loi, interprétation fréquentiste.

Espaces préhilbertiens réels

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. L'objectif de cette section, qu'il est essentiel d'illustrer par de nombreuses figures, est de la généraliser, afin d'exploiter l'intuition acquise en dimension 2 ou 3 pour résoudre des problèmes posés dans un contexte plus abstrait.

Les familles de polynômes orthogonaux donnent des illustrations pertinentes des notions abordées dans cette section.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Produit scalaire	
Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\vert y)$, $x \cdot y$. Expressions $X^\top Y$, $\mathrm{tr}(A^\top B)$. Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
b) Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Identité remarquable $\Vert x+y\Vert^2 = \Vert x\Vert^2 + \Vert y\Vert^2 + 2\langle x, y\rangle$.	 Exemples : sommes finies, intégrales. Formule de polarisation associée.
c) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie. Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	Notation $X^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
d) Bases orthonormées	
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	
e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F. Distance d'un vecteur à F. Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	En dimension finie : dimension de $F^\perp$, vecteur normal à un hyperplan. Notation $d(x, F)$. En dimension finie, projeté orthogonal d'un vecteur sur l'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$; distance de x à $\mathrm{Vect}(u)^\perp$.

Procédés sommatoires discrets

L'étude des séries prolonge celle des suites et permet d'appliquer les techniques d'analyse asymptotique. Les objectifs majeurs en la matière portent sur les séries à termes positifs et la convergence absolue. L'étude de séries semi-convergentes est limitée aux exemples fournis par le théorème des séries alternées.

L'étude des familles sommables est menée dans un deuxième temps. On prolonge les calculs de sommes finies effectués en début d'année, en mettant en évidence un cadre permettant de sommer « en vrac » une famille infinie et procurant ainsi un grand confort de calcul. Dans le cas d'une famille positive, le calcul dans $[0,+\infty]$ *se suffit à lui-même et contient l'étude de la sommabilité. Dans le cas d'une famille quelconque, il est préconisé de commencer par un calcul formel à justifier dans un second temps.*
On se concentre sur la pratique, qui jouera un rôle important en deuxième année.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Convergence et divergence	
Sommes partielles d'une série numérique. Convergence, divergence, somme.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Reste d'une série convergente. Lien suite-série.	Divergence grossière. La suite (u_n) et la série télescopique $\sum(u_{n+1}-u_n)$ sont de même nature.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme. Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.	
b) Séries à termes positifs ou nuls	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles. Séries de Riemann.	Application à l'étude de sommes partielles.
c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes	
Une série numérique absolument convergente est convergente. Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
d) Théorème des séries alternées	
Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0, $\sum(-1)^n u_n$ converge.	Signe et majoration en valeur absolue de la somme, des restes.
e) Familles sommables de nombres réels positifs	
Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0,+\infty]$. Borne supérieure dans $[0,+\infty]$.	
Somme d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$, définie comme borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble des sommes $\sum_{i\in F} u_i$ quand F décrit l'ensemble des parties finies de I.	La somme est notée $\sum_{i\in I} u_i$. Cas où I est fini, où $I = \mathbb{N}$ (lien avec les séries). On note $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$ si la série $\sum u_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ diverge. Invariance de la somme par permutation.

Contenus	Capacités & Commentaires
La famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$.	On souligne que les calculs sont justifiés par la seule positivité et qu'ils fournissent un moyen d'étudier la sommabilité.
Opérations : somme, multiplication par un réel positif.	
Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$ et si $(u_i)_{i\in I}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors $\sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I_j} u_i\Big) = \sum_{i\in I} u_i$.	La démonstration est hors programme.
Cas où I est un produit : théorème de Fubini positif.	

f) Familles sommables de nombres complexes

Contenus	Capacités & Commentaires
La famille $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{C}^I$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} \lvert u_i\rvert < +\infty$.	Notation $\ell^1(I)$. Pour $I = \mathbb{N}$, lien avec les séries. Sommabilité d'une sous-famille d'une famille sommable.
Somme d'une famille sommable de nombres complexes.	Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et si $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe une partie finie F de I telle que $\Big\lvert \sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in F} a_i \Big\rvert \leqslant \varepsilon$. Invariance de la somme par permutation.
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes et soit (v_i) une famille sommable de réels positifs vérifiant, pour tout $i \in I$, $\lvert u_i\rvert \leqslant v_i$. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.	
Linéarité de la somme.	
Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$, si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $\sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I_j} u_i\Big) = \sum_{i\in I} u_i$.	La démonstration est hors programme.
Cas où I est un produit : théorème de Fubini.	
Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_{i'})_{i'\in I'}$ sont sommables alors $(a_i b_{i'})_{(i,i')\in I\times I'}$ est sommable et $$\sum_{(i,i')\in I\times I'} a_i b_{i'} = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{i'\in I'} b_{i'}.$$	Extension, sans rédaction de la démonstration, au produit d'un nombre fini de familles sommables.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	On retrouve le fait que l'exponentielle complexe est un morphisme de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Fonctions de deux variables

Le but de cette section, dont le contenu sera entièrement repris dans un cadre plus général en seconde année, est de familiariser les étudiants avec les calculs sur les dérivées partielles, notamment avec la « règle de la chaîne », et de développer une vision géométrique des fonctions de deux variables. Le point de vue est donc essentiellement pratique. Toute extension et tout développement théorique supplémentaire sont hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonctions continues	
Boules de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne canonique. Ouverts.	
Continuité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Représentation graphique d'une fonction de deux variables par une surface. La notion de continuité est introduite uniquement en vue du calcul différentiel. L'étude de la continuité d'une fonction n'est pas un objectif du programme.
b) Dérivées partielles	
Dérivées partielles en un point d'une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité.
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert.	Définition par la continuité des dérivées partielles. La notion de fonction différentiable est hors programme.
Développement limité à l'ordre 1 au point (x_0, y_0) d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$: $$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\\|(h,k)\\|).$$	Démonstration hors programme. On met en évidence l'idée de l'approximation linéaire de $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ et l'interprétation de $$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0)$$ comme équation du plan tangent en (x_0, y_0) à la surface d'équation $z = f(x, y)$.
Gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Expression du développement limité à l'aide du gradient.	Notation $\nabla f(x_0, y_0)$. Le gradient de f en (x_0, y_0) définit la direction dans laquelle f croît le plus vite.
c) Dérivées partielles et composées	
Dérivée selon un vecteur.	Expression à l'aide du gradient $\langle \nabla f(x_0, y_0), u\rangle$.
Règle de la chaîne : les fonctions considérées étant de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(x(t), y(t))\big) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$	Interprétation comme dérivée de f le long d'un arc γ donné par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et expression à l'aide du gradient $$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$$ où $\gamma'(t)$ est défini par $(x'(t), y'(t))$. Le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f.
Sous les hypothèses appropriées, dérivées partielles de $(u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$.	
d) Extremums	
Maximum et minimum, local ou global d'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$.	
Point critique. Tout extremum local d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est un point critique.	Exemples d'étude de points critiques.

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI)

Annexe 2
Programme de physique-chimie

Programme de physique-chimie de la voie MPSI

Préambule

Objectifs de formation

Le programme de physique-chimie de la classe de MPSI est conçu comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités scientifiques préparant les étudiants à la deuxième année de classe préparatoire et, au-delà, à un cursus d'ingénieur, de chercheur ou d'enseignant. Il s'agit de renforcer chez l'étudiant les compétences déjà travaillées au lycée inhérentes à la pratique de la démarche scientifique : observer et s'approprier, analyser et modéliser, réaliser et valider, et enfin communiquer et valoriser ses résultats.

L'acquisition de ce socle par les étudiants constitue un objectif prioritaire pour l'enseignant.
Parce que la physique et la chimie sont avant tout des sciences expérimentales qui développent la curiosité, la créativité et l'analyse critique, l'expérience est au cœur de son enseignement, que ce soit en cours ou lors des séances de travaux pratiques. Les activités expérimentales habituent les étudiants à se confronter au réel, comme ils auront à le faire dans l'exercice de leur métier.

De même, l'introduction de capacités numériques dans le programme prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation. Elles offrent aux étudiants la possibilité d'effectuer une modélisation avancée du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires.

La démarche de modélisation occupe également une place centrale dans le programme pour former les étudiants à établir, de manière autonome, un lien fait d'allers-retours entre le « monde » des objets, des expériences, des faits, et celui des modèles et des théories. L'enseignant doit rechercher un point d'équilibre entre des approches complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative. La construction d'un modèle passe aussi par l'utilisation maîtrisée des mathématiques dont un des fondateurs de la physique expérimentale, Galilée, énonçait déjà qu'elles sont le langage dans lequel est écrit le monde.

Enfin, l'autonomie et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à exercer les étudiants à mobiliser de façon complémentaire connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Organisation du programme

Le programme est organisé en deux parties.

Dans la première partie, intitulée **« Formation expérimentale »,** sont décrits les objectifs de formation sur le thème « Mesures et incertitudes » ainsi que les méthodes et les capacités expérimentales que les étudiants doivent maîtriser à la fin de l'année scolaire. Leur mise en œuvre doit notamment s'appuyer sur des problématiques concrètes identifiées en gras dans la seconde partie du programme intitulée « **Contenus thématiques** ». Elles doivent être programmées par l'enseignant de façon à assurer un apprentissage progressif de l'ensemble des capacités attendues.

La seconde partie, intitulée « **Contenus thématiques »** est structurée autour de quatre thèmes : « ondes et signaux », « mouvements et interactions », « l'énergie : conversions et transferts » et « constitution et transformations de la matière ». La présentation en deux colonnes (« notions et contenus » et « capacités exigibles ») met en valeur les éléments clefs constituant le socle de connaissances et de capacités dont l'assimilation par tous les étudiants est requise. La progression dans

les contenus disciplinaires est organisée en deux semestres. Pour faciliter la progressivité des acquisitions, au premier semestre les grandeurs physiques introduites sont essentiellement des grandeurs scalaires dépendant du temps et éventuellement d'une variable d'espace.
Certains items de cette seconde partie**, identifiés en caractères gras**, se prêtent particulièrement à une approche expérimentale. Ils doivent être abordés en priorité lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant doivent être privilégiées. La présence de capacités numériques explicitées atteste par ailleurs de la volonté de renforcer ce volet de la formation des étudiants.

Trois annexes sont consacrées d'une part au matériel nécessaire à la mise en œuvre des programmes, d'autre part aux outils mathématiques et aux outils numériques que les étudiants doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de physique-chimie à la fin de l'année de la classe de MPSI.

Ce programme précise les objectifs de formation à atteindre pour tous les étudiants. Il n'impose en aucun cas une progression pour chacun des deux semestres ; celle-ci relève de la liberté pédagogique de l'enseignant.

Les compétences travaillées dans le cadre de la démarche scientifique

L'ensemble des activités proposées en classe préparatoire aux grandes écoles – activités expérimentales, résolutions de problèmes, TIPE, etc. – permet de travailler les compétences de la démarche scientifique qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences. L'ordre de présentation de ces compétences ne préjuge pas d'un ordre de mobilisation de ces dernières lors d'une activité.

Les compétences doivent être acquises à l'issue de la formation en CPGE. Elles nécessitent d'être régulièrement mobilisées par les étudiants et sont évaluées en s'appuyant, par exemple, sur l'utilisation de grilles d'évaluation.

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier	- Rechercher, extraire et organiser l'information en lien avec la situation étudiée. - Identifier la complémentarité d'informations présentées sous des formes différentes (texte, graphe, tableau, etc.). - Énoncer ou dégager une problématique scientifique. - Représenter la situation par un schéma modèle. - Identifier les grandeurs pertinentes, leur attribuer un symbole. - Relier le problème à une situation modèle connue. - Acquérir de nouvelles connaissances en autonomie.
Analyser/ Raisonner	- Formuler des hypothèses. - Décomposer un problème en plusieurs problèmes plus simples. - Proposer une stratégie pour répondre à une problématique. - Choisir, concevoir, justifier un protocole, un dispositif expérimental, un modèle ou des lois physiques. - Évaluer des ordres de grandeur. - Identifier les idées essentielles d'un document et leurs articulations. - Relier qualitativement ou quantitativement différents éléments d'un ou de documents.
Réaliser	- Mettre en œuvre les étapes d'une démarche, un protocole, un modèle.

	- Extraire une information d'un texte, d'un graphe, d'un tableau, d'un schéma, d'une photo. - Schématiser un dispositif, une expérience, une méthode de mesure. - Utiliser le matériel et les produits de manière adaptée en respectant des règles de sécurité. - Effectuer des représentations graphiques à partir de données. - Mener des calculs analytiques ou à l'aide d'un langage de programmation, effectuer des applications numériques. - Conduire une analyse dimensionnelle.
Valider	- Exploiter des observations, des mesures en estimant les incertitudes. - Confronter les résultats d'un modèle à des résultats expérimentaux, à des données figurant dans un document, à ses connaissances. - Confirmer ou infirmer une hypothèse, une information. - Analyser les résultats de manière critique. - Repérer les points faibles d'une argumentation (contradiction, partialité, incomplétude, etc.). - Proposer des améliorations de la démarche ou du modèle.
Communiquer	- À l'écrit comme à l'oral : o présenter les étapes de sa démarche de manière synthétique, organisée et cohérente. o rédiger une synthèse, une analyse, une argumentation. o utiliser un vocabulaire scientifique précis et choisir des modes de représentation adaptés (schémas, graphes, cartes mentales, etc.). - Écouter, confronter son point de vue.

Le niveau de maîtrise de ces compétences dépend de **l'autonomie et de l'initiative** requises dans les activités proposées aux étudiants sur les notions et capacités exigibles du programme.
La mise en œuvre des programmes doit aussi être l'occasion d'aborder avec les étudiants des questions liées à l'histoire de l'évolution des idées, des modèles et des théories en physique-chimie, à des questions liées à la recherche scientifique actuelle et à des enjeux citoyens comme la responsabilité individuelle et collective, la **sécurité** pour soi et pour autrui, l'**environnement** et le **développement durable** ou encore le **réchauffement climatique**.

Repères pour l'enseignement

Dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant organise son enseignement en respectant trois grands principes directeurs :

- privilégier la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances, des capacités et des compétences est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Les supports pédagogiques utilisés doivent notamment favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie des étudiants. L'investigation expérimentale et la résolution de problèmes favorisent cette mise en activité ;
- recourir à la mise en contexte des contenus scientifiques : le questionnement scientifique peut être introduit à partir de phénomènes naturels, de procédés industriels ou d'objets technologiques. Le recours à des approches documentaires est un moyen pertinent pour diversifier les supports d'accès à l'information scientifique et technologique et ainsi former l'étudiant à mieux en appréhender la complexité et à apprendre par lui-même. Lorsque le thème traité s'y prête, l'enseignant peut le mettre en perspective avec l'histoire des sciences et des techniques, avec des questions d'actualité ou des débats d'idées ;

- contribuer à la nécessaire mise en cohérence des enseignements scientifiques ; la progression en physique-chimie doit être articulée avec celles mises en œuvre dans les autres disciplines scientifiques : mathématiques, informatique, sciences industrielles de l'ingénieur.

Concernant l'évaluation, qui vise à mesurer le degré de maîtrise du socle ainsi défini et le niveau d'autonomie et d'initiative des étudiants, l'enseignant veille soigneusement à identifier les compétences et les capacités mobilisées dans les activités proposées afin d'en élargir le plus possible le spectre.

Enfin, le professeur veille aussi à développer chez les étudiants des compétences transversales et préprofessionnelles relatives aux capacités suivantes :

- identifier les différents champs professionnels et les parcours pour y accéder ;
- valoriser ses compétences scientifiques et techniques en lien avec son projet de poursuite d'études ou professionnel.

Formation expérimentale

Cette partie est spécifiquement dédiée à la mise en œuvre de la formation expérimentale des étudiants lors des séances de travaux pratiques.

Dans un premier temps, elle précise les connaissances et savoir-faire qui doivent être acquis dans le domaine de la mesure et de l'évaluation des incertitudes. Elle présente ensuite de façon détaillée l'ensemble des capacités expérimentales qui doivent être acquises en autonomie par les étudiants à l'issue de leur première année de CPGE. Enfin, elle aborde la question de la prévention du risque au laboratoire de physique-chimie.

Une liste de matériel, que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice succincte, figure dans l'annexe 1 du présent programme.

1. Mesures et incertitudes

Les notions et capacités identifiées ci-dessous couvrent les deux années de formation en classe préparatoire aux grandes écoles ; leur pleine maîtrise est donc un objectif de fin de seconde année.
L'accent est mis sur la variabilité de la mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type. La comparaison entre deux valeurs mesurées d'une même grandeur physique est conduite au moyen de l'écart normalisé, l'objectif principal étant de développer l'esprit critique des étudiants en s'appuyant sur un critère quantitatif. Le même esprit prévaut dans l'analyse des résultats d'une régression linéaire qui ne saurait s'appuyer sur l'exploitation non raisonnée du coefficient de corrélation (R^2).
Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
Incertitudes-types composées.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

2. Mesures et capacités expérimentales

Cette partie présente l'ensemble des capacités expérimentales que les étudiants doivent acquérir au cours de l'année durant les séances de travaux pratiques. Une séance de travaux pratiques s'articule autour d'une problématique, que les thèmes – repérés en gras dans la colonne « capacités exigibles »

de la partie « **Contenus thématiques** » du programme – peuvent servir à définir. Le travail de ces capacités et leur consolidation se poursuit en seconde année.

Dans le tableau ci-dessous, les différentes capacités à acquérir sont groupées par domaines thématiques ou transversaux. Cela ne signifie pas qu'une activité expérimentale se limite à un seul domaine. La capacité à former une image de bonne qualité, par exemple, peut être mobilisée au cours d'une expérience de mécanique ou de thermodynamique, cette transversalité de la formation devant être un moyen, entre d'autres, de favoriser l'autonomie et la prise d'initiative.

Nature et méthodes	Capacités exigibles
1. Mesures de longueurs et d'angles Longueurs : sur un banc d'optique.	Mettre en œuvre une mesure de longueur par déplacement d'un viseur entre deux positions.
Longueurs : à partir d'une photo ou d'une vidéo.	Évaluer, par comparaison à un étalon, une longueur (ou les coordonnées d'une position) sur une image numérique et en estimer la précision.
Angles : avec un goniomètre.	Utiliser un viseur à frontale fixe, une lunette autocollimatrice. Utiliser des vis micrométriques et un réticule.
Longueurs d'onde.	Étudier un spectre à l'aide d'un spectromètre à fibre optique. Mesurer une longueur d'onde optique à l'aide d'un goniomètre à réseau. Mesurer une longueur d'onde acoustique à l'aide d'un support gradué et d'un oscilloscope bicourbe.
2. Mesures de temps et de fréquences Fréquence ou période : mesure au fréquencemètre numérique, à l'oscilloscope ou *via* une carte d'acquisition.	Mettre en œuvre une méthode de mesure de fréquence ou de période.
Analyse spectrale.	Choisir de façon cohérente la fréquence d'échantillonnage et la durée totale d'acquisition. Effectuer l'analyse spectrale d'un signal périodique à l'aide d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition.
Décalage temporel/déphasage à l'aide d'un oscilloscope numérique.	Reconnaître une avance ou un retard de phase. Passer d'un décalage temporel à un déphasage et inversement. Repérer précisément le passage par un déphasage de 0 ou π en mode XY.

3. Électricité Mesurer une tension : - mesure directe au voltmètre numérique ou à l'oscilloscope numérique. Mesurer l'intensité d'un courant : - mesure directe à l'ampèremètre numérique ; - mesure indirecte à l'oscilloscope aux bornes d'une résistance adaptée. Mesurer une résistance ou une impédance : - mesure directe à l'ohmmètre/capacimètre ; - mesure indirecte à l'oscilloscope ou au voltmètre sur un diviseur de tension.	Capacités communes à l'ensemble des mesures électriques : - expliquer le lien entre résolution, calibre, nombre de points de mesure ; - préciser la perturbation induite par l'appareil de mesure sur le montage et ses limites (bande passante, résistance d'entrée) ; - définir la nature de la mesure effectuée (valeur efficace, valeur moyenne, amplitude, valeur crête à crête, etc.).
Produire un signal électrique analogique périodique simple à l'aide d'un GBF.	Obtenir un signal de valeur moyenne, de forme, d'amplitude et de fréquence données.
Agir sur un signal électrique à l'aide des fonctions simples suivantes : o isolation, amplification, filtrage ; o sommation, intégration.	Gérer, dans un circuit électronique, les contraintes liées à la liaison entre les masses. Mettre en œuvre les fonctions de base de l'électronique réalisées par des blocs dont la structure ne fait pas l'objet d'une étude spécifique. Associer ces fonctions de base pour réaliser une fonction complexe en gérant les contraintes liées aux impédances d'entrée et/ou de sortie des blocs.
4. Optique Former une image.	Éclairer un objet de manière adaptée. Choisir une ou plusieurs lentilles en fonction des contraintes expérimentales, et choisir leur focale de façon raisonnée. Optimiser la qualité d'une image (alignement, limitation des aberrations, etc.). Estimer une valeur approchée d'une distance focale.
Créer ou repérer une direction de référence.	Régler et mettre en œuvre une lunette autocollimatrice et un collimateur.
Analyser une image numérique.	Acquérir (webcam, appareil photo numérique, etc.) l'image d'un phénomène physique sous forme numérique, et l'exploiter à l'aide d'un logiciel pour conduire l'étude d'un phénomène.
5. Mécanique Mesurer une masse, un moment d'inertie.	Utiliser une balance de précision. Repérer la position d'un centre de masse et mesurer un moment d'inertie à partir d'une période.

Visualiser et décomposer un mouvement.	Mettre en œuvre une méthode de stroboscopie. Enregistrer un phénomène à l'aide d'une caméra numérique et repérer la trajectoire à l'aide d'un logiciel dédié, en déduire la vitesse et l'accélération.
Mesurer une accélération.	Mettre en œuvre un accéléromètre, par exemple avec l'aide d'un microcontrôleur.
Quantifier une action.	Utiliser un dynamomètre.
6. Thermodynamique Mesurer une pression.	 Mettre en œuvre un capteur, en identifiant son caractère différentiel ou absolu.
Mesurer une température.	Mettre en œuvre un capteur de température, par exemple avec l'aide d'un microcontrôleur. Mettre en œuvre un capteur infrarouge. Choisir le capteur en fonction de ses caractéristiques (linéarité, sensibilité, gamme de fonctionnement, temps de réponse), et du type de mesures à effectuer.
Effectuer des bilans d'énergie.	Mettre en œuvre une technique de calorimétrie.
7. Mesures de grandeurs en chimie Mesurer un volume, une masse, un pH, une conductance et une conductivité, une absorbance.	 Sélectionner et utiliser le matériel adapté à la précision requise. Distinguer les instruments de verrerie In et Ex. Préparer une solution de concentration en masse ou en quantité de matière donnée à partir d'un solide, d'un liquide, d'une solution de composition connue avec le matériel approprié. Utiliser les méthodes et le matériel adéquats pour transférer l'intégralité du solide ou du liquide pesé. Utiliser les appareils de mesure (masse, pH, conductance) en s'aidant d'une notice. Étalonner une chaîne de mesure si nécessaire.

8. Analyses qualitatives et quantitatives Effectuer des tests qualitatifs**.**	Proposer ou mettre en œuvre, à partir d'informations fournies, des tests qualitatifs préalables à l'élaboration d'un protocole.
Réaliser des dosages par étalonnage.	Déterminer une concentration en exploitant la mesure de grandeurs physiques caractéristiques de l'espèce ou en construisant et en utilisant une courbe d'étalonnage. Déterminer une concentration ou une quantité de matière par spectrophotométrie UV-Visible.
Réaliser des dosages par titrage. Titrages directs, indirects. Équivalence. Titrages simples, successifs, simultanés. Méthodes expérimentales de suivi d'un titrage : pH-métrie, conductimétrie, indicateurs colorés de fin de titrage.	Identifier et exploiter la réaction support du titrage (recenser les espèces présentes dans le milieu au cours du titrage, repérer l'équivalence, justifier qualitativement l'allure de la courbe ou le changement de couleur observé). Proposer ou justifier le protocole d'un titrage à l'aide de données fournies ou à rechercher. Mettre en œuvre un protocole expérimental correspondant à un titrage direct ou indirect. Choisir et utiliser un indicateur coloré de fin de titrage.
Exploiter des courbes expérimentales de titrage.	Exploiter une courbe de titrage pour déterminer la concentration en espèce titrée. Utiliser un logiciel de simulation pour déterminer des courbes de distribution et confronter la courbe de titrage simulée à la courbe expérimentale. Distinguer l'équivalence et le repérage du virage d'un indicateur coloré de fin de titrage.
Mettre en œuvre des suivis cinétiques de transformations chimiques. Suivi en continu de l'évolution temporelle d'une grandeur physique.	Exploiter les résultats d'un suivi temporel de concentration pour déterminer les caractéristiques cinétiques d'une réaction. Proposer et mettre en œuvre des conditions expérimentales permettant la simplification de la loi de vitesse. Déterminer la valeur d'une énergie d'activation.

3. Prévention du risque au laboratoire de physique-chimie

Les étudiants doivent prendre conscience du risque lié à la manipulation et au rejet des produits chimiques. L'apprentissage et le respect des règles de sécurité chimique, électrique, optique et celles liées à la pression et à la température leur permettent de prévenir et de minimiser ce risque. Futurs ingénieurs, chercheurs, enseignants, ils doivent être sensibilisés au respect de la législation et à l'impact de leur activité sur l'environnement.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Prévention des risques au laboratoire	Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire. Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.

- **Risque chimique** Règles de sécurité au laboratoire. Classes et catégories de danger. Pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques. Mentions de danger (H) et conseils de prudence (P). Fiches de sécurité.	Relever les indications sur le risque associé au prélèvement, au mélange et au stockage des produits chimiques et adopter une attitude responsable lors de leur utilisation.
- **Risque électrique**	Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation d'appareils électriques.
- **Risque optique**	Utiliser les sources laser et les diodes électroluminescentes de manière adaptée.
- **Risques liés à la pression et à la température**	Adopter une attitude responsable lors de manipulations de corps chauds ou de dispositifs engageant des hautes ou des basses pressions.
4. Prévention de l'impact environnemental Traitement et rejet des espèces chimiques.	Adapter le mode d'élimination d'une espèce chimique ou d'un mélange en fonction des informations recueillies sur la toxicité ou les risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.

Contenus thématiques

L'organisation des semestres est la suivante.

Premier semestre

Thème 1 : ondes et signaux (1)

1.1. Formation des images
1.2. Signaux électriques dans l'ARQS
1.3. Circuit linéaire du premier ordre
1.4. Oscillateurs libres et forcés
1.5. Filtrage linéaire
1.6. Propagation d'un signal

Thème 2 : mouvements et interactions (1)

2.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point
2.2. Lois de Newton
2.3. Approche énergétique du mouvement d'un point matériel
2.4. Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétostatique, uniformes et stationnaires

Thème 4 : constitution et transformations de la matière (1)

4.1. Transformations de la matière
 4.1.1. Description d'un système et de son évolution vers un état final
 4.1.2. Évolution temporelle d'un système chimique
4.2. Relations entre la structure des entités chimiques et les propriétés physiques macroscopiques
 4.2.1 Structure des entités chimiques
 4.2.2. Relations structure des entités - propriétés physiques macroscopiques

Deuxième semestre

Thème 2 : mouvements et interactions (2)

2.5. Moment cinétique
2.6. Mouvements dans un champ de force centrale conservatif
2.7. Mouvement d'un solide

Thème 3 : l'énergie : conversions et transferts

3.1. Descriptions microscopique et macroscopique d'un système à l'équilibre
3.2. Énergie échangée par un système au cours d'une transformation
3.3. Premier principe. Bilans d'énergie
3.4. Deuxième principe. Bilans d'entropie
3.5. Machines thermiques

Thème 1 : ondes et signaux (2)

1.7. Induction et forces de Laplace
- 1.7.1. Champ magnétique
- 1.7.2. Actions d'un champ magnétique
- 1.7.3. Lois de l'induction
- 1.7.4. Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps
- 1.7.5. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

1.8. Introduction à la physique quantique

Thème 4 : constitution et transformations de la matière (2)

4.3. Structure et propriétés physiques des solides
4.4. Transformations chimiques en solution aqueuse
- 4.4.1. Réactions acide-base et de précipitation
- 4.4.2. Réactions d'oxydo-réduction

A. Premier semestre

Thème 1 : ondes et signaux (1)

La partie **1.1.** « **Formation des images** » traite de la formation des images et propose une ouverture sur la notion de guidage de la lumière par une fibre optique. Cette partie est l'occasion d'interroger le concept de modèle en physique et d'en identifier les limites de validité. Elle permet également d'aborder de nombreuses applications technologiques ; certaines sont précisées par le programme, d'autres sont laissées à l'appréciation des enseignants (lunette, microscope, optique d'un smartphone, etc.).
L'approche expérimentale doit être privilégiée dans ce domaine de la physique qui s'y prête particulièrement bien.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.1. Formation des images	
Sources lumineuses Modèle de la source ponctuelle monochromatique. Spectre.	Caractériser une source lumineuse par son spectre. Relier la longueur d'onde dans le vide et la couleur.
Modèle de l'optique géométrique Modèle de l'optique géométrique. Notion de rayon lumineux. Indice d'un milieu transparent.	Définir le modèle de l'optique géométrique. Indiquer les limites du modèle de l'optique géométrique.

Réflexion, réfraction. Lois de Snell-Descartes.	Établir la condition de réflexion totale.
Conditions de l'approximation de Gauss et applications Stigmatisme. Miroir plan.	 Construire l'image d'un objet par un miroir plan.
Conditions de l'approximation de Gauss.	Énoncer les conditions de l'approximation de Gauss et ses conséquences. Relier le stigmatisme approché aux caractéristiques d'un détecteur.
Lentilles minces dans l'approximation de Gauss.	Définir les propriétés du centre optique, des foyers principaux et secondaires, de la distance focale, de la vergence. Construire l'image d'un objet situé à distance finie ou infinie à l'aide de rayons lumineux, identifier sa nature réelle ou virtuelle. Exploiter les formules de conjugaison et de grandissement transversal de Descartes et de Newton. Établir et utiliser la condition de formation de l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergente.
Modèles de quelques dispositifs optiques L'œil. Punctum proximum, punctum remotum.	 Modéliser l'œil comme l'association d'une lentille de vergence variable et d'un capteur plan fixe. Citer les ordres de grandeur de la limite de résolution angulaire et de la plage d'accommodation.
L'appareil photographique.	Modéliser l'appareil photographique comme l'association d'une lentille et d'un capteur. Construire géométriquement la profondeur de champ pour un réglage donné. **Étudier l'influence de la focale, de la durée d'exposition, du diaphragme sur la formation de l'image.**
La fibre optique à saut d'indice.	Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre à saut d'indice.

La partie **1.2.** « **Signaux électriques dans l'ARQS** » pose les bases nécessaires à l'étude des circuits dans l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS). Si le programme se concentre sur l'étude des dipôles R, L et C, il est possible, lors des travaux pratiques, de faire appel à des composants intégrés ou non linéaires (filtres à capacité commutée, échantillonneur-bloqueur, diodes, photorésistances, etc.) dès lors qu'aucune connaissance préalable n'est nécessaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.2. Signaux électriques dans l'ARQS	

Charge électrique, intensité du courant. Potentiel, référence de potentiel, tension. Puissance.	Justifier que l'utilisation de grandeurs électriques continues est compatible avec la quantification de la charge électrique. Exprimer l'intensité du courant électrique en termes de débit de charge. Exprimer la condition d'application de l'ARQS en fonction de la taille du circuit et de la fréquence. Relier la loi des nœuds au postulat de la conservation de la charge. Utiliser la loi des mailles. Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur. Citer les ordres de grandeur des intensités et des tensions dans différents domaines d'application.
Dipôles : résistances, condensateurs, bobines, sources décrites par un modèle linéaire.	Utiliser les relations entre l'intensité et la tension. Citer des ordres de grandeurs des composants R, L, C. Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance. Exprimer l'énergie stockée dans un condensateur ou une bobine. Modéliser une source en utilisant la représentation de Thévenin.
Association de deux résistances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux résistances par une résistance équivalente. Établir et exploiter les relations des diviseurs de tension ou de courant.
Résistance de sortie, résistance d'entrée.	**Évaluer une résistance d'entrée ou de sortie à l'aide d'une notice ou d'un appareil afin d'appréhender les conséquences de leurs valeurs sur le fonctionnement d'un circuit.** **Étudier l'influence des résistances d'entrée ou de sortie sur le signal délivré par un GBF, sur la mesure effectuée par un oscilloscope ou un multimètre.**

Les deux parties **1.3.** « **Circuit linéaire du premier ordre** » et **1.4.** « **Oscillateurs libres et forcés** » abordent l'étude des circuits linéaires du premier et du second ordre en régime libre puis forcé. Il s'agit avant tout de comprendre les principes des méthodes mises en œuvre et leur exploitation pour étudier le comportement d'un signal traversant un système linéaire. Le choix a été fait de présenter simultanément les oscillateurs électriques et mécaniques de manière à mettre l'accent sur les analogies formelles et comportementales.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.3. Circuit linéaire du premier ordre	
Régime libre, réponse à un échelon de tension.	Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension.

	Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine. Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles. Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. **Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un circuit linéaire du premier ordre et analyser ses caractéristiques. Confronter les résultats expérimentaux aux expressions théoriques.** <u>Capacité numérique</u> : mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.4. Oscillateurs libres et forces	
Oscillateur harmonique. Exemples du circuit LC et de l'oscillateur mécanique.	Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales. Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation. Réaliser un bilan énergétique.
Circuit RLC série et oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux.	Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité. Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.

	Mettre en évidence la similitude des comportements des oscillateurs mécanique et électronique. **Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un système linéaire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.**
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.
Impédances complexes.	Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.
Association de deux impédances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale. Résonance.	Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé. Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité. Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental visant à caractériser un phénomène de résonance.**

L'objectif principal de la partie **1.5.** « **Filtrage linéaire** » n'est pas de former les étudiants aux aspects techniques des calculs des fonctions de transfert et des tracés de diagrammes de Bode mais de mettre l'accent sur l'interprétation des propriétés du signal de sortie connaissant celles du signal d'entrée et d'appréhender le rôle central de la linéarité des systèmes utilisés.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.5. Filtrage linéaire	
Signaux périodiques.	Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales. Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal. Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal. Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.

Fonction de transfert harmonique. Diagramme de Bode.	Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1. Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique. Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'utilité des fonctions de transfert pour un système linéaire à un ou plusieurs étages.**
Modèles de filtres passifs : passe-bas et passe-haut d'ordre 1, passe-bas et passe-bande d'ordre 2.	Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges. Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyenneur, intégrateur, ou dérivateur. Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée. Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.). **Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale.** **Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.** <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.

Dans la partie **1.6.** consacrée à la « **Propagation d'un signal** », il est recommandé de s'appuyer sur une approche expérimentale ou sur des logiciels de simulation pour permettre aux étudiants de faire le lien entre l'observation de signaux qui se propagent et la traduction mathématique de cette propagation, sans qu'aucune référence ne soit faite à une équation d'onde. L'étude de la somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence et du phénomène d'interférences associé permet de mettre en évidence le rôle essentiel joué par le déphasage entre les deux signaux dans le signal résultant. L'étude des interférences lumineuses est l'occasion d'introduire la notion de différence de chemin optique et de la relier au déphasage.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.6. Propagation d'un signal	
Exemples de signaux. Signal sinusoïdal.	Identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux acoustiques, électriques, électromagnétiques.
Propagation d'un signal dans un milieu illimité, non dispersif et transparent Onde progressive dans le cas d'une propagation unidimensionnelle non dispersive. Célérité, retard temporel.	Écrire les signaux sous la forme f(x-ct) ou g(x+ct). Écrire les signaux sous la forme f(t-x/c) ou g(t+x/c). Prévoir, dans le cas d'une onde progressive, l'évolution temporelle à position fixée et l'évolution spatiale à différents instants.
Modèle de l'onde progressive sinusoïdale unidimensionnelle. Vitesse de phase, déphasage, double périodicité spatiale et temporelle.	Citer quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines acoustique, mécanique et électromagnétique. Établir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la vitesse de phase. Relier le déphasage entre les signaux perçus en deux points distincts au retard dû à la propagation. **Mesurer la vitesse de phase, la longueur d'onde et le déphasage dû à la propagation d'un phénomène ondulatoire.**
Milieux dispersifs ou non dispersifs.	Définir un milieu dispersif. Citer des exemples de situations de propagation dispersive et non dispersive.
Phénomène d'interférences Interférences entre deux ondes acoustiques ou mécaniques de même fréquence.	Exprimer les conditions d'interférences constructives ou destructives. Déterminer l'amplitude de l'onde résultante en un point en fonction du déphasage.
Interférences entre deux ondes lumineuses de même fréquence. Exemple du dispositif des trous d'Young éclairé par une source monochromatique. Différence de chemin optique. Conditions d'interférences constructives ou destructives. Formule de Fresnel.	Relier le déphasage entre les deux ondes à la différence de chemin optique. Établir l'expression littérale de la différence de chemin optique entre les deux ondes. Exploiter la formule de Fresnel fournie pour décrire la répartition d'intensité lumineuse. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental pour visualiser et caractériser le phénomène d'interférences de deux ondes.**

Thème 2 : mouvements et interactions (1)

La partie **2.1.** « **Description et paramétrage du mouvement d'un point »** vise notamment à mettre en place les principaux systèmes de coordonnées : cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques. Le but est de permettre aux étudiants de disposer d'outils efficaces pour décrire une grande variété de mouvements de points. Pour atteindre cet objectif, il convient de les familiariser progressivement avec les projections et dérivations de vecteurs ainsi qu'avec l'algébrisation des grandeurs dans un contexte relevant de la physique. Enfin, cette partie est l'occasion de procéder à des analyses qualitatives des comportements cinématiques de systèmes réels assimilés à un point, notamment sur les exemples simples des mouvements rectilignes et circulaires.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point	
Repérage dans l'espace et dans le temps Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.	Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
Cinématique du point Description du mouvement d'un point. Vecteurs position, vitesse et accélération. Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.	Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques. Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.
	Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.
Mouvement à vecteur accélération constant.	Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
Mouvement circulaire uniforme et non uniforme.	Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.
Repérage d'un point dont la trajectoire est connue. Vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour une trajectoire plane.	Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle. **Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs vitesse et accélération.**

Dans la partie **2.2.** intitulée « **Lois de Newton »**, on cherche d'abord à renforcer les compétences des étudiants relatives à la mise en équations d'un problème, qu'il s'agisse des étapes de bilans de forces ou de projection de la deuxième loi de Newton sur la base choisie. On cherche par ailleurs, sur l'exemple de quelques mouvements simples, à renforcer les compétences d'analyse qualitative d'une équation différentielle : stabilité des solutions, positions d'équilibre, type d'évolution, durée ou période typique d'évolution, etc. Cette pratique s'articule avec l'utilisation d'un langage de programmation pour résoudre des équations différentielles. Enfin, il s'agit aussi de confronter les étudiants aux limites de validité de certains modèles de forces, et ainsi de donner toute leur importance aux étapes de modélisation et de validation d'un modèle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.2. Lois de Newton	
Quantité de mouvement Masse d'un système. Conservation de la masse pour système fermé.	Exploiter la conservation de la masse pour un système fermé.
Quantité de mouvement d'un point et d'un système de points. Lien avec la vitesse du centre de masse d'un système fermé.	Établir l'expression de la quantité de mouvement pour un système de deux points sous la forme : **p**=m**v**(G).
Première loi de Newton : principe d'inertie. Référentiels galiléens.	Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.
Notion de force. Troisième loi de Newton.	Établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.
Deuxième loi de Newton.	Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre de masse d'un système fermé dans un référentiel galiléen. **Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant d'étudier une loi de force par exemple à l'aide d'un microcontrôleur.**
Force de gravitation. Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète. Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme.	Etudier le mouvement d'un système modélisé par un point matériel dans un champ de pesanteur uniforme en l'absence de frottement.
Modèles d'une force de frottement fluide. Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute.	Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique. Écrire une équation adimensionnée. **Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure de frottements fluides.**
Tension d'un fil. Pendule simple.	Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.

La partie **2.3. « Approche énergétique du mouvement d'un point matériel** » vise à construire une démarche alternative et complémentaire pour l'étude d'une situation relevant de la mécanique – et plus généralement de la physique – fondée sur la conservation de certaines grandeurs – ici, l'énergie mécanique. Cette approche est l'occasion d'illustrer la capacité prédictive des analyses graphiques et numériques, par exemple pour pouvoir décrire un comportement à partir d'une représentation graphique de l'énergie potentielle dans le cas d'un mouvement conservatif.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.3. Approche énergétique du mouvement d'un point matériel	
Puissance, travail et énergie cinétique Puissance et travail d'une force dans un référentiel.	Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.

Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen, dans le cas d'un système modélisé par un point matériel.	Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.
Champ de force conservative et énergie potentielle Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle. Gradient.	Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique. Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie. Déduire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.
Énergie mécanique Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif.	Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.
Mouvement conservatif à une dimension.	Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
Positions d'équilibre. Stabilité.	Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.
Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.	Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre. <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non-linéaire et faire apparaître l'effet des termes non-linéaires.

La partie **2.4.** « **Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétostatique, uniformes et stationnaires »** introduit l'expression de la force de Lorentz ainsi que deux situations de base sur lesquelles les étudiants doivent être autonomes dans la résolution, attestant en cela de l'acquisition d'une certaine aisance à ce stade de leur formation. Des situations physiques variées sont en capacité d'illustrer concrètement cette partie qui ne doit pas se réduire à des développements calculatoires ou des illustrations graphiques.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.4. Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétostatique, uniformes et stationnaires	
Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle ; champs électrique et magnétique.	Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.
Puissance de la force de Lorentz.	Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ

	magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.	Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant. Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la valeur de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétostatique.	Déterminer le rayon de la trajectoire et le sens de parcours.

Thème 4 : constitution et transformations de la matière (1)

4.1. Transformations de la matière

L'objectif de cette partie est d'amener les étudiants à mobiliser de manière autonome les notions et modèles pour décrire, au niveau macroscopique, un système physico-chimique et son évolution. Il convient que les problématiques abordées, les illustrations et les applications prennent largement appui sur des transformations chimiques rencontrées dans la vie courante, au laboratoire, en milieu industriel ou dans le monde du vivant.

Les concepts développés dans la partie **4.1.1. « Description d'un système et de son évolution vers un état final »** permettent d'envisager l'optimisation des transformations ou des analyses. L'étude quantitative de l'état final d'un système, siège d'une transformation chimique, est réalisée à partir d'une modélisation par une seule réaction chimique symbolisée par une équation de réaction à laquelle est associée une constante thermodynamique d'équilibre. Il s'agit de prévoir le sens d'évolution de systèmes homogènes ou hétérogènes et de déterminer leur composition dans l'état final.
Les compétences relatives à cette partie du programme sont ensuite réinvesties au cours de l'année, plus particulièrement au second semestre lors des transformations en solution aqueuse, et en seconde année, notamment dans le cadre de la thermodynamique chimique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.1.1. Description d'un système et de son évolution vers un état final	
Système physico-chimique Espèces physico-chimiques.	Recenser les espèces physico-chimiques présentes dans un système.
Corps purs et mélanges : concentration en quantité de matière, fraction molaire, pression partielle. Composition d'un système physico-chimique	Décrire la composition d'un système à l'aide des grandeurs physiques pertinentes.
Variables intensives et extensives.	Identifier le caractère extensif ou intensif d'une variable.
Transformation chimique d'un système Modélisation d'une transformation par une ou plusieurs réactions chimiques.	Écrire l'équation de la réaction (ou des réactions) qui modélise(nt) une transformation chimique donnée.
Équation de réaction ; constante thermodynamique d'équilibre.	**Déterminer une constante d'équilibre**.

Évolution d'un système lors d'une transformation chimique modélisée par une seule réaction chimique : avancement, activité, quotient réactionnel, critère d'évolution.	Décrire qualitativement et quantitativement un système chimique dans l'état initial ou dans un état d'avancement quelconque. Exprimer l'activité d'une espèce chimique pure ou dans un mélange dans le cas de solutions aqueuses très diluées ou de mélanges de gaz parfaits avec référence à l'état standard. Exprimer le quotient réactionnel. Prévoir le sens de l'évolution spontanée d'un système chimique.
Composition chimique du système dans l'état final : état d'équilibre chimique, transformation totale.	Identifier un état d'équilibre chimique. Déterminer la composition chimique du système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique ou de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. <u>Capacité numérique</u> : déterminer, à l'aide d'un langage de programmation, l'état final d'un système, siège d'une transformation, modélisée par une réaction à partir des conditions initiales et valeur de la constante d'équilibre.

La partie **4.1.2**. « **Évolution temporelle d'un système chimique** » permet de dégager expérimentalement les facteurs cinétiques concentration et température. Cette mise en évidence est prolongée par les premières modélisations macroscopiques d'évolution des concentrations avec des lois de vitesse d'ordre simple et d'influence de la température avec la loi d'Arrhenius.
Les déterminations d'ordre global ou apparent mettent en œuvre la méthode différentielle ou intégrale, et peuvent s'effectuer à l'aide de logiciels dédiés ou de programmes élaborés en langage de programmation, pour l'exploitation des mesures expérimentales dans le cadre d'un réacteur fermé parfaitement agité.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.1.2. **Évolution temporelle d'un système chimique**	
Cinétique en réacteur fermé de composition uniforme Vitesses de consommation d'un réactif et de formation d'un produit. Vitesse de réaction pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique supposée sans accumulation d'intermédiaires.	Relier la vitesse de réaction, dans les cas où elle est définie, à la vitesse de consommation d'un réactif ou de formation d'un produit.

Lois de vitesse : réactions sans ordre, réactions avec ordre simple (0, 1, 2), ordre global, ordre apparent. Temps de demi-vie d'un réactif, temps de demi-réaction.	Exprimer la loi de vitesse si la réaction chimique admet un ordre et déterminer la valeur de la constante cinétique à une température donnée. Déterminer la vitesse de réaction à différentes dates en utilisant une méthode numérique ou graphique. Déterminer un ordre de réaction à l'aide de la méthode différentielle ou à l'aide des temps de demi-réaction. Confirmer la valeur d'un ordre par la méthode intégrale, en se limitant strictement à une décomposition d'ordre 0, 1 ou 2 d'un unique réactif, ou se ramenant à un tel cas par dégénérescence de l'ordre ou conditions initiales stœchiométriques. **Établir une loi de vitesse à partir du suivi temporel d'une grandeur physique.**
Loi d'Arrhenius ; énergie d'activation.	Déterminer la valeur de l'énergie d'activation d'une réaction chimique à partir de valeurs de la constante cinétique à différentes températures. **Déterminer l'énergie d'activation d'une réaction chimique.**

4.2. Relations entre la structure des entités chimiques et les propriétés physiques macroscopiques

Décrivant la matière au niveau macroscopique par des espèces chimiques aux propriétés physiques et chimiques caractéristiques, le chimiste la modélise au niveau microscopique par des entités chimiques dont les structures électroniques et géométriques permettent d'interpréter et de prévoir ces propriétés.

La partie **4.2.1 « Structure des entités chimiques »** aborde l'étude de la constitution de la matière au niveau microscopique en s'appuyant sur le tableau périodique des éléments, outil essentiel du chimiste, dans l'objectif de développer progressivement les compétences relatives à l'utilisation des informations qu'il contient pour prévoir, dans cette partie, le nombre de liaisons d'un atome et la nature (polaire, ionique) des liaisons chimiques.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.2.1 Structure des entités chimiques	
Modèle de la liaison covalente Liaison covalente localisée. Schéma de Lewis d'une molécule ou d'un ion monoatomique ou d'un ion polyatomique pour les éléments des blocs s et p.	Citer les ordres de grandeur de longueurs et d'énergies de liaisons covalentes. Déterminer, pour les éléments des blocs s et p, le nombre d'électrons de valence d'un atome à partir de la position de l'élément dans le tableau périodique. Établir un schéma de Lewis pertinent pour une molécule ou un ion. Identifier les écarts à la règle de l'octet.
Géométrie et polarité des entités chimiques Électronégativité : liaison polarisée, moment dipolaire, molécule polaire.	Associer qualitativement la géométrie d'une entité à une minimisation de son énergie. Comparer les électronégativités de deux atomes à partir de données ou de leurs positions dans le tableau périodique.

	Prévoir la polarisation d'une liaison à partir des électronégativités comparées des deux atomes mis en jeu. Relier l'existence ou non d'un moment dipolaire permanent à la structure géométrique donnée d'une molécule. Déterminer direction et sens du vecteur moment dipolaire d'une liaison ou d'une molécule de géométrie donnée.

La partie 4.2.2. « **Relations structure des entités - propriétés physiques macroscopiques** » a pour objectif de permettre l'identification des interactions entre entités moléculaires ou ioniques afin d'interpréter, de prévoir ou de comparer certaines propriétés physiques : température de changement d'état, miscibilité, solubilité.
De nombreuses illustrations et applications dans la vie courante, au niveau du laboratoire ou dans le domaine du vivant peuvent être proposées.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.2.2. Relations structure des entités - propriétés physiques macroscopiques	
Interaction entre entités Interactions de van der Waals. Liaison hydrogène ou interaction par pont hydrogène.	Citer les ordres de grandeur énergétiques des interactions de van der Waals et de liaisons hydrogène. Interpréter l'évolution de températures de changement d'état de corps purs moléculaires à l'aide de l'existence d'interactions de van der Waals ou par pont hydrogène.
Solubilité ; miscibilité. Grandeurs caractéristiques et propriétés de solvants moléculaires : moment dipolaire, permittivité relative, caractère protogène. Mise en solution d'une espèce chimique moléculaire ou ionique.	Associer une propriété d'un solvant moléculaire à une ou des grandeurs caractéristiques. Interpréter la miscibilité ou la non-miscibilité de deux solvants. Interpréter la solubilité d'une espèce chimique moléculaire ou ionique.

B. Second semestre

Thème 2 : mouvements et interactions (2)

Au second semestre, le thème « **Mouvements et interactions** » est structuré en trois parties : moment cinétique, mouvements dans un champ de force centrale conservatif et mouvement d'un solide.

La partie **2.5.** « **Moment cinétique** » est l'occasion d'introduire les notions de moment cinétique et de moment d'une force. L'un des objectifs visés est que les étudiants disposent de représentations concrètes qui permettent de donner du sens aux grandeurs vectorielles et scalaires utilisées ; c'est notamment pour cela que le bras de levier est introduit. L'accent est mis sur l'identification des situations où le moment cinétique est conservé.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.5. Moment cinétique	
Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté.	Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.
Moment cinétique d'un système discret de points par rapport à un axe orienté.	Utiliser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.
Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté.	Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.
Théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen. Conservation du moment cinétique.	Identifier les cas de conservation du moment cinétique.

La partie **2.6. « Mouvements dans un champ de force centrale conservatif »** est notamment motivée par ses nombreuses applications possibles. On discute la nature de la trajectoire sur un graphe donnant l'énergie potentielle effective et, dans le cas d'un champ newtonien (lois de Kepler), on ne poursuit l'étude que dans le cas d'une trajectoire circulaire. Le caractère elliptique des trajectoires associées à un état lié est affirmé sans qu'aucune étude géométrique des ellipses ne soit prévue ; on utilise dans ce cas les constantes du mouvement (moment cinétique et énergie mécanique) pour exprimer l'énergie de la trajectoire elliptique en fonction du demi-grand axe.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.6. Mouvements dans un champ de force centrale conservatif	
Point matériel soumis à un champ de force centrale.	Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique. Établir les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.
Point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif Conservation de l'énergie mécanique. Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.	Exprimer l'énergie mécanique d'un système conservatif ponctuel à partir de l'équation du mouvement. Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective. Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, obtenir des trajectoires d'un point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif.
Cas particulier du champ newtonien Lois de Kepler.	Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.
Cas particulier du mouvement circulaire : satellite, planète.	Établir que le mouvement est uniforme et déterminer sa période. Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.

Énergie mécanique dans le cas du mouvement circulaire et dans le cas du mouvement elliptique.	Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire. Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.
Satellites terrestres Satellites géostationnaire, de localisation et de navigation, météorologique.	Différencier les orbites des satellites terrestres en fonction de leurs missions. Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.

Concernant le solide en rotation autour d'un axe fixe dans la partie **2.7. « Mouvement d'un solide »**, il s'agit de définir le mouvement en remarquant que tout point du solide décrit un cercle autour de l'axe avec une même vitesse angulaire et de déterminer la vitesse de chaque point en fonction de celle-ci et de la distance à l'axe de rotation.
Des exemples de dynamique du solide sont introduits (translation et rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen), avec toutefois des limitations strictes : l'étude générale d'un mouvement composé d'une translation dans un référentiel galiléen et d'une rotation autour d'un axe fixe dans le référentiel barycentrique ne figure pas au programme. L'étude du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe gardant une direction fixe dans un référentiel galiléen mais pour lequel l'axe de rotation est en mouvement est exclue.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.7. Mouvement d'un solide	
Description du mouvement d'un solide dans deux cas particuliers Définition d'un solide.	Différencier un solide d'un système déformable.
Translation.	Reconnaître et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire.
Rotation autour d'un axe fixe.	Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide mobile autour d'un axe fixe Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe : moment d'inertie.	Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni. Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
Couple.	Définir un couple.
Liaison pivot.	Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	Exploiter le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.

Pendule pesant.	Établir l'équation du mouvement. Établir une intégrale première du mouvement. **Réaliser l'étude énergétique d'un pendule pesant et mettre en évidence une diminution de l'énergie mécanique.** <u>Capacité numérique</u> **:** à l'aide d'un langage de programmation, mettre en évidence le non isochronisme des oscillations.
Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté, dans un référentiel galiléen Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.
Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Établir, dans ce cas, l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.

Thème 3 : l'énergie : conversions et transferts

Après avoir mis l'accent sur le passage fondamental d'une réalité microscopique à des grandeurs mesurables macroscopiques, la partie propose, en s'appuyant sur des exemples concrets, de poursuivre la description et l'étude de la matière à l'échelle macroscopique, et d'aborder les deux principes fondamentaux de la thermodynamique. Les capacités identifiées doivent être introduites en s'appuyant dès que possible sur des dispositifs expérimentaux qui permettent ainsi leur acquisition progressive et authentique.

On utilise les notations suivantes : pour une grandeur extensive « A », « a » sera la grandeur massique associée et « A_m » la grandeur molaire associée.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.1. Descriptions microscopique et macroscopique d'un système à l'équilibre	
Échelles microscopique, mésoscopique, et macroscopique. Libre parcours moyen.	Définir l'échelle mésoscopique et en expliquer la nécessité. Citer quelques ordres de grandeur de libres parcours moyens.
État microscopique et état macroscopique.	Préciser les paramètres nécessaires à la description d'un état microscopique et d'un état macroscopique sur un exemple.
Distribution des vitesses moléculaires d'un gaz (homogénéité et isotropie). Vitesse quadratique moyenne. Température cinétique. Exemple du gaz parfait monoatomique : Ec=3/2kT.	Calculer l'ordre de grandeur d'une vitesse quadratique moyenne dans un gaz parfait.
Système thermodynamique.	Identifier un système ouvert, un système fermé, un système isolé.

État d'équilibre d'un système soumis aux seules forces de pression. Pression, température, volume, équation d'état. Grandeur extensive, grandeur intensive. Exemples du gaz parfait et d'une phase condensée indilatable et incompressible.	Calculer une pression à partir d'une condition d'équilibre mécanique. Déduire une température d'une condition d'équilibre thermique. Citer quelques ordres de grandeur de volumes molaires ou massiques dans les conditions usuelles de pression et de température. Citer et utiliser l'équation d'état des gaz parfaits.
Énergie interne d'un système. Capacité thermique à volume constant dans le cas du gaz parfait.	Exprimer l'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique à partir de l'interprétation microscopique de la température. Exploiter la propriété $U_m=U_m(T)$ pour un gaz parfait.
Énergie interne et capacité thermique à volume constant d'une phase condensée considérée incompressible et indilatable.	Exploiter la propriété $U_m=U_m(T)$ pour une phase condensée incompressible et indilatable.
Approximation des phases condensées peu compressibles et peu dilatables.	Interpréter graphiquement la différence de compressibilité entre un liquide et un gaz à partir d'isothermes expérimentales.
Du gaz réel au gaz parfait.	Comparer le comportement d'un gaz réel au modèle du gaz parfait sur des réseaux d'isothermes expérimentales en coordonnées de Clapeyron ou d'Amagat.
Corps pur diphasé en équilibre. Diagramme de phases (P,T). Cas de l'équilibre liquide-vapeur : diagramme de Clapeyron (P,v), titre en vapeur.	Analyser un diagramme de phase expérimental (P,T). Proposer un jeu de variables d'état suffisant pour caractériser l'état d'équilibre d'un corps pur diphasé soumis aux seules forces de pression. Positionner les phases dans les diagrammes (P,T) et (P,v). Déterminer la composition d'un mélange diphasé en un point d'un diagramme (P,v).

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
3.2. Énergie échangée par un système au cours d'une transformation	
Transformation thermodynamique subie par un système. Évolutions isochore, isotherme, isobare, monobare, monotherme.	Définir un système adapté à une problématique donnée. Exploiter les conditions imposées par le milieu extérieur pour déterminer l'état d'équilibre final.
Travail des forces de pression. Transformations isochore, monobare.	Évaluer un travail par découpage en travaux élémentaires et sommation sur un chemin donné dans le cas d'une seule variable. Interpréter géométriquement le travail des forces de pression dans un diagramme de Clapeyron.
Transferts thermiques. Transformation adiabatique. Thermostat, transformations monotherme et isotherme.	Distinguer qualitativement les trois types de transferts thermiques : conduction, convection et rayonnement. Identifier dans une situation expérimentale le ou les systèmes modélisables par un thermostat.

Concernant les bilans d'énergie abordés dans la partie **3.3.** « **Premier principe. Bilans d'énergie »**, les expressions des fonctions d'état $U_m(T,V_m)$ et $H_m(T,P)$ sont données si le système ne relève pas du modèle gaz parfait ou du modèle de la phase condensée incompressible et indilatable.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
3.3. Premier principe. Bilans d'énergie	
Premier principe de la thermodynamique.	Définir un système fermé et établir pour ce système un bilan énergétique faisant intervenir travail et transfert thermique. Utiliser le premier principe de la thermodynamique entre deux états voisins. Exploiter l'extensivité de l'énergie interne. Distinguer le statut de la variation de l'énergie interne du statut des termes d'échange. Calculer le transfert thermique sur un chemin donné connaissant le travail et la variation de l'énergie interne.
Enthalpie d'un système. Capacité thermique à pression constante dans le cas du gaz parfait et d'une phase condensée incompressible et indilatable.	Exprimer le premier principe sous forme de bilan d'enthalpie dans le cas d'une transformation monobare avec équilibre mécanique dans l'état initial et dans l'état final. Exprimer l'enthalpie $H_m(T)$ du gaz parfait à partir de l'énergie interne. Justifier que l'enthalpie H_m d'une phase condensée peu compressible et peu dilatable peut être considérée comme une fonction de l'unique variable T. Citer l'ordre de grandeur de la capacité thermique massique de l'eau liquide.
Enthalpie associée à une transition de phase : enthalpie de fusion, enthalpie de vaporisation, enthalpie de sublimation.	Exploiter l'extensivité de l'enthalpie et réaliser des bilans énergétiques en prenant en compte des transitions de phases. **Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure d'une grandeur thermodynamique énergétique (capacité thermique, enthalpie de fusion, etc.).**

Concernant la partie **3.4.** « **Deuxième principe. Bilans d'entropie** », l'expression de la fonction d'état entropie est systématiquement donnée et sa construction n'est pas une capacité visée. On cite sans aucun développement quantitatif son interprétation en termes de désordre statistique, de façon à faciliter une interprétation intuitive des bilans d'entropie.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
3.4. Deuxième principe. Bilans d'entropie	
Fonction d'état entropie.	Interpréter qualitativement l'entropie en termes de désordre statistique à l'aide de la formule de Boltzmann fournie.
Deuxième principe de la thermodynamique : entropie créée, entropie échangée. $\Delta S=S_{ech} + S_{créé}$ avec $S_{ech}=\Sigma Q_i/T_i$.	Définir un système fermé et établir pour ce système un bilan entropique. Relier la création d'entropie à une ou plusieurs causes physiques de l'irréversibilité. Analyser le cas particulier d'un système en évolution adiabatique.

Variation d'entropie d'un système.	Utiliser l'expression fournie de la fonction d'état entropie. Exploiter l'extensivité de l'entropie.
Loi de Laplace.	Citer et utiliser la loi de Laplace et ses conditions d'application.
Cas particulier d'une transition de phase.	Citer et utiliser la relation entre les variations d'entropie et d'enthalpie associées à une transition de phase : Δh_{12} (T)=T Δs_{12} (T)

Dans la partie **3.5.** « **Machines thermiques** », l'enseignement de la thermodynamique est orienté vers des applications industrielles réelles et motivantes.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
3.5. Machines thermiques	
Application du premier principe et du deuxième principe de la thermodynamique aux machines thermiques cycliques dithermes : rendement, efficacité, théorème de Carnot.	Donner le sens des échanges énergétiques pour un moteur ou un récepteur thermique ditherme. Analyser un dispositif concret et le modéliser par une machine cyclique ditherme. Définir un rendement ou une efficacité et les relier aux énergies échangées au cours d'un cycle. Justifier et utiliser le théorème de Carnot. Citer quelques ordres de grandeur des rendements des machines thermiques réelles actuelles. Expliquer le principe de la cogénération. **Mettre en œuvre une machine thermique cyclique ditherme.**

Thème 1 : Onde et signaux (2)

La partie **1.7. « Induction et forces de Laplace »** s'appuie sur les nombreuses applications présentes dans notre environnement immédiat : boussole, moteur électrique, alternateur, transformateur, haut-parleur, plaques à induction, carte RFID... Il s'agit de restituer toute la richesse de ces applications dans un volume horaire modeste, ce qui limite les géométries envisagées et le formalisme utilisé. Le point de vue adopté cherche à mettre l'accent sur les phénomènes et sur la modélisation sommaire de leurs applications. Toute étude du champ électromoteur est exclue. L'induction et les forces de Laplace dans un circuit mobile sont introduites dans le cas d'un champ uniforme et stationnaire, soit dans le modèle des rails de Laplace, soit dans celui d'un cadre rectangulaire en rotation. Ce dernier modèle permet d'introduire la notion de dipôle magnétique et une analogie de comportement permet de l'étendre au cas de l'aiguille d'une boussole.
Le succès de cet enseignement suppose le respect de ces limitations : il ne s'agit pas d'une étude générale des phénomènes d'induction. Corrélativement, l'enseignement de cette partie doit impérativement s'appuyer sur une démarche expérimentale authentique, qu'il s'agisse d'expériences de cours ou d'activités expérimentales.

La partie **1.7.1** « **Champ magnétique** » vise à relier le champ magnétique et ses sources ; l'accent est mis sur le concept de champ vectoriel, l'analyse des symétries et des invariances, l'exploitation des représentations graphiques et la connaissance d'ordres de grandeur.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.1. Champ magnétique	
Sources de champ magnétique ; cartes de champ magnétique.	Exploiter une représentation graphique d'un champ vectoriel, identifier les zones de champ uniforme, de champ faible et l'emplacement des sources. Tracer l'allure des cartes de champs magnétiques pour un aimant droit, une spire circulaire et une bobine longue. Décrire un dispositif permettant de réaliser un champ magnétique quasi uniforme. Citer des ordres de grandeur de champs magnétiques : au voisinage d'aimants, dans un appareil d'IRM, dans le cas du champ magnétique terrestre.
Symétries et invariances des distributions de courant.	Exploiter les propriétés de symétrie et d'invariance des sources pour prévoir des propriétés du champ créé.
Lien entre le champ magnétique et l'intensité du courant.	Évaluer l'ordre de grandeur d'un champ magnétique à partir d'expressions fournies.
Moment magnétique.	Définir le moment magnétique associé à une boucle de courant plane. Associer à un aimant un moment magnétique par analogie avec une boucle de courant. Citer un ordre de grandeur du moment magnétique associé à un aimant usuel.

Dans la partie **1.7.2** « **Actions d'un champ magnétique** », l'enseignant est libre d'introduire la force de Laplace avec ou sans référence à la force de Lorentz. Il s'agit ici de se doter d'expressions opérationnelles pour étudier le mouvement dans un champ uniforme et stationnaire (soit d'une barre en translation, soit d'un moment magnétique en rotation modélisé par un cadre rectangulaire).

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.2. Actions d'un champ magnétique	
Densité linéique de la force de Laplace dans le cas d'un élément de courant filiforme.	Différencier le champ magnétique extérieur subi du champ magnétique propre créé par le courant filiforme.
Résultante et puissance des forces de Laplace.	Établir et citer l'expression de la résultante des forces de Laplace dans le cas d'une barre conductrice placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire. Exprimer la puissance des forces de Laplace.
Couple et puissance des actions mécaniques de Laplace dans le cas d'une spire rectangulaire, parcourue par un courant, en rotation autour d'un axe de symétrie de la spire passant par les deux milieux de côtés opposés et placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire orthogonal à l'axe.	Établir et exploiter l'expression du moment du couple subi en fonction du champ magnétique extérieur et du moment magnétique. Exprimer la puissance des actions mécaniques de Laplace.
Action d'un champ magnétique extérieur uniforme sur un aimant. Positions d'équilibre et stabilité.	**Mettre en œuvre un dispositif expérimental pour étudier l'action d'un champ magnétique uniforme sur une boussole.**

Effet moteur d'un champ magnétique tournant.	**Créer un champ magnétique tournant à l'aide de deux ou trois bobines et mettre en rotation une aiguille aimantée.**

La partie **1.7.3** « **Lois de l'induction** » repose sur la loi de Faraday qui se prête parfaitement à une introduction expérimentale et qui constitue un bel exemple d'illustration de l'histoire des sciences. On évoque, à ce sujet, les différents points de vue possibles sur le même phénomène selon le référentiel dans lequel on se place.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.3. Lois de l'induction	
Flux d'un champ magnétique Flux d'un champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté.	Évaluer le flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan.
Loi de Faraday Courant induit par le déplacement relatif d'une boucle conductrice par rapport à un aimant ou un circuit inducteur. Sens du courant induit.	**Décrire, mettre en œuvre et interpréter des expériences illustrant les lois de Lenz et de Faraday.**
Loi de modération de Lenz.	Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.
Force électromotrice induite, loi de Faraday.	Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'algébrisation.

La partie **1.7.4** « **Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps** » aborde le phénomène d'auto-induction puis le couplage par mutuelle inductance entre deux circuits fixes. Elle traite du modèle du transformateur de tensions.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.4. Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps	
Auto-induction Flux propre et inductance propre.	Différencier le flux propre des flux extérieurs. Utiliser la loi de modération de Lenz. Évaluer et citer l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur. **Mesurer la valeur de l'inductance propre d'une bobine.**
Étude énergétique.	Réaliser un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.
Cas de deux bobines en interaction Inductance mutuelle entre deux bobines.	Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en « influence totale »
Circuits électriques à une maille couplés par le phénomène de mutuelle induction en régime sinusoïdal forcé.	Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante. Établir le système d'équations en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents.
Étude énergétique.	Réaliser un bilan de puissance et d'énergie.

La partie **1.7.5** « **Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire** » est centrée sur la conversion de puissance. Des situations géométriques simples permettent de dégager les paramètres physiques pertinents afin de modéliser, par exemple, un dispositif de freinage.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.5. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire	
Conversion de puissance mécanique en puissance électrique Rail de Laplace. Spire rectangulaire soumise à un champ magnétique extérieur uniforme et en rotation uniforme autour d'un axe fixe orthogonal au champ magnétique.	Interpréter qualitativement les phénomènes observés. Écrire les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe. Effectuer un bilan énergétique. Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante.
Freinage par induction.	Expliquer l'origine des courants de Foucault et en citer des exemples d'utilisation. **Mettre en évidence qualitativement les courants de Foucault.**

La partie **1.8. « Introduction à la physique quantique »** est structurée autour de la présentation d'expériences réalisées depuis le début du XXème siècle. Cette partie vise à questionner la représentation classique du monde proposée dans les autres parties du programme. Les concepts essentiels abordés sont la dualité onde-particule, l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde, l'inégalité de Heisenberg spatiale et la quantification de l'énergie dans les atomes. La réflexion sur les thèmes abordés ici est avant tout qualitative ; toute dérive calculatoire exploitant les concepts propres à la physique quantique doit être évitée.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.8. Introduction à la physique quantique	
Dualité onde-particule pour la lumière et la matière Photon : énergie et impulsion.	Décrire un exemple d'expérience mettant en évidence la nécessité de la notion de photon.
Onde de matière associée à une particule. Relation de de Broglie.	Décrire un exemple d'expérience mettant en évidence le comportement ondulatoire de la matière. Évaluer des ordres de grandeurs typiques intervenant dans des phénomènes quantiques.
Introduction au formalisme quantique Fonction d'onde : introduction qualitative, interprétation probabiliste.	Interpréter une expérience d'interférences (matière ou lumière) « particule par particule » en termes probabilistes.
Inégalité de Heisenberg spatiale.	Établir par analogie avec la diffraction des ondes lumineuses, l'inégalité en ordre de grandeur : $\Delta p \, \Delta x \geq \hbar$.
Quantification de l'énergie Modèle planétaire de Bohr. Limites.	Exploiter l'hypothèse de quantification du moment cinétique orbital pour obtenir l'expression des niveaux d'énergie électronique de l'atome d'hydrogène.

Thème 4 : constitution et transformations de la matière (2)

Les modèles de description microscopique des solides sont présentés dans la partie **4.3**. « **Structure et propriétés physiques des solides** » à partir de l'observation et des propriétés macroscopiques de différents solides cristallisés que l'enseignant est libre de choisir. L'introduction du modèle du cristal parfait se fait sur l'exemple de la maille cubique à faces centrées (CFC), seule maille dont la connaissance est exigible ; l'ensemble des notions associées à cette première étude est réinvesti pour étudier d'autres structures cristallines dont la constitution est alors fournie.
L'objectif principal de l'étude des cristaux métalliques, covalents et ioniques est d'aborder une nouvelle fois la notion de modèle : les allers-retours entre le niveau macroscopique (solides de différentes natures) et la modélisation microscopique (cristal parfait) permettent de montrer les limites du modèle du cristal parfait et de confronter les prédictions faites par ce modèle aux valeurs expérimentales mesurées sur le solide réel (distances internucléaires et interatomiques, masse volumique, etc.). Ce chapitre constitue une occasion de revenir sur les positions relatives des éléments dans le tableau périodique, en lien avec la nature des interactions assurant la cohésion des édifices présentés, ainsi que sur les interactions intermoléculaires et la notion de solubilisation pour les solides ioniques et moléculaires.
Une réflexion sur les modèles conduisant à la détermination des différents types de rayons à partir des méthodes expérimentales d'analyse des structures des solides peut être proposée.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.3. Structure et propriétés physiques des solides	
Modèle du cristal parfait Solide amorphe, solide cristallin, solide semi-cristallin ; variétés allotropiques.	**Illustrer l'influence des conditions expérimentales sur la formation de solides et de solides cristallins.**
Description du cristal parfait ; population, coordinence, compacité, masse volumique. Rayons métallique, covalent, de van der Waals ou ionique.	Décrire un cristal parfait comme un assemblage de mailles parallélépipédiques. Déterminer la population, la coordinence et la compacité pour une structure fournie. Déterminer la valeur de la masse volumique d'un matériau cristallisé selon une structure cristalline fournie. Relier le rayon métallique, covalent, de van der Waals ou ionique, selon le cas, aux paramètres d'une maille donnée. **Utiliser un logiciel ou des modèles cristallins pour visualiser des mailles et des sites interstitiels et pour déterminer des paramètres géométriques.**
Description des modèles d'empilement compact de sphères identiques.	Localiser les interstices tétraédriques et octaédriques entre les plans d'empilement.
Maille conventionnelle CFC et ses sites interstitiels.	Localiser, dénombrer les sites tétraédriques et octaédriques d'une maille CFC et déterminer leur habitabilité.
Limites du modèle du cristal parfait.	Confronter des données expérimentales aux prévisions du modèle.
Métaux Cohésion et propriétés physiques des métaux.	Positionner dans le tableau périodique et reconnaître les métaux et non métaux. Relier les caractéristiques de la liaison métallique (ordre de grandeur énergétique, non directionnalité) aux propriétés macroscopiques des métaux.

Solides covalents et moléculaires Cohésion et propriétés physiques des solides covalents et moléculaires.	Relier les caractéristiques des liaisons covalentes, des interactions de van der Waals et des interactions par pont hydrogène (directionnalité ou non, ordre de grandeur des énergies mises en jeu) et les propriétés macroscopiques des solides correspondants.
Solides ioniques Cohésion et propriétés physiques des solides ioniques.	Relier les caractéristiques de l'interaction ionique dans le cadre du modèle du solide ionique parfait (ordre de grandeur de l'énergie d'interaction, non directionnalité, charge localisée) avec les propriétés macroscopiques des solides ioniques.

4.4. Transformations chimiques en solution aqueuse

Les transformations chimiques en solution aqueuse jouent un rôle essentiel en chimie, en biochimie, dans le domaine du vivant et dans les procédés industriels. Un nombre considérable de développements technologiques et d'analyses environnementales (traitement des eaux, méthodes d'analyse, extraction d'ions métalliques des minerais, générateurs électrochimiques, lutte contre la corrosion, etc) repose sur des transformations acido-basiques, de solubilisation-précipitation et d'oxydo-réduction en solution aqueuse dont la maîtrise est importante pour prévoir, interpréter et optimiser les phénomènes mis en jeu.
L'objectif de cette partie est donc de présenter différents types de réactions susceptibles d'intervenir en solution aqueuse, d'en déduire des diagrammes de prédominance ou d'existence d'espèces chimiques, notamment des diagrammes potentiel-pH, et de les utiliser comme outil de prévision et d'interprétation des transformations chimiques quel que soit le milieu donné. Les conventions de tracé seront toujours précisées.
Les choix pédagogiques relatifs au contenu des séances de travail expérimental permettront de contextualiser ces enseignements. Les dosages par titrage sont étudiés exclusivement en travaux pratiques. L'analyse des conditions choisies ou la réflexion conduisant à une proposition de protocole expérimental pour atteindre un objectif donné constituent des mises en situation des enseignements évoqués précédemment. Ces séances de travail expérimental constituent une nouvelle occasion d'aborder qualité et précision de la mesure.

Les différentes transformations en solution aqueuse abordées dans la partie **4.4.1.** « **Réactions acide-base et de précipitation** » constituent des illustrations de l'évolution des systèmes chimiques introduites au premier semestre, les étudiants étant amenés à déterminer l'état final d'un système en transformation chimique modélisée par une seule réaction chimique. On montrera qu'il est ainsi possible d'analyser et de simplifier une situation complexe pour parvenir à la décrire rigoureusement et quantitativement, en l'occurrence dans le cas des solutions aqueuses par une seule réaction. Il est cependant important de noter qu'on évite tout calcul inutile de concentration, en privilégiant l'utilisation des diagrammes pour valider le choix de la réaction mise en jeu. Dans ce cadre, aucune formule de calcul de pH n'est exigible.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.4.1. Réactions acide-base et de précipitation	
Réactions acido-basiques - constante d'acidité ; - diagramme de prédominance, de distribution ; - exemples usuels d'acides et bases : nom, formule et nature – faible ou forte – des acides sulfurique, nitrique, chlorhydrique, phosphorique, acétique, de la soude, l'ion	Identifier le caractère acido-basique d'une réaction en solution aqueuse. Écrire l'équation de la réaction modélisant une transformation en solution aqueuse en tenant compte des caractéristiques du milieu réactionnel (nature des espèces chimiques en présence, pH…) et des observations expérimentales.

hydrogénocarbonate, l'ammoniac. **Réactions de dissolution ou de précipitation** - constante de l'équation de dissolution, produit de solubilité K_s ; - solubilité et condition de précipitation ; - domaine d'existence ; - facteurs influençant la solubilité.	Déterminer la valeur de la constante d'équilibre pour une équation de réaction, combinaison linéaire d'équations dont les constantes thermodynamiques sont connues. Déterminer la composition chimique du système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. Prévoir l'état de saturation ou de non saturation d'une solution. Utiliser les diagrammes de prédominance ou d'existence pour prévoir les espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires. Exploiter des courbes d'évolution de la solubilité d'un solide en fonction d'une variable. **Mettre en œuvre une réaction acide-base et une réaction de précipitation pour réaliser une analyse quantitative en solution aqueuse.** **Illustrer un procédé de retraitement, de recyclage, de séparation en solution aqueuse.**

L'analyse de transformations mettant en jeu des oxydants et réducteurs usuels et des piles permettent d'aborder, dans la partie **4.4.2.** « **Réactions d'oxydo-réduction** » les différents concepts associés aux phénomènes d'oxydo-réduction en solution aqueuse. La relation de Nernst (admise en première année) ainsi que la relation entre la constante thermodynamique d'équilibre d'une réaction d'oxydo-réduction et les potentiels standard permettent de prévoir l'évolution des systèmes et le caractère favorisé des transformations.
Afin de pouvoir étudier l'influence du milieu sur les espèces oxydantes ou réductrices présentes, les acquis sur les réactions acido-basiques et de précipitation-solubilisation en solution aqueuse sont réinvestis.
Enfin, les diagrammes potentiel-pH sont présentés puis superposés pour prévoir ou interpréter thermodynamiquement des transformations chimiques ; la confrontation avec la réalité amenant à aborder éventuellement des blocages cinétiques en lien avec l'évolution temporelle des systèmes étudiée au premier semestre.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.4.2. Réactions d'oxydo-réduction	
Oxydants et réducteurs, réactions d'oxydo-réduction Nombre d'oxydation. Exemples d'oxydants et de réducteurs minéraux usuels : nom, nature et formule des ions thiosulfate, permanganate, hypochlorite, du peroxyde d'hydrogène.	Relier la position d'un élément dans le tableau périodique et le caractère oxydant ou réducteur du corps simple correspondant. Prévoir les nombres d'oxydation extrêmes d'un élément à partir de sa position dans le tableau périodique. Identifier l'oxydant et le réducteur d'un couple.
Pile, tension à vide, potentiel d'électrode, formule de Nernst, électrodes de référence.	Décrire le fonctionnement d'une pile à partir d'une mesure de tension à vide ou à partir des potentiels d'électrode.
Diagrammes de prédominance ou d'existence.	Utiliser les diagrammes de prédominance ou d'existence pour prévoir les espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires.

Aspect thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction. Dismutation et médiamutation.	Prévoir qualitativement ou quantitativement le caractère thermodynamiquement favorisé ou défavorisé d'une réaction d'oxydo-réduction à partir des potentiels standard des couples. **Mettre en œuvre une réaction d'oxydo-réduction pour réaliser une analyse quantitative en solution aqueuse.** **Réaliser une pile et étudier son fonctionnement.**
Diagrammes potentiel-pH Principe de construction, lecture et utilisation d'un diagramme potentiel-pH.	Identifier les différents domaines d'un diagramme fourni associés à des espèces chimiques données. Déterminer la valeur de la pente d'une frontière dans un diagramme potentiel-pH. Justifier la position d'une frontière verticale. Prévoir le caractère thermodynamiquement favorisé ou non d'une transformation par superposition de diagrammes.
Diagramme potentiel-pH de l'eau	Prévoir la stabilité des espèces dans l'eau. Prévoir une dismutation ou médiamutation en fonction du pH du milieu. Confronter les prévisions à des données expérimentales et interpréter d'éventuels écarts en termes cinétiques. **Mettre en œuvre des réactions d'oxydo-réduction en s'appuyant sur l'utilisation de diagrammes potentiel-pH.**

Annexe 1 : matériel

La liste ci-dessous regroupe le matériel que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice simplifiée fournie sous forme de version papier ou numérique. Une utilisation de matériel hors de cette liste lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'une introduction guidée suffisamment détaillée.

1. Domaine optique

- Goniomètre
- Viseur à frontale fixe
- Lunette auto-collimatrice
- Spectromètre à fibre optique
- Laser à gaz
- Lampes spectrales
- Source de lumière blanche à condenseur

2. Domaine électrique

- Oscilloscope numérique
- Carte d'acquisition et logiciel dédié
- Générateur de signaux Basse Fréquence
- Multimètre numérique
- Multiplieur analogique

- Émetteur et récepteur acoustique (domaine audible et domaine ultrasonore)
- Microcontrôleur

3. Domaines mécanique et thermodynamique

- Dynamomètre
- Capteur de pression
- Accéléromètre
- Stroboscope
- Webcam avec logiciel dédié
- Appareil photo numérique ou caméra numérique
- Thermomètre, thermocouple, thermistance, capteur infra-rouge
- Calorimètre
- Machines thermiques dithermes

4. Domaine constitution et transformations de la matière

- Verrerie classique de chimie analytique : burettes, pipettes jaugées et graduées, fioles jaugées, erlenmeyers, béchers, etc.
- Matériel classique du laboratoire de chimie : dispositifs de chauffage ou de refroidissement (bain-marie, bain froid, etc.), dispositifs d'agitation, matériel de filtration sous pression atmosphérique et sous pression réduite
- Spectrophotomètre UV-visible
- pH-mètre et électrodes de mesure
- Voltmètre et électrodes
- Conductimètre et cellule de mesure
- Thermomètre
- Balance de précision

Annexe 2 : outils mathématiques

L'utilisation d'outils mathématiques est indispensable en physique comme en chimie.
La capacité à mettre en œuvre de manière autonome certains de ces outils mathématiques dans le cadre des activités relevant de la physique-chimie fait partie des compétences exigibles à la fin de la première année. Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que le niveau de maîtrise attendu en fin de première année. Il est complété dans le programme de seconde année.
Cependant les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité sont traitées à l'aide d'outils numériques (calculatrices, logiciels de calcul numérique).

Outils mathématiques	Capacités exigibles
1. Équations algébriques	
Systèmes linéaires de n équations à p inconnues.	Identifier les variables (inconnues) nécessaires à la modélisation du problème sous forme d'un système d'équations linéaires. Donner l'expression formelle des solutions dans le seul cas n = p = 2.
Équations non linéaires.	Représenter graphiquement une équation de la forme f(x) = g(x). Interpréter graphiquement la ou les solutions.
2. Équations différentielles	
Équations différentielles linéaires à coefficients constants.	Identifier l'ordre. Mettre l'équation sous forme canonique.

Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants : y' + ay = f(x).	Trouver la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène). Trouver l'expression des solutions lorsque f(x) est constante ou de la forme A.cos(ωx+φ) (en utilisant la notation complexe).
Équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants : y'' + ay' + by = f(x).	Utiliser l'équation caractéristique pour trouver la solution générale de l'équation sans second membre. Prévoir le caractère borné ou non de ses solutions (critère de stabilité). Trouver l'expression des solutions lorsque f(x) est constante ou de la forme A.exp(λx) avec λ complexe. Trouver la solution de l'équation complète correspondant à des conditions initiales données. Représenter graphiquement cette solution.
Autres équations différentielles d'ordre 1 ou 2.	Obtenir une intégrale première d'une équation de Newton x'' = f(x) et l'exploiter graphiquement. Séparer les variables d'une équation du premier ordre à variables séparables. Faire le lien entre les conditions initiales et le graphe de la solution correspondante.
3. Fonctions	
Fonctions usuelles.	Exponentielle, logarithme népérien et décimal, cosinus, sinus, tangente, puissance réelle ($x \rightarrow x^a$).
Dérivée. Notation dx/dt.	Utiliser la formule de Taylor à l'ordre un ou deux ; interpréter graphiquement.
Développements limités.	Connaître et utiliser les développements limités à l'ordre 1 des fonctions $(1 + x)^\alpha$, e^x et ln(1 + x), et à l'ordre 2 des fonctions cos(x) et sin(x).
Primitive et intégrale.	Interpréter l'intégrale comme une somme de contributions infinitésimales, en lien avec la méthode des rectangles en mathématiques.
Valeur moyenne.	Exprimer la valeur moyenne sous forme d'une intégrale. Connaître la valeur moyenne sur une période des fonctions cos, sin, $\cos^2$ et $\sin^2$.
Représentation graphique d'une fonction.	Déterminer un comportement asymptotique ; rechercher un extremum local. Utiliser des échelles logarithmiques ; identifier une loi de puissance à une droite en échelle log-log.
Développement en série de Fourier d'une fonction périodique.	Utiliser un développement en série de Fourier fourni par un formulaire.
4. Géométrie	
Vecteurs et système de coordonnées.	Exprimer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Utiliser les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
Projection d'un vecteur et produit scalaire.	Interpréter géométriquement le produit scalaire et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée.

	Utiliser la bilinéarité et le caractère symétrique du produit scalaire.
Produit vectoriel.	Interpréter géométriquement le produit vectoriel et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée directe. Utiliser la bilinéarité et le caractère antisymétrique du produit vectoriel. Faire le lien avec l'orientation des trièdres.
Transformations géométriques.	Utiliser les symétries par rapport à un plan, les translations et les rotations de l'espace. Utiliser leur effet sur l'orientation de l'espace.
Courbes planes.	Reconnaître l'équation cartésienne d'une droite, d'un cercle. Utiliser la représentation polaire d'une courbe plane ; utiliser un grapheur pour obtenir son tracé.
Courbes planes paramétrées.	Identifier une ellipse à l'aide de sa représentation paramétrique ($x = a.\cos(\omega t)$, $y = b.\cos(\omega t\text{-}\varphi)$) et la tracer dans les cas particuliers $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ et $\varphi = \pi$.
Longueurs, aires et volumes classiques.	Citer les expressions du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'une sphère, du volume d'une boule, du volume d'un cylindre.
Barycentre d'un système de points.	Énoncer la définition du barycentre. Utiliser son associativité. Exploiter les symétries pour prévoir la position du barycentre d'un système homogène.
5. Trigonométrie	
Angle orienté.	Définir une convention d'orientation des angles d'un plan (euclidien) et lire des angles orientés. Relier l'orientation d'un axe de rotation à l'orientation positive des angles d'un plan perpendiculaire à cet axe.
Fonctions cosinus, sinus et tangente.	Utiliser le cercle trigonométrique et l'interprétation géométrique des fonctions cosinus, sinus et tangente comme aide-mémoire : relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, relations entre fonctions trigonométriques et toutes relations du type $\cos(\pi \pm x)$ et $\cos(\pi/2 \pm x)$, parités, périodicité, valeurs des fonctions pour les angles usuels. Citer les formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus ; utiliser un formulaire dans les autres cas.
Nombres complexes et représentation dans le plan. Somme et produit de nombres complexes.	Calculer et interpréter géométriquement la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument d'un nombre complexe.
6. Analyse vectorielle	
Gradient d'un champ scalaire.	Citer le lien entre le gradient et la différentielle. Citer l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles. Citer l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes ; utiliser un formulaire fourni en coordonnées cylindriques ou sphériques. Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est

	perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.

Annexe 3 : outils numériques

La prise en compte de capacités de codage en langage Python dans la formation des étudiants inclue l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques. Elle vise à une meilleure appréhension des principes mis en œuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée. Elle a aussi pour objectif de mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la physique et de la chimie. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la physique-chimie comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.
Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que les capacités exigibles en fin de première année. Il sera complété dans le programme de physique-chimie de seconde année.

Domaines numériques	Capacités exigibles
1. Outils graphiques	
Représentation graphique d'un nuage de points.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **matplotlib** pour représenter un nuage de points.
Représentation graphique d'une fonction.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **matplotlib** pour tracer la courbe représentative d'une fonction.
Courbes planes paramétrées.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **matplotlib** pour tracer une courbe plane paramétrée.
2. Équations algébriques	
Résolution d'une équation algébrique ou d'une équation transcendante : méthode dichotomique.	Déterminer, en s'appuyant sur une représentation graphique, un intervalle adapté à la recherche numérique d'une racine par une méthode dichotomique. Mettre en œuvre une méthode dichotomique afin de résoudre une équation avec une précision donnée. Utiliser la fonction **bisect** de la bibliothèque **scipy.optimize** (sa spécification étant fournie).
3. Intégration – Dérivation	
Calcul approché d'une intégrale sur un segment par la méthode des rectangles.	Mettre en œuvre la méthode des rectangles pour calculer une valeur approchée d'une intégrale sur un segment.
Calcul approché du nombre dérivé d'une fonction en un point.	Utiliser un schéma numérique pour déterminer une valeur approchée du nombre dérivé d'une fonction en un point.
4. Équations différentielles	
Équations différentielles d'ordre 1.	Mettre en œuvre la méthode d'Euler explicite afin de résoudre une équation différentielle d'ordre 1.
Équations différentielles d'ordre supérieur ou égal à 2	Transformer une équation différentielle d'ordre n en un système différentiel de n équations d'ordre 1. Utiliser la fonction **odeint** de la bibliothèque **scipy.integrate** (sa spécification étant fournie).

5. Probabilités – statistiques	
Variable aléatoire.	Utiliser les fonctions de base des bibliothèques **random** et/ou **numpy** (leurs spécifications étant fournies) pour réaliser des tirages d'une variable aléatoire. Utiliser la fonction **hist** de la bibliothèque **matplotlib.pyplot** (sa spécification étant fournie) pour représenter les résultats d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire. Déterminer la moyenne et l'écart-type d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire.
Régression linéaire.	Utiliser la fonction **polyfit** de la bibliothèque **numpy** (sa spécification étant fournie) pour exploiter des données. Utiliser la fonction **random.normal** de la bibliothèque **numpy** (sa spécification étant fournie) pour simuler un processus aléatoire.

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voies Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI) et Mathématiques et physique (MP)

Annexe 3
Programmes de sciences industrielles de l'ingénieur

http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

PROGRAMME DE SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR DANS LA FILIÈRE MPSI-MP

1. Objectifs de formation

1.1. Finalité

Le programme de sciences industrielles de l'ingénieur de la filière MPSI-MP s'inscrit dans un parcours de formation initiale pour accéder au titre d'ingénieur. Il trouve ses racines dans le choix de spécialités scientifiques au cycle terminal du lycée. L'objectif de ce programme est de proposer des contenus d'enseignements qui permettent de développer progressivement les compétences nécessaires à l'intégration dans une grande école et à l'exercice des métiers d'ingénieurs. Ce programme est ambitieux quant au développement de compétences scientifiques et technologiques qui soutiennent l'expertise du futur ingénieur. Il l'est aussi pour le développement de compétences transversales nécessaires pour communiquer, travailler en équipe, exercer un sens critique et des responsabilités de manière éthique et déontologique. En cohérence avec les objectifs du cycle initial de la formation aux métiers de l'ingénierie, ce programme contribue à la pédagogie par les STEM (*Science, Technology, Engineering and Mathematics*).

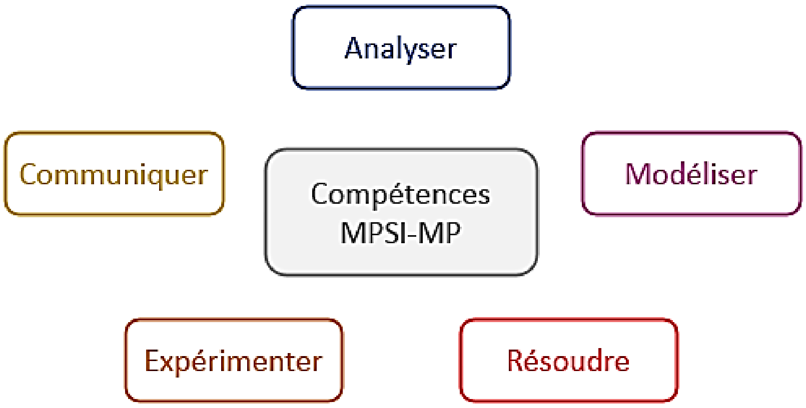
1.2. Objectifs généraux

Les ingénieurs doivent être en capacité de résoudre de façon innovante des problèmes inédits afin de répondre aux besoins des personnes et d'apporter un progrès dans leur qualité de vie. Ils participent aux processus de développement des systèmes à chaque étape de leur cycle de vie, de la caractérisation du besoin jusqu'au recyclage, en respectant les contraintes de développement durable et d'écoconception.

Cette capacité des ingénieurs à proposer des solutions innovantes est plus que jamais indispensable au développement d'une industrie capable de faire face aux grands enjeux sociétaux, économiques et environnementaux. Ces enjeux sont notamment ceux de la transition énergétique, la préservation de la qualité de l'environnement, la progression des technologies du numérique, la mutation des métropoles et des territoires, l'évolution des besoins alimentaires et des exigences en matière de santé pour des humains toujours plus nombreux sur notre planète. Dans un contexte de concurrence mondialisée, la capacité d'innovation des ingénieurs est nécessaire à l'industrie de notre pays qui doit demeurer compétitive et souveraine.

Les objectifs généraux du programme de MPSI-MP visent à développer les compétences clés dans le large domaine des sciences industrielles de l'ingénieur qui sont nécessaires à l'exercice du métier d'ingénieur. Celles-ci sont consolidées et complétées par la formation poursuivie jusqu'à l'obtention du titre d'ingénieur.

L'enseignement en MPSI-MP se donne également pour objectif d'apporter aux étudiants des méthodes et des outils qui leur permettront de s'adapter aux évolutions permanentes des sciences et des technologies et de communiquer avec l'ensemble des acteurs associés à l'exercice des métiers d'ingénieurs et scientifiques.

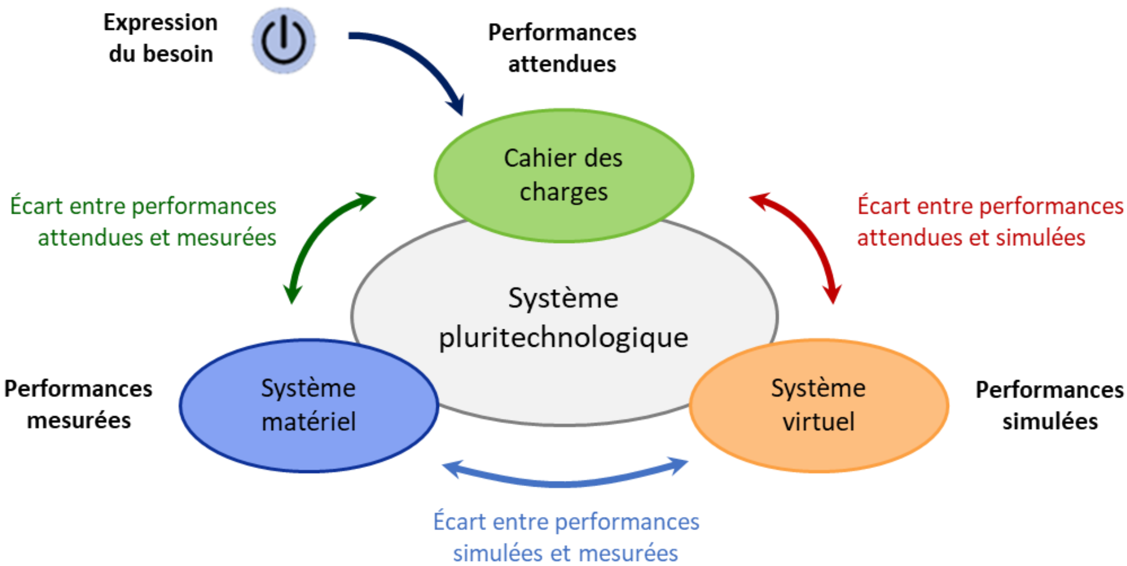


Les compétences générales de l'ingénieur développées en MPSI-MP

1.3. La démarche des enseignements en MPSI-MP

L'approche pédagogique et didactique des enseignements en MPSI-MP s'organise autour de systèmes pluritechnologiques. Chaque système est défini à partir de besoins fonctionnels et d'exigences, de modèles numériques et d'un système matériel. Un système sera étudié dans sa globalité à partir de ces trois approches imbriquées :

- la réalité du besoin ou exigences fonctionnelles. Elle se décline dans le cahier des charges défini avec un client ;
- la réalité virtuelle d'un système. Elle se traduit dans l'élaboration d'un modèle permettant de simuler son comportement afin d'en prévoir et d'en évaluer les performances ;
- la réalité matérielle d'un système. Les performances du système matériel sont mesurées par expérimentation.



La démarche pédagogique et didactique en sciences industrielles de l'ingénieur

Les objets et les systèmes, dans leur complexité, mobilisent plusieurs formes d'énergie et sont communicants. Ils sont pluritechnologiques.

La démarche en sciences industrielles de l'ingénieur en MPSI-MP vise à :

- s'approprier les trois réalités du système pluritechnologique (le cahier des charges, le système virtuel et le système matériel) ;
- comparer les performances issues de ces trois réalités ;
- optimiser le système virtuel et le système matériel afin de faire converger leurs performances vers celles attendues au cahier des charges.

Les contenus du programme de MPSI-MP permettent aux étudiants d'investir complètement la démarche de l'ingénieur en s'intéressant à toutes les représentations des systèmes. Pour cela les enseignements en MPSI-MP installent progressivement l'ensemble des connaissances et des compétences nécessaires à la maitrise des différentes représentations d'un même objet ou système, à la comparaison des différentes performances, à l'optimisation des systèmes dans leurs réalités numérique et matérielle, afin de répondre aux attentes du client.

Des solutions innovantes sont modélisées de façon numérique. Ces modèles numériques permettent la simulation du comportement des systèmes pluritechnologiques afin d'obtenir des performances simulées. Une démarche expérimentale menée sur des systèmes existants vient enrichir les compétences des étudiants au service de la démarche de l'ingénieur. Elle permet la comparaison des performances simulées et mesurées avec celles attendues au cahier des charges afin d'optimiser tout ou partie du modèle numérique.

1.4. Usage de la liberté pédagogique

Le programme définit les obligations faites aux professeurs des contenus à enseigner, les mêmes pour tous les étudiants, garantes de l'équité d'une formation offrant à chacun les mêmes chances de réussite. Les finalités et objectifs généraux de la formation en sciences industrielles de l'ingénieur laissent aux enseignants le choix pédagogique de l'organisation des enseignements et de ses méthodes. La nature des enseignements en sciences industrielles de l'ingénieur suppose la mise en œuvre d'une didactique naturellement liée à la discipline qui impose une réflexion sur le développement des compétences, la transmission des connaissances et leur ordonnancement dans la programmation des apprentissages. Les supports d'enseignement sont choisis afin d'être représentatifs des solutions innovantes pour répondre aux besoins actuels. Les solutions contemporaines sont mises en perspective avec l'histoire des sociétés, des sciences et des techniques, avec les préoccupations de respect de l'environnement et des ressources naturelles, de façon à construire les bases d'une culture d'ingénieur éthique et responsable.

2. Programme

Le programme est organisé en cinq compétences générales déclinées en compétences attendues qui pourront être évaluées en fin de cycle.

Partant de ces indications de fin de cycle, le programme détaille les compétences développées, précise les connaissances associées et fournit un indicateur de positionnement temporel dans le cycle.

Les compétences développées et les connaissances associées sont positionnées dans les semestres, cela signifie :

- qu'elles doivent être acquises en fin du semestre précisé ;
- qu'elles ont pu être introduites au cours des semestres précédents ;
- qu'elles peuvent être mobilisées aux semestres suivants.

Les compétences générales et compétences attendues sont détaillées ci-dessous.

A – Analyser
- A1 – Analyser le besoin et les exigences
- A2 – Définir les frontières de l'analyse
- A3 – Analyser l'organisation fonctionnelle et structurelle
- A4 – Analyser les performances et les écarts

B – Modéliser
- B1 – Choisir les grandeurs physiques et les caractériser
- B2 – Proposer un modèle de connaissance et de comportement
- B3 – Valider un modèle

C – Résoudre
- C1 – Proposer une démarche de résolution
- C2 – Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique
- C3 – Mettre en œuvre une démarche de résolution numérique

D – Expérimenter
- D1 – Mettre en œuvre un système
- D2 – Proposer et justifier un protocole expérimental
- D3 – Mettre en œuvre un protocole expérimental

E – Communiquer
- E1 – Rechercher et traiter des informations
- E2 – Produire et échanger de l'information

Les liens avec l'enseignement d'informatique du tronc commun sont identifiés par le symbole $\leftrightarrows I$.

Les compétences identifiées par le signe (*) sont développées uniquement pour les MPSI option Sciences de l'Ingénieur au second semestre bénéficiant des 2 heures hebdomadaires d'activités pratiques à caractère expérimentale (TP).

A – Analyser

A1 – Analyser le besoin et les exigences

<table>
<tr><th>Compétences développées</th><th>Connaissances associées</th><th>Semestre</th></tr>
<tr><td>Décrire le besoin et les exigences.</td><td>Ingénierie Système et diagrammes associés.
Cahier des charges.</td><td>S1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Commentaires
La connaissance de la syntaxe d’un langage d’Ingénierie Système n’est pas exigible.
La structure des diagrammes d’Ingénierie Système (SysML) est fournie. Ils peuvent être proposés à lire ou à compléter.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Traduire un besoin fonctionnel en exigences.</td><td rowspan="4">Impact environnemental.
Analyse du cycle de vie (extraction, fabrication, utilisation, fin de vie, recyclage et transport).
Critères et niveaux.</td><td rowspan="4">S1</td></tr>
<tr><td>Définir les domaines d’application et les critères technico-économiques et environnementaux.</td></tr>
<tr><td>Qualifier et quantifier les exigences.</td></tr>
<tr><td>Évaluer l’impact environnemental et sociétal.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Commentaire
Il s’agit de prendre en compte les exigences liées au développement durable et sensibiliser aux aspects sociétaux.</td></tr>
</table>

A2 – Définir les frontières de l'analyse

<table>
<tr><th>Compétences développées</th><th>Connaissances associées</th><th>Semestre</th></tr>
<tr><td>Isoler un système et justifier l’isolement.</td><td rowspan="2">Frontière de l’étude.
Milieu extérieur.</td><td rowspan="2">S2</td></tr>
<tr><td>Définir les éléments influents du milieu extérieur.</td></tr>
<tr><td>Identifier la nature des flux échangés traversant la frontière d’étude.</td><td>Flux de matière, d’énergie et d’information (définition, nature et codage).</td><td>S2</td></tr>
</table>

A3 – Analyser l'organisation fonctionnelle et structurelle

Compétences développées	**Connaissances associées**	**Semestre**
Associer les fonctions aux constituants.	Architecture fonctionnelle et structurelle. Diagramme de définition de blocs. Diagramme de bloc interne. Chaines fonctionnelles (chaine d'information et chaine de puissance). Fonctions acquérir, traiter et communiquer. Fonctions alimenter, moduler, convertir, transmettre et agir. Systèmes asservis et séquentiels.	S2
Justifier le choix des constituants dédiés aux fonctions d'un système.		S4
Identifier et décrire les chaines fonctionnelles du système.		S1
Identifier et décrire les liens entre les chaines fonctionnelles.		S1
Commentaires *La description des chaines fonctionnelles de différents systèmes permet de construire une culture technologique.* *Les chaines fonctionnelles, diagrammes de définition de blocs et diagrammes de bloc interne peuvent être à lire ou à compléter avec les éléments syntaxiques fournis.*		

Caractériser un constituant de la chaine d'information.	Capteurs : – fonctions ; – nature des grandeurs physiques d'entrées et de sorties ; – nature du signal et support de l'information.	S2
Analyser un algorithme. ⇆ *I*	Définition et appel d'une fonction. Variables (type et portée). Structures algorithmiques (boucles et tests).	S1
Analyser les principes d'intelligence artificielle. ⇆ *I*	Régression et classification, apprentissages supervisé et non supervisé. Phases d'apprentissage et d'inférence. Modèle linéaire monovariable ou multivariable. Réseaux de neurones (couches d'entrée, cachées et de sortie, neurones, biais, poids et fonction d'activation).	S3

Interpréter tout ou partie de l'évolution temporelle d'un système séquentiel.	Diagramme d'états. État, transition, événement, condition de garde, activité et action.	S2
Identifier la structure d'un système asservi.	Grandeurs d'entrée et de sortie. Capteur, chaine directe, chaine de retour, commande, comparateur, consigne, correcteur et perturbation. Poursuite et régulation.	S1
Commentaires *La connaissance de la syntaxe d'un langage d'Ingénierie Système n'est pas exigible. La structure des diagrammes d'Ingénierie Système (SysML) est fournie. Ils peuvent être proposés à lire ou à compléter.* *L'évolution temporelle des états et des variables d'un diagramme d'états est représentée sous la forme d'un chronogramme.*		

A4 – Analyser les performances et les écarts

Compétences développées	**Connaissances associées**	**Semestre**
Extraire un indicateur de performance pertinent à partir du cahier des charges ou de résultats issus de l'expérimentation ou de la simulation.	Ordre de grandeur. Homogénéité des résultats. Matrice de confusion (tableau de contingence), sensibilité et spécificité d'un test.	S4
Caractériser les écarts entre les performances.		
Interpréter et vérifier la cohérence des résultats obtenus expérimentalement, analytiquement ou numériquement. ⇆ *I*		
Rechercher et proposer des causes aux écarts constatés.		

B – Modéliser

B1 – Choisir les grandeurs physiques et les caractériser

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Identifier les performances à prévoir ou à évaluer.	Grandeurs flux, grandeurs effort.	S4
Identifier les grandeurs d'entrée et de sortie d’un modèle.		
Identifier les paramètres d’un modèle.		
Identifier et justifier les hypothèses nécessaires à la modélisation.		

B2 – Proposer un modèle de connaissance et de comportement

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Choisir un modèle adapté aux performances à prévoir ou à évaluer.	Phénomènes physiques. Domaine de validité. Solide indéformable.	S4
Compléter un modèle multiphysique.	Paramètres d'un modèle. Grandeurs flux et effort. Sources parfaites.	S3
Associer un modèle aux composants des chaines fonctionnelles.		
Commentaires *Un logiciel de modélisation multiphysique permettant d'assembler des composants technologiques issus d'une bibliothèque est privilégié pour la modélisation des systèmes pluritechnologiques. Les modèles mis en œuvre couvrent différents domaines (électrique, mécanique, thermique, hydraulique et pneumatique).*		

<table>
<tr><td>Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert.</td><td>Systèmes linéaires continus et invariants :
– causalité ;
– modélisation par équations différentielles ;
– transformées de Laplace ;
– fonction de transfert ;
– forme canonique ;
– gain, ordre, classe, pôles et zéros.</td><td>S1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Commentaires
L’utilisation des transformées de Laplace ne nécessite aucun prérequis. Leur présentation se limite à leurs énoncés et aux propriétés du calcul symbolique strictement nécessaires. Les théorèmes de la valeur finale, de la valeur initiale et du retard sont donnés sans démonstration.</td></tr>
</table>

Modéliser le signal d'entrée.	Signaux canoniques d’entrée : – impulsion ; – échelon ; – rampe ; – signaux périodiques.	S1
Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle. ⇆ *I*	Premier ordre, deuxième ordre, dérivateur, intégrateur, gain et retard. Paramètres caractéristiques. Allures des réponses indicielle et fréquentielle Diagramme de Bode.	S2
Modéliser un système par schéma-blocs.	Schéma-blocs organique d'un système. Élaboration, manipulation et réduction de schéma-blocs. Fonctions de transfert : – chaîne directe et chaîne de retour ; – boucle ouverte et boucle fermée.	S1
Simplifier un modèle.	Linéarisation d'un modèle autour d'un point de fonctionnement. Pôles dominants et réduction de l’ordre du modèle : – principe ; – justification ; – limites.	S3
Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.	Solide indéformable : – définition ; – repère ; – équivalence solide/repère ; – volume et masse ; – centre d'inertie ; – matrice d'inertie.	S3

Commentaire
Les calculs intégraux des éléments d'inertie (matrice et centre d’inertie) ne donnent pas lieu à évaluation.

<table>
<tr><td>Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques.</td><td rowspan="2">Liaisons :
– liaisons parfaites ;
– degrés de liberté ;
– classe d'équivalence cinématique ;
– géométrie des contacts entre deux solides ;
– liaisons normalisées entre solides, caractéristiques géométriques et repères d’expression privilégiés ;
– paramètres géométriques linéaires et angulaires ;
– symboles normalisés.
Graphe de liaisons.
Schéma cinématique.</td><td rowspan="2">S1</td></tr>
<tr><td>Proposer un modèle cinématique à partir d'un système réel ou d'une maquette numérique.</td></tr>
<tr><td>Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.</td><td>Vecteur position.
Mouvements simple (translation et rotation) et composé.
Trajectoire d'un point.
Définition du vecteur vitesse et du vecteur taux de rotation.
Définition du vecteur accélération.
Composition des mouvements.
Définition du contact ponctuel entre deux solides (roulement et glissement).
Torseur cinématique (champ des vecteurs vitesse).</td><td>S2</td></tr>
<tr><td>Modéliser une action mécanique.</td><td>Modèle local (densités linéique, surfacique et volumique d'effort).
Actions à distance et de contact.
Modèle global.
Passage d’un modèle local au modèle global.
Frottements sec (lois de Coulomb) et visqueux.
Torseur des actions mécaniques transmissibles.
Torseur d’une action mécanique extérieure.
Torseurs couple et glisseur.</td><td>S2</td></tr>
<tr><td>Simplifier un modèle de mécanisme.</td><td>Associations de liaisons en série et en parallèle.
Liaisons équivalentes (approches cinématique et statique).
Conditions et limites de la modélisation plane.</td><td>S2</td></tr>
</table>

Décrire le comportement d'un système séquentiel.	Diagramme d'états.	S2
Commentaire *La description graphique permet de s'affranchir d'un langage de programmation spécifique*.		

B3 – Valider un modèle

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.	Critères de performances.	S2
Préciser les limites de validité d'un modèle.	Point de fonctionnement. Non-linéarités (courbure, hystérésis, saturation et seuil) et retard pur.	S4
Modifier les paramètres et enrichir le modèle pour minimiser l'écart entre les résultats analytiques et/ou numériques et les résultats expérimentaux.		S4

C – Résoudre

C1 – Proposer une démarche de résolution

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.	Critères du cahier des charges : – stabilité (marges de stabilité, amortissement et dépassement relatif) ; – précision (erreur/écart statique et erreur de trainage) ; – rapidité (temps de réponse à 5 %, bande passante et retard de trainage).	S2
Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.	Compensation de pôles, réglage de marges, amortissement, rapidité et bande passante. Application aux correcteurs de type proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase.	S3

Choisir une démarche de résolution d'un problème d'ingénierie numérique ou d'intelligence artificielle. ⇆ ***I***	Décomposition d'un problème complexe en sous problèmes simples. Choix des algorithmes (réseaux de neurones, *k* plus proches voisins et régression linéaire multiple).	S3
Proposer une démarche permettant d'obtenir une loi entrée-sortie géométrique. ⇆ *I*	Fermetures géométriques.	S1
Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.	Graphe de structure. Choix des isolements. Choix des équations à écrire pour appliquer le principe fondamental de la statique ou le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen. Théorème de l'énergie cinétique.	S3

C2 – Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique

Compétences développées	**Connaissances associées**	**Semestre**
Déterminer la réponse temporelle. ⇆ *I*	Expressions des solutions des équations différentielles pour les systèmes d'ordre 1 et 2 soumis à une entrée échelon. Allures des solutions des équations différentielles d'ordre 1 et 2 pour les entrées de type impulsion, échelon, rampe et sinus (en régime permanent).	S1
Commentaire *La résolution d'équations différentielles et les transformées inverses de Laplace ne sont pas au programme.*		

Déterminer la réponse fréquentielle. ⇆ ***I***	Allures des diagrammes réel et asymptotique de Bode.	S2
Déterminer les performances d'un système asservi.	Stabilité d'un système asservi : – définition ; – amortissement ; – position des pôles dans le plan complexe ; – marges de stabilité. Rapidité d'un système : – temps de réponse à 5 % ; – bande passante. Précision d'un système asservi : – théorème de la valeur finale ; – écart/erreur statique (consigne ou perturbation) ; – erreur de trainage vis-à-vis de la consigne ; – lien entre la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte et l'écart statique.	S2
Commentaire *Les critères de Routh et de Nyquist ainsi que les diagrammes de Black-Nichols et de Nyquist, ne sont pas au programme.*		

Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.	Correcteurs proportionnel et proportionnel intégral.	S4
Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère.	Trajectoire d'un point. Mouvements de translation et de rotation. Mouvement composé.	S1
Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques. ⇆ *I*	Loi entrée-sortie géométrique. Loi entrée-sortie cinématique. Transmetteurs de puissance (vis-écrou, roue et vis sans fin, trains d'engrenages simples, pignon-crémaillère et poulies-courroie).	S2
Commentaire *Aucune connaissance spécifique aux trains d'engrenages épicycloïdaux n'est exigible.*		

Déterminer les actions mécaniques en statique.	Référentiel galiléen. Principe fondamental de la statique. Principe des actions réciproques.	S2

Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.	Torseurs cinétique et dynamique d’un solide ou d’un ensemble de solides, par rapport à un référentiel galiléen. Principe fondamental de la dynamique en référentiel galiléen. Énergie cinétique. Inertie et masse équivalentes. Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ou à un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport au repère galiléen. Puissance intérieure à un ensemble de solides. Théorème de l'énergie cinétique. Rendement en régime permanent.	S3
Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.		

C3 – Mettre en œuvre une démarche de résolution numérique

Compétences développées	**Connaissances associées**	**Semestre**
Mener une simulation numérique. ⇆ *I*	Choix des grandeurs physiques. Choix du solveur et de ses paramètres (pas de discrétisation et durée de la simulation). Choix des paramètres de classification. Influence des paramètres du modèle sur les performances.	S2
Résoudre numériquement une équation ou un système d'équations. ⇆ *I*	Réécriture des équations d'un problème. Résolution de problèmes du type $f(x) = 0$ (méthodes de dichotomie et de Newton). Résolution d'un système linéaire du type $A \cdot X = B$. Résolution d'équations différentielles (schéma d'Euler explicite). Intégration et dérivation numérique (schémas arrière et avant).	S3
Commentaires *La « réécriture des équations » signifie :* *– remettre en forme des équations pour leurs traitements par une bibliothèque ;* *– mettre sous forme matricielle un problème (problème de Cauchy et système linéaire).* *Les méthodes numériques sont introduites au fur et à mesure, en fonction des besoins de la formation. Pour la résolution d'un système d'équations du type A·X = B, l'utilisation d'une bibliothèque préimplémentée est privilégiée.* *Les aspects théoriques liés aux méthodes numériques ne sont pas exigibles (stabilité, convergence, conditionnement de matrices…).*		

Résoudre un problème en utilisant une solution d'intelligence artificielle. ⇆ ***I***	Apprentissage supervisé. Choix des données d'apprentissage. Mise en œuvre des algorithmes (réseaux de neurones, *k* plus proches voisins et régression linéaire multiple). Phases d'apprentissage et d'inférence.	S3
Commentaire *Des bibliothèques préimplémentées sont utilisées.*		

D – Expérimenter

D1 – Mettre en œuvre un système

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Mettre en œuvre un système en suivant un protocole (*).		S2
Repérer les constituants réalisant les principales fonctions des chaines fonctionnelles (*).	Fonctions acquérir, traiter et communiquer. Fonctions alimenter, moduler, convertir, transmettre et agir.	S2
Identifier les grandeurs physiques d'effort et de flux (*).		S2

D2 – Proposer et justifier un protocole expérimental

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Choisir les configurations matérielles et logicielles du système en fonction de l'objectif visé par l'expérimentation (*).		S2
Choisir les réglages du système en fonction de l'objectif visé par l'expérimentation (*).		
Choisir la grandeur physique à mesurer ou justifier son choix (*).		
Choisir les entrées à imposer et les sorties pour identifier un modèle de comportement (*).		

D3 – Mettre en œuvre un protocole expérimental

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Régler les paramètres de fonctionnement d'un système (*).		S2
Mettre en œuvre un appareil de mesure adapté à la caractéristique de la grandeur à mesurer (*).		
Effectuer des traitements à partir de données. ⇆ I	Traitement de fichiers de données. Moyenne et écart type.	S2
Identifier les erreurs de mesure (*).	Incertitudes, résolution, quantification, échantillonnage, justesse, fidélité, linéarité et sensibilité.	S2
Identifier les erreurs de méthode (*).		
Commentaires *L'incertitude renvoie à la technologie des appareils de mesure et des capteurs. Il n'est pas souhaité de longs développements théoriques et calculs associés.*		

E – Communiquer

E1 – Rechercher et traiter des informations

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Rechercher des informations (*).	Outils de recherche. Mots-clefs.	S2
Distinguer les différents types de documents et de données en fonction de leurs usages (*).		S2
Vérifier la pertinence des informations (obtention, véracité, fiabilité et précision de l'information) (*).		
Extraire les informations utiles d'un dossier technique (*).		
Lire et décoder un document technique.	Diagrammes SysML. Schéma cinématique.	S2
Commentaire *Les normes de représentation du langage SysML sont fournies.*		

Trier les informations selon des critères (*).		S2
Effectuer une synthèse des informations disponibles dans un dossier technique (*).		

E2 – Produire et échanger de l'information

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Choisir un outil de communication adapté à l'interlocuteur (*).		S2
Faire preuve d'écoute et confronter des points de vue (*).		
Présenter les étapes de son travail (*).		
Présenter de manière argumentée une synthèse des résultats.		
Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.	Grandeurs utilisées : – unités du système international ; – homogénéité des grandeurs.	S2

Programmes de l'option informatique des classes préparatoires scientifiques Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI) et Mathématiques et physique (MP)

NOR : ESRS2035775A
arrêté du 5-1-2021 - JO du 7-2-2021
MESRI - DGESIP - A1-2

Vu Code de l'éducation, notamment articles D. 612-19 à D. 612-29 ; arrêtés du 10-2-1995 modifiés ; arrêté du 3-7-1995 modifié ; arrêté du 20-6-1996 modifié ; avis du CSE du 10-12-2020 ; avis du Cneser du 15-12-2020 ; avis de la ministre des Armées du 15-12-2020

Article 1 - Les programmes de l'option informatique des classes préparatoires scientifiques Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI) et Mathématiques et physique (MP), figurant respectivement en annexe des arrêtés des 3 juillet 1995 et 20 juin 1996 susvisés, sont remplacés par ceux annexés au présent arrêté.

Article 2 - Les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021-2022 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023 pour les classes de seconde année.

Article 3 - Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie.

Article 4 - Le directeur général de l'enseignement scolaire, la directrice générale des outre-mer et la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle sont chargés, chacun en ce qui le concerne, de l'exécution du présent arrêté, qui sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait le 5 janvier 2021

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
Édouard Geffray

Pour le ministre des Outre-mer et par délégation,
La directrice générale des outre-mer,
Sophie Brocas

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Pour la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle,
Le chef de service, adjoint de la directrice générale,
Brice Lannaud

Annexe

↳ *Programmes de l'option informatique*

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voies Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI) et Mathématiques et physique (MP)

Annexe
Programmes de l'option Informatique

Programme d'informatique
Filière Mathématiques et Physique (MP)
Option Informatique
Première et deuxième années

Table des matières

Introduction au programme

Les objectifs du programme L'enseignement optionnel en informatique est conçu comme un complément à la formation de tronc commun dispensée en classe de MPSI et de MP. Omniprésentes dans les révolutions industrielles et sociales du XXI^{e} siècle, les techniques rattachées à l'informatique connaissent aussi des cycles d'obsolescence rapide et sautent brutalement d'un paradigme à un autre très différent. Voilà pourquoi ce programme privilégie d'opérer par un approfondissement de certains fondamentaux scientifiques de la discipline. Il prépare ainsi de futurs ingénieures et ingénieurs, professeures et professeurs, chercheuses et chercheurs à affronter avec perspective, recul et adaptabilité les défis qu'elles et ils rencontreront dans leur carrière.

Articulation entre le programme de tronc commun et le programme d'option Tantôt le programme d'option complète des chapitres du tronc commun en apportant une profondeur, notamment théorique, sur certains points traités plus sommairement dans le programme initial ; tantôt le programme d'option aborde des thématiques nouvelles et s'attarde à poser les jalons de connaissances et de techniques, plutôt fondamentales, qu'un complément de temps autorise à aborder dans le cadre d'une formation au long cours. La professeure ou le professeur d'informatique de la classe de MPSI, de MP ou de MP* veille donc à la fois à assurer l'intelligibilité de son cours de tronc commun pour les étudiants qui ont choisi de ne pas suivre l'option et à organiser une articulation harmonieuse de son cours d'option avec son cours de tronc commun.

Compétences visées Ce programme amplifie le développement des six grandes compétences identifiées dans le programme de tronc commun :

- **analyser et modéliser** un problème ou une situation, notamment en utilisant les objets conceptuels de l'informatique pertinents (graphe, arbre, automate, etc.) ;
- **imaginer et concevoir une solution,** décomposer en blocs, se ramener à des sous-problèmes simples et indépendants, adopter une stratégie appropriée, décrire une démarche, un algorithme ou une structure de données permettant de résoudre le problème ;
- **décrire et spécifier** un motif textuel, les données d'un problème, ou celles manipulées par un algorithme ou une fonction en utilisant le formalisme approprié (notamment langue française, formule logique, expression régulière) ;
- **mettre en œuvre une solution,** par la traduction d'un algorithme ou d'une structure de données dans le langage de programmation du programme ;
- **justifier et critiquer une solution,** que ce soit en démontrant un algorithme par une preuve mathématique, en développant des processus d'évaluation, de contrôle, de validation d'un code que l'on a produit ou en écrivant une preuve au sein d'un système formel ;
- **communiquer à l'écrit ou à l'oral,** présenter des travaux informatiques, une problématique et sa solution ; défendre ses choix ; documenter sa production et son implémentation.

Sur les partis pris par le programme Ce programme impose aussi souvent que possible des choix de vocabulaire ou de notation de certaines notions. Les choix opérés ne présument pas la supériorité de l'option retenue. Ils ont été précisés dans l'unique but d'aligner les pratiques d'une classe à une autre et d'éviter l'introduction de longues définitions récapitulatives préliminaires à un exercice ou un problème. Quand des termes peu usités ont été clarifiés par leur traduction en anglais, seul le libellé en langue française est au programme. De même, ce programme nomme aussi souvent que possible l'un des algorithmes possibles parmi les classiques qui répondent à un problème donné. Là encore, le programme ne défend pas la prééminence d'un algorithme ou d'une méthode par rapport à un autre mais il invite à faire bien plutôt que beaucoup.

Sur le langage et la programmation L'enseignement du présent programme repose sur le langage de programmation OCaml dans les perspectives et les limites qui suivent. Après des enseignements centrés sur les langages enseignés dans les classes du secondaire et poursuivis pour partie en tronc commun, ce nouveau langage de nature très différente permet d'approfondir le multilinguisme des étudiants tout en illustrant la diversité des paradigmes de programmation. Le langage OCaml est utilisé en raison de sa capacité à s'ouvrir rapidement à un niveau d'abstraction supérieur et pour sa pertinence dans la manipulation de fonctions ou de structures de données récursives. Les traits impératifs de OCaml sont également présentés : ils permettent en particulier de découvrir des notions centrales, telles que les références, sans excessives difficultés liées au langage employé.

La discipline de programmation mise en place dans le cours de tronc commun reste observée, tout en étant le cas échéant adaptée au cadre de la programmation récursive ou des structure de données immuables. On ne se cantonne pas à écrire des programmes sur papier ; on veille à mettre régulièrement les étudiants en situation de programmer sur machine. Toutefois, la virtuosité dans l'écriture de programmes ou une connaissance exhaustive des bibliothèques de programmation ne sont pas des objectifs de la formation. Au contraire, l'annexe A liste de façon limitative les éléments du langage OCaml qui sont exigibles des étudiants ainsi que ceux auxquels les étudiants sont familiarisés et qui peuvent être attendus à condition que ceux-ci soient accompagnés d'une documentation.

1 Programme de première année

1.1 Programmation récursive

La capacité d'un programme à faire appel à lui-même est un concept primordial en informatique. Historiquement, l'auto-référence est au cœur du paradigme de programmation fonctionnelle. Elle imprègne aujourd'hui, de manière plus ou moins marquée, la plupart des langages de programmation contemporains. Elle permet souvent d'écrire des algorithmes plus élégants et moins laborieux que leurs équivalents en programmation impérative.

Notions	**Commentaires**
Récursivité. Récursivité croisée. Organisation des activations sous forme d'arbre en cas d'appels multiples.	On approfondit la présentation purement expérimentale de l'appel récursif d'une fonction à elle-même, vue au premier semestre de tronc commun, en faisant le lien avec le principe de récurrence et les relations d'ordre. On insiste sur le problème de la terminaison et la notion d'ordre bien fondé. Toute théorie générale de la dérécursification est hors programme.
Stratégie diviser pour régner.	On complète, si nécessaire, la présentation de tris élémentaires vue au premier semestre de tronc commun en présentant le tri par partition fusion. On ne se limite pas à des exemples dans lesquels la décomposition et la recomposition des résultats sont évidents.
Analyse de la complexité des algorithmes récursifs.	On étudie sur différents exemples la complexité dans le pire cas. Aucun théorème général de complexité n'est au programme. Sur des exemples, on sensibilise les étudiants à l'existence d'autres analyses de complexité, comme la complexité en moyenne ou la complexité amortie. La notion de classe de complexité d'un problème de décision est hors programme.

1.2 Types récursifs immuables et arbres

Les propriétés sur les structures récursives sont démontrées par des preuves par induction structurelle.

Notions	**Commentaires**
Type récursif de liste.	

Type récursif d'arbre binaire ou d'arbre binaire strict non vide.
 	
Vocabulaire : nœud, nœud interne, racine, feuille, fils, père, hauteur d'un arbre, profondeur d'un nœud, étiquette, sous-arbre.
	`type 'a arbre_binaire = Vide | Noeud of 'a * 'a arbre_binaire * 'a arbre_binaire`
	`type ('a, 'b) abs = Feuille of 'a | Noeud_interne of 'b * ('a, 'b) abs * ('a, 'b) abs`
	La hauteur de l'arbre vide est -1. Relation entre le nombre de nœuds internes et de feuilles d'un arbre binaire strict.

Définition inductive des arbres généraux non vides.	On illustre la notion d'arbre par des exemples, comme : expression arithmétique, arbre préfixe (*trie*), arbre de décision.
Parcours d'arbres. Ordre préfixe, infixe et postfixe.	On peut évoquer le lien avec l'empilement de blocs d'activation lors de l'appel à une fonction récursive.

1.3 Structures de données

Le programme de l'option MP se distingue du tronc commun en ce qu'il appelle la maîtrise du concept de structure de données : il dépasse l'idée que le langage de programmation fournisse une collection appropriée à ses besoins et insiste sur le fait que le développement d'un algorithme aille de pair avec la conception d'une structure de données taillée à la mesure du problème que l'on cherche à résoudre et des opérations sur les données que l'on est amené à répéter. Bien que la programmation orientée objet ne figure pas dans ce programme, on peut enseigner la notion de structure de données avec cette perspective à l'esprit.

Notions	Commentaires
Définition d'une structure de données abstraite comme un type muni d'opérations.	On parle de constructeur pour l'initialisation d'une structure, d'accesseur pour récupérer une valeur et de transformateur pour modifier l'état de la structure. On montre l'intérêt d'une structure de données abstraite en terme de modularité. On distingue la notion de structure de données abstraite de son implémentation. Plusieurs implémentations concrètes sont interchangeables.
Distinction entre structure de données mutable et immuable. Référence.	
Tableau, liste, pile, file, dictionnaire.	On complète la présentation purement pratique faite de ces structures dans le cadre du programme de tronc commun en étudiant dans le détail leurs implémentations possibles et en s'attachant à dégager la complexité des opérations associées. On clarifie l'ambiguïté du terme *liste* utilisé en tant que concept en informatique, tableau dynamique dans le langage Python et chaîne de maillons dans le langage OCaml. On présente des problèmes qui peuvent être résolus à l'aide de ces structures. On peut présenter différentes implémentations de la même structure.
Implémentation de la structure immuable de dictionnaire avec un arbre binaire de recherche.	On ne cherche pas à équilibrer les arbres. En lien avec le programme de tronc commun de deuxième année, on peut présenter également une implémentation mutable des dictionnaires avec une table de hachage.
Utilisation d'une structure de données.	Grâce aux bibliothèques, on peut utiliser des structures de données sans avoir à programmer soi-même leur implémentation.

1.4 Syntaxe puis sémantique de la logique propositionnelle

Le but de cette partie est de familiariser progressivement les étudiants avec la différence entre syntaxe et sémantique d'une part et de donner une base de vocabulaire permettant de modéliser une grande variété de situations (par exemple, satisfaction de contraintes, planification, diagnostique, vérification de modèles, etc.).
L'étude des quantificateurs est hors programme.

Notions	Commentaires
Variables propositionnelles, connecteurs logiques, arité. Formules propositionnelles, définition inductive, représentation comme un arbre. Sous-formule. Taille et hauteur d'une formule.	Notations : $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$. Les formules sont des données informatiques. On fait le lien entre les écritures d'une formule comme mot et les parcours d'arbres.
Valuations, valeurs de vérité d'une formule propositionnelle. Satisfiabilité, modèle, ensemble de modèles, tautologie, antilogie. Équivalence sur les formules. Conséquence logique entre deux formules.	Notations V pour la valeur vraie, F pour la valeur fausse. Une formule est satisfiable si elle admet un modèle, tautologique si toute valuation en est un modèle. On peut être amené à ajouter à la syntaxe une formule tautologique et une formule antilogique ; elles sont en ce cas notées $\top$ et $\bot$. On présente les lois de De Morgan, le tiers exclu et la décomposition de l'implication. On étend la notion à celle de conséquence ϕ d'un ensemble de formules Γ : on note $\Gamma \models \phi$. La compacité est hors programme.
Forme normale conjonctive, forme normale disjonctive. Problème SAT.	Lien entre forme normale disjonctive complète et table de vérité.

2 Programme de deuxième année

2.1 Applications des arbres

On aborde les arbres comme support de pensée qui permet de donner du sens et de raisonner sur le flot de contrôle qui s'observe dans la mise en œuvre de stratégies algorithmiques ou de structures de données élaborées.

Notions	Commentaires
Retour sur trace (*backtracking*).	On présente la notion à travers quelques exemples sans théorie générale (par exemple, problème des huit reines ou résolution d'un sudoku). La notion de retour sur trace est réinvestie par l'étudiant à l'occasion de l'étude de l'algorithme min-max présenté en tronc commun.
File de priorité.	Implémentation de la structure mutable de file de priorité bornée à l'aide d'un tas stocké dans un tableau. On illustre l'intérêt d'une file de priorité pour améliorer l'implémentation sommaire de l'algorithme de Dijkstra vue dans le cadre du programme de tronc commun. On présente le tri par tas d'un tableau. Pour l'algorithme de Kruskal, l'utilisation d'une file de priorité est une alternative intéressante au tri des arêtes lorsqu'elles sont stockées dans un tableau.

2.2 Graphes avancés

Le vocabulaire et les définitions relatives aux graphes, orientés ou non, tels que sommets, arcs, arêtes, degrés, ont été présentés dans le cadre du programme d'informatique de tronc commun.

Notions	Commentaires
Notion de parcours (sans contrainte). Parcours en largeur, en profondeur. Notion d'arborescence d'un parcours.	On approfondit la notion de parcours de graphe dont l'étude a été entamée dans le cadre du programme de tronc commun et on en détaille quelques applications : par exemple, recherche et construction d'un cycle, calcul des composantes connexes, bicolorabilité, états accessibles d'un automate. On étudie l'intérêt d'un type de parcours dans le cadre d'applications. Par exemple : plus courts chemins dans un graphe à distance unitaire ou tri topologique dans un graphe acyclique orienté. On implémente ces parcours à l'aide d'une représentation du graphe en listes d'adjacence et on discute leur complexité.
Arbre couvrant dans un graphe pondéré.	Algorithme de Kruskal. Les détails d'implémentation sont laissés à l'appréciation du professeur. On fait le lien avec la notion d'algorithme glouton étudiée dans le programme de tronc commun.
Graphe biparti. Couplage.	Recherche d'un couplage de cardinal maximum dans un graphe biparti par des chemins augmentants. On se limite à une approche élémentaire. L'algorithme de Hopcroft-Karp n'est pas au programme.

2.3 Déduction naturelle pour la logique propositionnelle

Il s'agit de présenter les preuves comme permettant de pallier deux problèmes de la présentation du calcul propositionnel faite en première année : nature exponentielle de la vérification d'une tautologie, faible lien avec les preuves mathématiques.

Il ne s'agit, en revanche, que d'introduire la notion d'arbre de preuve. La déduction naturelle est présentée comme un jeu de règles d'inférence simple permettant de faire un calcul plus efficace que l'étude de la table de vérité. Toute technicité dans les preuves dans ce système est à proscrire.

On s'abstient d'implémenter ces règles. L'ambition est d'être capable d'écrire de petites preuves dans ce système.

Notions	Commentaires
Déduction naturelle. Règle d'inférence, dérivation. Définition inductive d'un arbre de preuve.	Notation $\vdash$. Séquent $H_1, \dots, H_n \vdash C$. On présente des exemples tels que le *modus ponens* ($p, p \to q \vdash q$) ou le syllogisme *barbara* ($p \to q, q \to r \vdash p \to r$). On présente des exemples utilisant les règles précédentes.
Règles d'introduction et d'élimination de la déduction naturelle pour les formules propositionnelles. Correction de la déduction naturelle pour les formules propositionnelles.	On présente les règles pour $\wedge, \vee, \neg$ et $\to$. On écrit de petits exemples d'arbre de preuves (par exemple $\vdash (p \to q) \to \neg(p \wedge \neg q)$, etc.).

2.4 Langages et automates

On introduit les expressions régulières comme formalisme dénotationnel pour spécifier un motif dans le cadre d'une recherche textuelle et les automates comme formalisme opérationnel efficace pour la recherche de motifs. On vérifie que le formalisme des automates coïncide exactement avec l'expressivité des expressions régulières.

Notions	Commentaires
Alphabet, mot, préfixe, suffixe, facteur, sous-mot. Langage comme ensemble de mots sur un alphabet.	Le mot vide est noté ε.
Opérations régulières sur les langages (union, concaténation, étoile de Kleene). Définition inductive des langages réguliers. Expression régulière. Dénotation d'une expression régulière.	On introduit les expressions régulières comme un formalisme dénotationnel pour les motifs. On note l'expression dénotant le langage vide $\emptyset$, celle dénotant le langage réduit au mot vide ε, l'union par $\mid$, la concaténation par juxtaposition et l'étoile de Kleene par une étoile.
Automate fini déterministe. État accessible, co-accessible. Automate émondé; automate complet. Langage reconnu par un automate.	
Automate fini non déterministe. Transition spontanée (ou ε-transition). Déterminisation d'un automate non déterministe.	On aborde l'élimination des ε-transitions et plus généralement les constructions d'automates à la Thompson sur des exemples, sans chercher à formaliser complètement les algorithmes sous-jacents.
Construction de l'automate de Glushkov associé à une expression régulière par l'algorithme de Berry-Sethi.	Les notions de langage local et d'expression régulière linéaire sont introduites dans cette seule perspective.
Passage d'un automate à une expression régulière. Élimination des états. Théorème de Kleene.	On se limite à la description du procédé d'élimination et à sa mise en œuvre sur des exemples d'automates de petite taille; cela constitue la preuve du sens réciproque du théorème de Kleene.
Stabilité de la classe des langages reconnaissables par union finie, intersection finie, complémentaire.	
Lemme de l'étoile.	Soit L le langage reconnu par un automate à n états : pour tout $u \in L$ tel que $\lvert u \rvert \geq n$, il existe x, y, z tels que $u = xyz$, $\lvert xy \rvert \leq n$, $y \neq \varepsilon$ et $xy^*z \subseteq L$.

A Langage OCaml

La présente annexe liste limitativement les éléments du langage OCaml (version 4 ou supérieure) dont la connaissance, selon les modalités de chaque sous-section, est exigible des étudiants. Aucun concept sous-jacent n'est exigible au titre de la présente annexe.

A.1 Traits et éléments techniques à connaitre

Les éléments et notations suivants du langage OCaml doivent pouvoir être compris et utilisés par les étudiants dès la fin de la première année sans faire l'objet d'un rappel, y compris lorsqu'ils n'ont pas accès à un ordinateur.

Traits généraux

- Typage statique, inférence des types par le compilateur. Idée naïve du polymorphisme.
- Passage par valeur.
- Portée lexicale : lorsqu'une définition utilise une variable globale, c'est la valeur de cette variable au moment de la définition qui est prise en compte.
- Curryfication des fonctions. Fonction d'ordre supérieur.
- Gestion automatique de la mémoire.
- Les retours à la ligne et l'indentation ne sont pas signifiants mais sont nécessaires pour la lisibilité du code.

Définitions et types de base

- `let`, `let rec` (pour des fonctions), `let rec … and …`. `fun` x y `->` e.
- `let` v `=` e `in` e', `let rec` f x `=` e `in` e'.
- Expression conditionnelle `if` e `then` e_V `else` e_F.
- Types de base : `int` et les opérateurs `+`, `-`, `*`, `/`, l'opérateur `mod` quand toutes les grandeurs sont positives; `float` et les opérateurs `+.`, `-.`, `*.`, `/.` ; `bool`, les constantes `true` et `false` et les opérateurs `not`, `&&`, `||` (y compris évaluation paresseuse). Entiers et flottants sont sujets aux dépassements de capacité.
- Comparaisons sur les types de base : `=`, `<>`, `<`, `>`, `<=`, `>=`.

Types structurés

- n-uplets; non-nécessité d'un `match` pour récupérer les valeurs d'un n-uplet.
- Listes : type `'a list`, constructeurs `[]` et `::`, notation `[`x`;` y`;` z`]` ; opérateur `@` (y compris sa complexité); `List.length`. Motifs de filtrage associés.
- Type `'a option`.
- Déclaration de type, y compris polymorphe.
- Types énumérés (ou sommes, ou unions), récursifs ou non; les constructeurs commencent par une majuscule, contrairement aux identifiants. Motifs de filtrage associés.
- Filtrage : `match` e `with` p_0 `->` v_0 `|` p_1 `->` v_1 …; les motifs sont exhaustifs, ils ne doivent pas comporter de variable utilisée antérieurement ni deux fois la même variable; motifs plus ou moins généraux, notation _, importance de l'ordre des motifs quand ils ont des instances communes.

Programmation impérative

- Absence d'instruction; la programmation impérative est mise en œuvre par des expressions impures; `unit`, `()`.
- Références : type `'a ref`, notations `ref`, `!`, `:=`. Les références doivent être utilisées à bon escient.
- Séquence `;`. La séquence intervient entre deux expressions.
- Boucle `while` c `do` b `done`; boucle `for` v `=` d `to` f `do` b `done` (on rappelle, quand cela est utile au problème étudié, que les deux bornes sont atteintes).

Divers

- Usage de `begin … end`.

— Exceptions : `failwith`.
— Utilisation d'un module : notation $M.f$. Les noms des modules commencent par une majuscule.
— Syntaxe des commentaires, à l'exclusion de la nécessité d'équilibrer les délimiteurs dans un commentaire.

A.2 Éléments techniques devant être reconnus et utilisables après rappel

Les éléments suivants du langage OCaml doivent pouvoir être utilisés par les étudiants pour écrire des programmes dès lors qu'ils ont fait l'objet d'un rappel et que la documentation correspondante est fournie.

Définition et types de base

— Types de base : opérateur `mod` avec opérandes de signes quelconques, opérateur `**`.
— Types `char` et `string`; `'`x`'` quand x est un caractère imprimable, `"`x`"` quand x est constituée de caractères imprimables, `String.length`, s`.[`i`]`, opérateur `^`. Existence d'une relation d'ordre total sur `char`. Immuabilité des chaines.
— Fonctions de conversion entre types de base.
— `print_int`, `print_string`, `print_float`.

Types structurés et structures de données

— Listes : les fonctions `mem`, `exists`, `for_all`, `filter`, `map` et `iter` du module `List`.
— Tableaux : type `'a array`, notations `[|...|]`, t`.(`i`)`, t`.(`i`) <-` v; les fonctions suivantes du module `Array` : `length`, `make`, `make_matrix`, `init`, `copy`, `mem`, `exists`, `for_all`, `map` et `iter`.
— Types enregistrements immuables et mutables, notations associées.
— Types mutuellement récursifs.
— Piles et files mutables : fonctions `create`, `is_empty`, `push` et `pop` des modules `Queue` et `Stack`.
— Dictionnaires mutables réalisés par tables de hachage sans liaison multiple ni randomisation par le module `Hashtbl` : fonctions `create` (on élude toute considération sur la taille initiale), `add`, `remove`, `mem`, `find`, `find_opt` et `iter`.

Programmes d'informatique, de physique-chimie et de sciences industrielles de l'ingénieur de la classe préparatoire scientifique Mathématiques, physique, ingénierie et informatique (MP2I), le programme d'informatique de la classe préparatoire scientifique Mathématiques, physique et informatique (MPI), et relatif au programme de sciences industrielles de l'ingénieur de la classe préparatoire scientifique Physique et sciences de l'ingénieur (PSI)

NOR : ESRS2035777A
arrêté du 5-1-2021 - JO du 7-2-2021
MESRI - DGESIP - A1-2

Vu Code de l'éducation, notamment articles D. 612-19 à D. 612-29 ; arrêtés du 10-2-1995 modifiés ; arrêté du 20-6-1996 modifié ; avis du CSE du 10-12-2020 ; avis du Cneser du 15-12-2020 ; avis de la ministre des Armées du 15-12-2020

Article 1 - Les programmes de première année d'informatique, de physique-chimie et de sciences industrielles de l'ingénieur de la classe préparatoire scientifique Mathématiques, physique, ingénierie et informatique (MP2I) figurent respectivement aux annexes 1, 2 et 3 du présent arrêté.

Article 2 - Le programme de seconde année d'informatique de la classe préparatoire scientifique Mathématiques, physique et informatique (MPI) figure à l'annexe 1 du présent arrêté.

Article 3 - Le programme de seconde année de sciences industrielles de l'ingénieur de la classe préparatoire scientifique Physique et sciences de l'ingénieur (PSI), figurant à l'annexe IV de l'arrêté du 20 juin 1996 susvisé, est remplacé par celui figurant à l'annexe 3 du présent arrêté.

Article 4 - Les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021-2022 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023 pour les classes de seconde année.

Article 5 - Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie.

Article 6 - Le directeur général de l'enseignement scolaire, la directrice générale des outre-mer et la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle sont chargés, chacun en ce qui le concerne, de l'exécution du présent arrêté, qui sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait le 5 janvier 2021

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
Édouard Geffray

Pour le ministre des Outre-mer et par délégation,
La directrice générale des outre-mer,
Sophie Brocas

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Pour la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle,

Le chef de service, adjoint de la directrice générale,
Brice Lannaud

Annexes

↳ *Annexes 1 à 3*

- Annexe 1 : programmes d'informatique
- Annexe 2 : programme de physique-chimie
- Annexe 3 : programmes de sciences industrielles de l'ingénieur

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voies Mathématiques, physique, ingénierie et informatique (MP2I) et Mathématiques, physique, informatique (MPI)

Annexe 1
Programmes d’informatique

Programme d'informatique
Filière Mathématiques, Physique, Informatique (MPI)
Première et deuxième années

Table des matières

Introduction au programme

Les objectifs du programme L'enseignment d'informatique de classe préparatoire MPI a pour objectif la formation de futurs ingénieures et ingénieurs, enseignantes et enseignants, chercheuses et chercheurs et avant tout des personnes informées, capables de gouverner leur vie professionnelle et citoyenne nourrie par les pratiques de la démarche scientifique, en pleine connaissance et maîtrise des techniques et des enjeux de l'informatique.
Le présent programme a pour ambition de poser les bases d'un enseignement cohérent et mesuré d'une science informatique encore jeune et dont les manifestations technologiques connaissent des cycles d'obsolescence rapide. On garde donc à l'esprit :

— de privilégier la présentation de concepts fondamentaux pérennes sans s'attacher outre mesure à la description de technologies, protocoles ou normes actuels;
— de donner aux futurs diplômées et diplômés les moyens de réussir dans un domaine en mutation rapide et dont les technologies qui en sont issues peuvent sauter brutalement d'un paradigme à un autre très différent;
— de préparer les étudiantes et étudiants à tout un panel de professions et de situations de la vie professionnelle qui les amène à remplir tour à tour une mission d'expertise, de création ou d'invention, de prescription de méthodes ou de techniques, de contrôle critique des choix opérés ou encore de décision en interaction avec des spécialistes;
— d'enseigner de manière à donner aux étudiantes et étudiants la flexibilité de travailler dans de nombreuses disciplines, l'informatique étant un domaine vaste qui se connecte à et tire parti de nombreuses autres disciplines.

Compétences visées Au delà de l'acquisition d'un bagage substantiel de connaissances et de méthodes de l'informatique, ce programme vise à développer les six grandes compétences suivantes :

analyser et modéliser un problème ou une situation, notamment en utilisant les objets conceptuels de l'informatique pertinents (table relationnelle, graphe, arbre, automate, modèle abstrait d'ordonnancement, etc.);

imaginer et concevoir une solution, décomposer en blocs, se ramener à des sous-problèmes simples et indépendants, adopter une stratégie appropriée, décrire une démarche, un algorithme ou une structure de données permettant de résoudre le problème;

décrire et spécifier une syntaxe, les caractéristiques d'un processus, les données d'un problème, ou celles manipulées par un algorithme ou une fonction en utilisant le formalisme approprié (notamment langue française, formule logique, grammaire formelle);

mettre en œuvre une solution, par le choix d'un langage, par la traduction d'un algorithme ou d'une structure de données dans un langage de programmation ou un langage de requête;

justifier et critiquer une solution, que ce soit en démontrant un algorithme par une preuve mathématique, en développant des processus d'évaluation, de contrôle, de validation d'un code que l'on a produit ou en écrivant une preuve au sein d'un système formel;

communiquer à l'écrit ou à l'oral, présenter des travaux informatiques, une problématique et sa solution; défendre ses choix; documenter sa production et son implémentation.

L'enseignement de ce programme ne saurait rester aveugle aux questions sociales, juridiques, éthiques et culturelles inhérentes à la discipline de l'informatique. Ces enjeux deviennent particulièrement prégnants eu égard au rôle croissant que jouent l'intelligence artificielle et les techniques d'analyse de données dans la technologie contemporaine. La professeure ou le professeur expose ses étudiants et étudiantes à l'interaction des questions éthiques et des problèmes techniques qui jouent un rôle important dans le développement des algorithmes et des systèmes informatiques.

Sur les partis pris par le programme Ce programme impose aussi souvent que possible des choix de vocabulaire ou de notation de certaines notions. Les choix opérés ne présument pas la supériorité de l'option retenue. Ils ont été précisés dans l'unique but d'aligner les pratiques d'une classe à une autre et d'éviter l'introduction de longues définitions récapitulatives préliminaires à un exercice ou un problème. Quand des termes peu usités ont été clarifiés par leur traduction en anglais, seul le libellé en langue française est au programme.
De même, ce programme nomme aussi souvent que possible l'un des algorithmes parmi les classiques qui répondent à un problème donné. Là encore, le programme ne défend pas la prééminence d'un algorithme ou d'une méthode par rapport à un autre mais il invite à faire bien plutôt que beaucoup.

Sur les langages et la programmation L'enseignement du présent programme repose sur un langage de manipulation de données (SQL) ainsi que deux langages de programmation, C et OCaml. Des annexes listent de façon limitative les éléments de ces langages qui sont exigibles des étudiants ainsi que ceux auxquels les étudiants sont familiarisés et qui peuvent être attendus à condition qu'ils soient accompagnés d'une documentation. Après des enseignements centrés sur les langages enseignés dans les classes du secondaire (au jour de l'écriture de ce programme : Scratch et Python), ces trois nouveaux langages de natures très différentes permettent d'approfondir le multilinguisme des étudiants tout en illustrant la diversité des paradigmes de programmation ou la diversité des moyens de contrôler les ressources de la machine physique et de les abstraire.
L'apprentissage du langage C conduit en particulier les étudiants à adopter immédiatement une bonne discipline de programmation tout en se concentrant sur le noyau du langage plutôt que sur une API pléthorique. En tant que langage dit de bas niveau d'abstraction utilisé entre autres pour écrire tous les systèmes d'exploitation, il permet une gestion explicite de la mémoire et des ressources de la machine, indispensable dans le cas où celles-ci sont limitées (systèmes embarqués, mobiles).
L'apprentissage du langage OCaml permet en particulier aux étudiants de recourir rapidement à un niveau d'abstraction supérieur et de manipuler facilement des structures de données récursives. Pour autant, son utilisation peut également simplifier certaines manipulations sur les fils d'exécution *(threads)*, par exemple.
La plupart des algorithmes qui figurent au programme se prêtent indifféremment à une programmation en C ou en OCaml. On veille à développer de façon parallèle les compétences de programmation dans ces deux langages.
Il convient de ne pas axer uniquement l'enseignement de ce programme sur le développement de compétences en programmation : si la capacité à écrire des programmes courts, précis, agréables à lire et documentés fait partie d'une formation exhaustive en informatique, un accent trop important sur l'écriture de code peut donner une vision étroite et trompeuse de la place de la programmation dans la discipline informatique.
Les défauts, les bogues et les failles de logique constituent systématiquement la cause première des vulnérabilités des logiciels exploitées de façon malveillante. La vigilance vis-à-vis de pratiques de programmation sûres est apprise dès les premiers stades de l'apprentissage de la programmation. On s'attache à sensibiliser les étudiants à ces techniques, à la prévention des vulnérabilités et à une validation formelle ou expérimentale rigoureuse des résultats obtenus. Les étudiants sont incités à analyser les sources possibles d'invalidité des données manipulées par leurs programmes, y compris en cas d'exécution concurrente, et à savoir appliquer des principes de programmation défensive.

Mode d'emploi Pour une meilleure lisibilité de l'ensemble, les acquis d'apprentissage finaux ont été structurés par chapitres thématiques, sans chercher à éviter une redondance qui ne fait que témoigner des liens que ces thèmes entretiennent. Des repères temporels peuvent être proposés mais l'organisation de la progression au sein de ces acquis relève de la responsabilité pédagogique de la professeure ou du professeur et le tissage de liens entre les thèmes contribue à la valeur de son enseignement. Les symboles S1, S2 et S3-4 indiquent que les notions associées sont étudiées avant la fin du premier ou du second semestre de la première année, ou durant la deuxième année, respectivement ; ces notions sont régulièrement revisitées tout au long des deux années d'enseignement. Lorsqu'une telle spécification s'applique uniformément à une section ou sous-section, elle n'est pas répétée aux niveaux inférieurs.

1 Méthodes de programmation (S1)(S2)(S3-4)

Le programme construit une progression à partir des acquis du lycée en matière d'algorithmique et programmation, dont on rappelle qu'ils ont permis, *a minima*, de rencontrer les notions de variables, de type, d'affectation, d'instruction conditionnelle, de boucles conditionnelles ou inconditionnelles et de manipuler de façon simple les listes en Python.

1.1 Algorithmes et programmes (S1)

Ce paragraphe introduit notamment le principe de validation d'un algorithme ou d'un programme et celui d'étude de son efficacité, qui sont pratiqués tout au long des deux années.

Notions	**Commentaires**
Notion de programme comme mise en œuvre d'un algorithme. Paradigme impératif structuré, paradigme déclaratif fonctionnel, paradigme logique.	On ne présente pas de théorie générale sur les paradigmes de programmation, on se contente d'observer les paradigmes employés sur des exemples. La notion de saut inconditionnel (instruction `GOTO`) est hors programme. On mentionne le paradigme logique uniquement à l'occasion de la présentation des bases de données.
Caractère compilé ou interprété d'un langage.	Transformation d'un fichier texte source en un fichier objet puis en un fichier exécutable. Différence entre fichiers d'interface et fichiers d'implémentation.
Représentation des flottants. Problèmes de précision des calculs flottants.	On illustre l'impact de la représentation par des exemples de divergence entre le calcul théorique d'un algorithme et les valeurs calculées par un programme. Les comparaisons entre flottants prennent en compte la précision.
Terminaison. Correction partielle. Correction totale. Variant. Invariant.	La correction est partielle quand le résultat est correct lorsque l'algorithme s'arrête, la correction est totale si elle est partielle et si l'algorithme termine.
Analyse de la complexité d'un algorithme. Complexité dans le pire cas, dans le cas moyen. Notion de coût amorti.	On limite l'étude de la complexité dans le cas moyen et du coût amorti à quelques exemples simples.

1.2 Discipline de programmation (S1)(S2)(S3-4)

Ce paragraphe définit une discipline de programmation qui a vocation à être observée dès le début et durant toute la durée des deux années d'enseignement.

Notions	**Commentaires**
Spécification des données attendues en entrée, et fournies en sortie/retour.	On entraîne les étudiants à accompagner leurs programmes et leurs fonctions d'une spécification. Les signatures des fonctions sont toujours précisées.
Annotation d'un bloc d'instructions par une précondition, une postcondition, une propriété invariante.	Ces annotations se font à l'aide de commentaires.
Programmation défensive. Assertion. Sortie du programme ou exception levée en cas d'évaluation négative d'une assertion.	L'utilisation d'assertions est encouragée par exemple pour valider des entrées ou pour le contrôle de débordements. Plus généralement, les étudiants sont sensibilisés à réfléchir aux causes possibles (internes ou externes à leur programme) d'opérer sur des données invalides et à adopter un style de programmation défensif. Les étudiants sont sensibilisés à la différence de garanties apportées selon les langages, avec l'exemple d'un typage faible en C et fort en OCaml. On veille à ne pas laisser penser que les exceptions servent uniquement à gérer des erreurs.
Explicitation et justification des choix de conception ou programmation.	Les parties complexes de codes ou d'algorithmes font l'objet de commentaires qui l'éclairent en évitant la paraphrase.

1.3 Validation, test (S1)

La validation de code par sa soumission à des jeux de tests est une phase essentielle du cycle de développement logiciel. On en fait percevoir l'importance dès le début et durant toute la durée des deux années d'enseignement.

Notions	**Commentaires**
Jeu de tests associé à un programme.	Il n'est pas attendu de connaissances sur la génération automatique de jeux de tests ; un étudiant est capable d'écrire un jeu de tests à la main, donnant à la fois des entrées et les sorties correspondantes attendues. On sensibilise, par des exemples, à la notion de partitionnement des domaines d'entrée et au test des limites.
Graphe de flot de contrôle. Chemins faisables. Couverture des sommets, des arcs ou des chemins (avec ou sans cycle) du graphe de flot de contrôle.	Les étudiants sont capables d'écrire un jeu de tests satisfaisant un critère de couverture des instructions (sommets) ou des branches (arcs) sur les chemins faisables.
Test exhaustif de la condition d'une boucle ou d'une conditionnelle.	Il s'agit, lorsque la condition booléenne comporte des conjonctions ou disjonctions, de ne pas se contenter de la traiter comme étant globalement vraie ou fausse mais de formuler des tests qui réalisent toutes les possibilités de la satisfaire. On se limite à des exemples simples pour lesquels les cas possibles se décèlent dès la lecture du programme.

2 Récursivité et induction (S1)(S2)

La capacité d'un programme à faire appel à lui-même est un concept primordial en informatique. Historiquement, l'auto-référence est au cœur du paradigme de programmation fonctionnelle. Elle imprègne aujourd'hui, de manière plus ou moins marquée, la plupart des langages de programmation contemporains. Le principe d'induction est une notion fondamentale et transverse à l'ensemble de ce programme. Il permet d'écrire des démonstrations avec facilité dès que l'on s'intéresse à toute sorte de structures (arbres, formules de logiques, classes de langage, etc.).

Notions	**Commentaires**
Récursivité d'une fonction. Récursivité croisée. Organisation des activations sous forme d'arbre en cas d'appels multiples. (S1)	On se limite à une présentation pratique de la récursivité comme technique de programmation. Les récurrences usuelles : $T(n) = T(n-1) + an$, $T(n) = aT(n/2) + b$, ou $T(n) = 2T(n/2) + f(n)$ sont introduites au fur et à mesure de l'étude de la complexité des différents algorithmes rencontrés. On utilise des encadrements élémentaires *ad hoc* afin de les justifier; on évite d'appliquer un théorème-maître général.
Ensemble ordonné, prédécesseur et successeur, prédécesseur et successeur immédiat. Élement minimal. Ordre produit, ordre lexicographique. Ordre bien fondé. (S2)	On fait le lien avec la notion d'accessibilité dans un graphe orienté acyclique. L'objectif n'est pas d'étudier la théorie abstraite des ensembles ordonnés mais de poser les définitions et la terminologie.
Ensemble inductif, défini comme le plus petit ensemble engendré par un système d'assertions et de règles d'inférence. Ordre induit. Preuve par induction structurelle. (S2)	On insiste sur les aspects pratiques : construction de structure de données et filtrage par motif. On présente la preuve par induction comme une généralisation de la preuve par récurrence.

Mise en œuvre
On met l'accent sur la gestion au niveau de la machine, en termes d'occupation mémoire, de la pile d'exécution, et de temps de calcul, en évoquant les questions de sauvegarde et de restauration de contexte. On évite de se limiter à des exemples informatiquement peu pertinents (factorielle, suite de Fibonacci, …). Toute théorie générale de la dérécursification est hors programme. Un étudiant peut mener des raisonnements par induction structurelle.

3 Structures de données (S1)(S2)(S3-4)

On insiste sur le fait que le développement d'un algorithme va de pair avec la conception d'une structure de données taillée à la mesure du problème que l'on cherche à résoudre et des opérations sur les données que l'on est amené à répéter.

3.1 Types et abstraction (S1)

Notions	Commentaires
Type prédéfini (booléen, entier, flottant). Pointeur. Type paramétré (tableau). Type composé. Tableaux statiques. Allocation (`malloc`) et désallocation (`free`) dynamique.	On se limite à une présentation pratique des types, en les illustrant avec les langages du programme. Un étudiant est capable d'inférer un type à la lecture d'un fragment de code, cependant toute théorie du typage est hors programme.
Définition d'une structure de données abstraite comme un type muni d'opérations.	On parle de constructeur pour l'initialisation d'une structure, d'accesseur pour récupérer une valeur et de transformateur pour modifier l'état de la structure. On montre l'intérêt d'une structure de données abstraite en terme de modularité. On distingue la notion de structure de données abstraite de son implémentation. Plusieurs implémentations concrètes sont interchangeables. La notion de classe et la programmation orientée objet sont hors programme.
Distinction entre structure de données mutable et immuable.	Illustrée en langage OCaml.

Mise en œuvre
Il s'agit de montrer l'intérêt et l'influence des structures de données sur les algorithmes et les méthodes de programmation. On insiste sur la distinction entre une structure de données abstraite (un type muni d'opérations ou encore une interface) et son implémentation concrète. On montre l'intérêt d'une structure de données abstraite en terme de modularité. Grâce aux bibliothèques, on peut utiliser des structures de données avant d'avoir programmé leur réalisation concrète.

3.2 Structures de données séquentielles (S1)(S2)

Notions	Commentaires
Structure de liste. Implémentation par un tableau, par des maillons chaînés. (S1)	On insiste sur le coût des opérations selon le choix de l'implémentation. Pour l'implémentation par un tableau, on se fixe une taille maximale. On peut évoquer le problème du redimensionnement d'un tableau.
Structure de pile. Structure de file. Implémentation par un tableau, par des maillons chaînés. (S1)	
Structure de tableau associatif implémenté par une table de hachage. (S2)	La construction d'une fonction de hachage et les méthodes de gestion des collisions éventuelles ne sont pas des exigibles du programme.
Sérialisation. (S2)	On présente un exemple de sérialisation d'une structure hiérarchique et d'une structure relationnelle.

Mise en œuvre
On présente les structures de données construites à l'aide de pointeurs d'abord au tableau avant de guider les étudiants dans l'implémentation d'une telle structure.

3.3 Structures de données hiérarchiques (S2)(S3-4)

Notions	Commentaires
Définition inductive du type arbre binaire. Vocabulaire : nœud, nœud interne, racine, feuille, fils, père, hauteur d'un arbre, profondeur d'un nœud, étiquette, sous-arbre. (S2)	La hauteur de l'arbre vide est -1. On mentionne la représentation d'un arbre complet dans un tableau.
Arbre. Conversion d'un arbre d'arité quelconque en un arbre binaire. (S2)	La présentation donne lieu à des illustrations au choix du professeur. Il peut s'agir par exemple d'expressions arithmétiques, d'arbres préfixes (*trie*), d'arbres de décision, de dendrogrammes, d'arbres de classification, etc.
Parcours d'arbre. Ordre préfixe, infixe et postfixe. (S2)	On peut évoquer le lien avec l'empilement de blocs d'activation lors de l'appel à une fonction récursive.
Implémentation d'un tableau associatif par un arbre binaire de recherche. Arbre bicolore. (S2)	On note l'importance de munir l'ensemble des clés d'un ordre total.
Propriété de tas. Structure de file de priorité implémentée par un arbre binaire ayant la propriété de tas. (S2)	Tri par tas.
Structure unir & trouver pour la représentation des classes d'équivalence d'un ensemble. Implémentation par des arbres. (S3-4)	On commence par donner des implémentations naïves de la structure unir & trouver qui privilégient soit l'opération unir, soit l'opération trouver, avant de donner une implémentation par des arbres qui permet une mise en œuvre efficace des deux opérations. L'analyse de la complexité de cette structure est admise.

Mise en œuvre
On présente les manipulations usuelles sur les arbres en C et en OCaml. Il n'est pas attendu d'un étudiant une maîtrise technique de l'écriture du code d'une structure de données arborescente mutable à l'aide de pointeurs, mais il est attendu qu'il sache l'utiliser.

3.4 Structures de données relationnelles (S2)

Il s'agit de définir le modèle des graphes, leurs représentations et leurs manipulations.
On s'efforce de mettre en avant des applications importantes et si possibles modernes : réseau de transport, graphe du web, réseaux sociaux, bio-informatique. On précise autant que possible la taille typique de tels graphes.

Notions	Commentaires
Graphe orienté, graphe non orienté. Sommet (ou nœud); arc, arête. Boucle. Degré (entrant et sortant). Chemin d'un sommet à un autre. Cycle. Connexité, forte connexité. Graphe orienté acyclique. Arbre en tant que graphe connexe acyclique. Forêt. Graphe biparti.	Notation : graphe $G = (S, A)$, degrés $d_+(s)$ et $d_-(s)$ dans le cas orienté. On n'évoque pas les multi-arcs. On représente un graphe orienté par une matrice d'adjacence ou par des listes d'adjacence.
Pondération d'un graphe. Étiquettes des arcs ou des arêtes d'un graphe.	On motive l'ajout d'information à un graphe par des exemples concrets : graphe de distance, automate fini, diagramme de décision binaire.

Mise en œuvre
On présente les manipulations usuelles sur les graphes en C et en OCaml. La présentation en C s'effectue à travers des tableaux statiques. Pour la représentation en liste d'adjacence, on peut considérer un tableau à deux dimensions dont les lignes représentent chaque liste avec une sentinelle ou un indicateur de taille en premier indice.

4 Algorithmique (S2)(S3-4)

Les algorithmes sont présentés au tableau en spécifiant systématiquement les entrées et sorties et en étudiant, dans la mesure du possible, leur correction et leur complexité.

4.1 Algorithmes probabilistes, algorithmes d'approximation (S3-4)

Notions	**Commentaires**
Algorithme déterministe. Algorithme probabiliste (*Las Vegas* et *Monte Carlo*).	On s'en tient aux définitions et à des exemples choisis par le professeur. On mentionne l'intérêt d'une méthode *Las Vegas* pour construire un objet difficile à produire par une méthode déterministe (par exemple, construction d'un nombre premier de taille cryptographique). Quelques exemples possibles : k-ième minimum d'un tableau non trié, problème des huit reines, etc.
Problème de décision. Problème d'optimisation. Instance d'un problème, fonction de coût. Notion d'algorithme d'approximation.	Seule la notion d'algorithme d'approximation est au programme. L'étude de techniques générales d'approximation est hors programme. On indique, par exemple sur le problème MAX2SAT, que la méthode probabiliste peut fournir de bons algorithmes d'approximation.

4.2 Exploration exhaustive (S2)(S3-4)

Notions	**Commentaires**
Recherche par force brute. Retour sur trace (*Backtracking*). (S2)	On peut évoquer l'intérêt d'ordonner les données avant de les parcourir (par exemple par une droite de balayage).
Algorithme par séparation et évaluation (*Branch and bound*). (S3-4)	On peut évoquer sur des exemples quelques techniques d'évaluation comme les méthodes de relaxation (par exemple la relaxation continue).

Mise en œuvre
L'objectif est de donner des outils de conception d'algorithmes et de parvenir à ce que les étudiants puissent, dans une situation simple, sélectionner une stratégie pertinente par eux-mêmes et la mettre en œuvre de façon autonome. Dans les cas les plus complexes, les choix et les recommandations d'implémentation sont guidés.

4.3 Décomposition d'un problème en sous-problèmes (S2)(S3-4)

Notions	**Commentaires**
Algorithme glouton fournissant une solution exacte. (S2)	On peut traiter comme exemples d'algorithmes exacts : codage de Huffman, sélection d'activité, ordonnancement de tâches unitaires avec pénalités de retard sur une machine unique.
Exemple d'algorithme d'approximation fourni par la méthode gloutonne. (S3-4)	On peut traiter par exemple : couverture des sommets dans un graphe, problème du sac à dos en ordonnant les objets.
Diviser pour régner. Rencontre au milieu. Dichotomie. (S2)	On peut traiter un ou plusieurs exemples comme : tri par partition-fusion, comptage du nombre d'inversions dans une liste, calcul des deux points les plus proches dans une ensemble de points ; recherche d'un sous-ensemble d'un ensemble d'entiers dont la somme des éléments est donnée ; recherche dichotomique dans un tableau trié. On présente un exemple de dichotomie où son recours n'est pas évident : par exemple, la couverture de n points de la droite par k segments égaux de plus petite longueur.

Programmation dynamique. Propriété de sous-structure optimale. Chevauchement de sous-problèmes. Calcul de bas en haut ou par mémoïsation. Reconstruction d'une solution optimale à partir de l'information calculée. (S2)	On souligne les enjeux de complexité en mémoire. On peut traiter un ou plusieurs exemples comme : problème de la somme d'un sous-ensemble, ordonnancement de tâches pondérées, plus longue sous-suite commune, distance d'édition (Levenshtein).

Mise en œuvre
L'objectif est de donner des outils de conception d'algorithmes et de parvenir à ce que les étudiants puissent, dans une situation simple, sélectionner une stratégie pertinente par eux-mêmes et la mettre en œuvre de façon autonome. Dans les cas les plus complexes, les choix et les recommandations d'implémentation sont guidés. Les listes d'exemples cités en commentaires ne sont ni impératives ni limitatives.

4.4 Algorithmique des textes (S2)

Notions	**Commentaires**
Recherche dans un texte. Algorithme de Boyer-Moore. Algorithme de Rabin-Karp.	On peut se restreindre à une version simplifiée de l'algorithme de Boyer-Moore, avec une seule fonction de décalage. L'étude précise de la complexité de ces algorithmes n'est pas exigible.
Compression. Algorithme de Huffman. Algorithme Lempel-Ziv-Welch.	On explicite les méthodes de décompression associées.

4.5 Algorithmique des graphes (S2)(S3-4)

Notions	**Commentaires**
Notion de parcours (sans contrainte). Notion de parcours en largeur, en profondeur. Notion d'arborescence d'un parcours. (S2)	On peut évoquer la recherche de cycle, la bicolorabilité d'un graphe, la recherche de plus courts chemins dans un graphe à distance unitaire.
Accessibilité. Tri topologique d'un graphe orienté acyclique à partir de parcours en profondeur. Recherche des composantes connexes d'un graphe non orienté. (S2)	On fait le lien entre accessibilité dans un graphe orienté acyclique et ordre.
Recherche des composantes fortement connexes d'un graphe orienté par l'algorithme de Kosaraju. (S3-4)	On fait le lien entre composantes fortement connexes et le problème 2-SAT.
Notion de plus courts chemins dans un graphe pondéré. Algorithme de Dijkstra. Algorithme de Floyd-Warshall. (S2)	On présente l'algorithme de Dijkstra avec une file de priorité en lien avec la représentation de graphes par listes d'adjacences. On présente l'algorithme de Floyd-Warshall en lien avec la représentation de graphes par matrice d'adjacence.
Recherche d'un arbre couvrant de poids minimum par l'algorithme de Kruskal. (S3-4)	On peut mentionner l'adaptation au problème du chemin le plus large dans un graphe non-orienté.
Recherche d'un couplage de cardinal maximum dans un graphe biparti par des chemins augmentants. (S3-4)	On se limite à une approche élémentaire ; l'algorithme de Hopcroft-Karp n'est pas au programme. Les graphes bipartis et couplages sont introduits comme outils naturels de modélisation ; ils peuvent également constituer une introduction aux problèmes de flots.

Mise en œuvre
Une attention particulière est portée sur le choix judicieux du mode de représentation d'un graphe en fonction de l'application et du problème considéré. On étudie en conséquence l'impact de la représentation sur la conception d'un algorithme et sur sa complexité (en temps et en espace). On se concentre sur l'approfondissement des algorithmes cités dans le programme et le ré-emploi de leurs idées afin de résoudre des problèmes similaires. La connaissance d'une bibliothèque d'algorithmes fonctionnant sur des principes différents mais résolvant un même problème n'est pas un objectif du programme.

4.6 Algorithmique pour l'intelligence artificielle et l'étude des jeux (S3-4)

Cette partie permet d'introduire les concepts d'apprentissage, de stratégie et d'heuristique. Ce dernier est abordé par des exemples où l'heuristique est précisément définie mais sans en évaluer la performance.

Notions	**Commentaires**
Apprentissage supervisé.	Algorithme des k plus proches voisins avec distance euclidienne. Arbres k dimensionnels. Apprentissage d'arbre de décision : algorithme ID3 restreint au cas d'arbres binaires. Matrice de confusion. On observe des situations de sur-apprentissage sur des exemples.
Apprentissage non-supervisé.	Algorithme de classification hiérarchique ascendante. Algorithme des k-moyennes. La démonstration de la convergence n'est pas au programme. On observe des convergences vers des minima locaux.
Jeux d'accessibilité à deux joueurs sur un graphe. Stratégie. Stratégie gagnante. Position gagnante. Détermination des positions gagnantes par le calcul des attracteurs. Construction de stratégies gagnantes.	On considère des jeux à deux joueurs (J_1 et J_2) modélisés par des graphes bipartis (l'ensemble des états contrôlés par J_1 et l'ensemble des états contrôlés par J_2). Il y a trois types d'états finals : les états gagnants pour J_1, les états gagnants pour J_2 et les états de match nul. On ne considère que les stratégies sans mémoire.
Notion d'heuristique. Algorithme min-max avec une heuristique. Élagage alpha-beta.	
Graphe d'états. Recherche informée : algorithme A*.	On souligne l'importance de l'admissibilité de l'heuristique, ainsi que le cas où l'heuristique est également monotone.

Mise en œuvre
La connaissance des théories sous-jacentes aux algorithmes de cette section n'est pas un attendu du programme. Les étudiants acquièrent une familiarité avec les idées qu'ils peuvent réinvestir dans des situations où les modélisations et les recommandations d'implémentation sont guidées.

5 Gestion des ressources de la machine (S1)(S3-4)

Le programme vise à donner un premier aperçu des liens qu'assurent les systèmes d'exploitation (plus largement les plates-formes d'exécution) entre les programmes et les ressources offertes par les machines qui les exécutent. Le fonctionnement du matériel, l'architecture des ordinateurs, la conception des systèmes, la gestion des interfaces, les protocoles de communication, la virtualisation (de la mémoire, des processeurs, etc.) sont hors programme. Ce programme se focalise sur trois aspects de la gestion de la machine :

— la mémoire au sein d'un processus qui exécute un programme ;
— les systèmes de fichiers qui permettent d'interagir avec un processus, en entrée et sortie ;
— la concurrence au sein des processus par des fils d'exécution, exploitant les possibilités d'exécution concurrente des processeurs actuels.

Bien que ces notions soient indépendantes du système d'exploitation, le système Linux est le plus propice pour introduire les éléments de ce programme.

5.1 Gestion de la mémoire d'un programme (S1)

Notions	Commentaires
Utilisation de la pile et du tas par un programme compilé.	On présente l'allocation des variables globales, le bloc d'activation d'un appel.
Notion de portée syntaxique et durée de vie d'une variable. Allocation des variables locales et paramètres sur la pile.	On indique la répartition selon la nature des variables : globales, locales, paramètres.
Allocation dynamique.	On présente les notions en lien avec le langage C : `malloc` et `free`, pointeur nul, type `void*`, transtypage, relation avec les tableaux, protection mémoire (*segmentation violation*).

5.2 Gestion des fichiers et entrées-sorties (S1)

Notions	Commentaires
Interface de fichiers : taille, accès séquentiel.	
Implémentation interne : blocs et nœuds d'index (*inode*).	On présente le partage de blocs (avec liens physiques ou symboliques) et l'organisation hiérarchique de l'espace de nommage.
Accès, droits et attributs.	On utilise sur des exemples les fonctions d'accès et d'écriture dans les différents modes.
Fichiers spéciaux : flux standard (entrée standard `stdin`, sortie standard `stdout`, sortie d'erreur standard `stderr`) et redirections dans l'interface système (*shell*).	On présente la notion de tube (*pipe*).

Mise en œuvre
Les seules notions exigibles sont celles permettant à un programme de gérer l'ouverture, la fermeture et l'accès à un ou plusieurs fichiers, selon les modalités précisées en annexes. On attend toutefois d'un étudiant une expérience du montage d'un support de fichiers amovible, de la gestion des droits d'accès à des parties de l'arborescence, de la création et du déplacement des parties de l'aborescence et de la gestion des liens physiques et symboliques. Le professeur expose également ses étudiants à la réalisation d'enchaînements de programmes via des tubes (*pipes*).

5.3 Gestion de la concurrence et synchronisation (S3-4)

L'apprentissage des notions liées au parallélisme d'exécution se limite au cas de fils d'exécutions (*threads*) internes à un processus, sur une machine. Les problèmes d'algorithmes répartis et les notions liées aux réseaux et à la communication asynchrone sont hors programme.

Notions	**Commentaires**
Notion de fils d'exécution. Non-déterminisme de l'exécution.	Les notions sont présentées au tableau en privilégiant le pseudo-code ; elles sont mises en œuvre au cours de travaux pratiques en utilisant les bibliothèques POSIX `pthread` (en langage C) ou `Thread` (en langage OCaml), au choix du professeur, selon les modalités précisées en annexe. On s'en tient aux notions de base : création, attente de terminaison.
Synchronisation de fils d'exécution. Algorithme de Peterson pour deux fils d'exécution. Algorithme de la boulangerie de Lamport pour plusieurs fils d'exécution.	On illustre l'importance de l'atomicité par quelques exemples et les dangers d'accès à une variable en l'absence de synchronisation. On présente les notions de mutex et sémaphores.

Mise en œuvre
Les concepts sont illustrés sur des schémas de synchronisation classiques : rendez-vous, producteur-consommateur. Les étudiants sont également sensibilisés au non-déterminisme et aux problèmes d'interblocage et d'équité d'accès, illustrables sur le problème classique du dîner des philosophes.

6 Logique (S2)(S3-4)

6.1 Syntaxe des formules logiques (S2)

Le but de cette partie est de familiariser progressivement les étudiants avec la différence entre syntaxe et sémantique d'une part et de donner le vocabulaire permettant de modéliser une grande variété de situations (par exemple, satisfaction de contraintes, planification, diagnostic, vérification de modèles, etc.).
L'étude des quantificateurs est l'occasion de formaliser les notions de variables libres et liées, et de portée, notions que l'on retrouve dans la pratique de la programmation.

Notions	Commentaires
Variables propositionnelles, connecteurs logiques, arité. Formules propositionnelles, définition par induction, représentation comme un arbre. Sous-formule. Taille et hauteur d'une formule.	Notations : $\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$. Les formules sont des données informatiques. On fait le lien entre les écritures d'une formule comme mot et les parcours d'arbres.
Quantificateurs universel et existentiel. Variables liées, variables libres, portée. Substitution d'une variable.	On ne soulève aucune difficulté technique sur la substitution. L'unification est hors programme.

Mise en œuvre
On implémente uniquement les formules propositionnelles sous forme d'arbres.

6.2 Sémantique de vérité du calcul propositionnel (S2)

Par souci d'éviter trop de technicité, on ne présente la notion de valeur de vérité que pour des formules sans quantificateurs.

Notions	Commentaires
Valuations, valeurs de vérité d'une formule propositionnelle. Satisfiabilité, modèle, ensemble de modèles, tautologie, antilogie. Équivalence sur les formules. Conséquence logique entre deux formules.	Notations V pour la valeur vraie, F pour la valeur fausse. Une formule est satisfiable si elle admet un modèle, tautologique si toute valuation en est un modèle. On peut être amené à ajouter à la syntaxe une formule tautologique et une formule antilogique ; elles sont en ce cas notées $\top$ et $\bot$. On présente les lois de De Morgan, le tiers exclu et la décomposition de l'implication. On étend la notion à celle de conséquence ϕ d'un ensemble de formules Γ : on note $\Gamma \models \phi$. La compacité est hors programme.
Forme normale conjonctive, forme normale disjonctive. Mise sous forme normale.	Lien entre forme normale disjonctive complète et table de vérité. On peut représenter les formes normales comme des listes de listes de littéraux. Exemple de formule dont la taille des formes normales est exponentiellement plus grande.
Problème SAT, n-SAT, algorithme de Quine.	On incarne SAT par la modélisation d'un problème (par exemple la coloration des sommets d'un graphe).

6.3 Déduction naturelle (S3-4)

Il s'agit de présenter les preuves comme permettant de pallier deux problèmes de la présentation précédente du calcul propositionnel : nature exponentielle de la vérification d'une tautologie, faible lien avec les preuves mathématiques.
Il ne s'agit, en revanche, que d'introduire la notion d'arbre de preuve. La déduction naturelle est présentée comme un jeu de règles d'inférence simple permettant de faire un calcul plus efficace que l'étude de la table de vérité. Toute technicité dans les preuves dans ce système est à proscrire.

Notions	**Commentaires**
Règle d'inférence, dérivation.	Notation $\vdash$. Séquent $H_1, \ldots, H_n \vdash C$. On présente des exemples tels que le *modus ponens* ($p, p \to q \vdash q$) ou le syllogisme *barbara* ($p \to q, q \to r \vdash p \to r$).
Définition inductive d'un arbre de preuve.	On présente des exemples utilisant les règles précédentes.
Règles d'introduction et d'élimination de la déduction naturelle pour les formules propositionnelles. Correction de la déduction naturelle pour les formules propositionnelles.	On présente les règles pour $\wedge, \vee, \neg$ et $\to$. On écrit de petits exemples d'arbre de preuves (par exemple $\vdash (p \to q) \to \neg(p \wedge \neg q)$, etc.).
Règles d'introduction et d'élimination pour les quantificateurs universels et existentiels.	On motive ces règles par une approche sémantique intuitive.

Mise en œuvre
Il ne s'agit pas d'implémenter ces règles mais plutôt d'être capable d'écrire de petites preuves dans ce système. On peut également présenter d'autres utilisations de règles d'inférences pour raisonner.

7 Bases de données (S2)

On se limite volontairement à une description applicative des bases de données en langage SQL. Il s'agit de permettre d'interroger une base présentant des données à travers plusieurs relations. On ne présente ni l'algèbre relationnelle ni le calcul relationnel.

Notions	Commentaires
Vocabulaire des bases de données : tables ou relations, attributs ou colonnes, domaine, schéma de tables, enregistrements ou lignes, types de données.	On présente ces concepts à travers de nombreux exemples. On s'en tient à une notion sommaire de domaine : entier, flottant, chaîne ; aucune considération quant aux types des moteurs SQL n'est au programme. Aucune notion relative à la représentation des dates n'est au programme ; en tant que de besoin on s'appuie sur des types numériques ou chaîne pour lesquels la relation d'ordre coïncide avec l'écoulement du temps. Toute notion relative aux collations est hors programme ; en tant que de besoin on se place dans l'hypothèse que la relation d'ordre correspond à l'ordre lexicographique usuel.
Clé primaire.	Une clé primaire n'est pas forcément associée à un unique attribut même si c'est le cas le plus fréquent. La notion d'index est hors programme.
Entités et associations, clé étrangère.	On s'intéresse au modèle entité–association au travers de cas concrets d'associations $1-1, 1-*, *-*$. Séparation d'une association $*-*$ en deux associations $1-*$. L'utilisation de clés primaires et de clés étrangères permet de traduire en SQL les associations $1-1$ et $1-*$.
Requêtes `SELECT` avec simple clause `WHERE` (sélection), projection, renommage `AS`. Utilisation des mots-clés `DISTINCT`, `LIMIT`, `OFFSET`, `ORDER BY`. Opérateurs ensemblistes `UNION`, `INTERSECT` et `EXCEPT`, produit cartésien.	Les opérateurs au programme sont `+`, `-`, `*`, `/` (on passe outre les subtilités liées à la division entière ou flottante), `=`, `<>`, `<`, `<=`, `>`, `>=`, `AND`, `OR`, `NOT`, `IS NULL`, `IS NOT NULL`.
Jointures internes T_1 `JOIN` T_2 … `JOIN` T_n `ON` ϕ, externes à gauche T_1 `LEFT JOIN` T_2 `ON` ϕ.	On présente les jointures (internes) en lien avec la notion d'associations entre entités.
Agrégation avec les fonctions `MIN`, `MAX`, `SUM`, `AVG` et `COUNT`, y compris avec `GROUP BY`.	Pour la mise en œuvre des agrégats, on s'en tient à la norme SQL99. On présente quelques exemples de requêtes imbriquées.
Filtrage des agrégats avec `HAVING`.	On marque la différence entre `WHERE` et `HAVING` sur des exemples.

Mise en œuvre
La création, la suppression et la modification de tables au travers du langage SQL sont hors programme. La mise en œuvre effective se fait au travers d'un logiciel permettant d'interroger une base de données à l'aide de requêtes SQL. Récupérer le résultat d'une requête à partir d'un programme n'est pas un objectif. Même si aucun formalisme graphique précis n'est au programme, on peut décrire les entités et les associations qui les lient au travers de diagrammes sagittaux informels. Sont hors programme : la notion de modèle logique *vs* physique, les bases de données non relationnelles, les méthodes de modélisation de base, les fragments DDL, TCL et ACL du langage SQL, l'optimisation de requêtes par l'algèbre relationnelle.

8 Langages formels (S3-4)

8.1 Langages réguliers

On introduit les expressions régulières comme formalisme dénotationnel pour spécifier un motif dans le cadre d'une recherche textuelle.

Notions	**Commentaires**
Alphabet, mot, préfixe, suffixe, facteur, sous-mot.	Le mot vide est noté ε.
Langage comme ensemble de mots sur un alphabet. Opérations régulières sur les langages (union, concaténation, étoile de Kleene). Définition inductive des langages réguliers.	
Expression régulière. Dénotation d'un langage régulier.	On introduit les expressions régulières comme un formalisme dénotationnel pour les motifs. On note l'expression dénotant le langage vide $\emptyset$, celle dénotant le langage réduit au mot vide ε, l'union par $\mid$, la concaténation par juxtaposition et l'étoile de Kleene par une étoile.
Expressions régulières étendues.	Le lien est fait avec les expressions régulières de la norme POSIX, mais on ne développe aucune théorie supplémentaire à leur sujet et aucune connaissance au sujet de cette norme n'est exigible.

8.2 Automates finis

Les automates constituent un modèle de calcul puissant qui irrigue de nombreuses branches de l'informatique. On voit ici les automates comme un formalisme opérationnel efficace pour la recherche de motifs. On vérifie que le formalisme des automates coïncide exactement avec l'expressivité des expressions régulières.

Notions	**Commentaires**
Automate fini déterministe. État accessible, co-accessible. Automate émondé. Langage reconnu par un automate.	On insiste sur la richesse de systèmes dont le fonctionnement peut être modélisé par un automate.
Transition spontanée (ou ε-transition). Automate fini non déterministe.	
Déterminisation d'un automate non déterministe.	On fait le lien entre l'élimination des transitions spontanées et l'accessibilité dans un graphe. On aborde l'élimination des transitions spontanées et plus généralement les constructions d'automates à la Thompson sur des exemples, sans chercher à formaliser complètement les algorithmes sous-jacents.
Construction de l'automate de Glushkov associé à une expression régulière par l'algorithme de Berry-Sethi.	Les notions de langage local et d'expression régulière linéaire sont introduites dans cette seule perspective.
Passage d'un automate à une expression régulière. Élimination des états. Théorème de Kleene.	On se limite à la description du procédé d'élimination et à sa mise en œuvre sur des exemples d'automates de petite taille ; cela constitue la preuve du sens réciproque du théorème de Kleene.
Stabilité de la classe des langages reconnaissables par union finie, intersection finie, complémentaire.	
Lemme de l'étoile.	Soit L le langage reconnu par un automate à n états : pour tout $u \in L$ tel que $\|u\| \geq n$, il existe x, y, z tels que $u = xyz$, $\|xy\| \leq n$, $y \neq \varepsilon$ et $xy^*z \subseteq L$.

8.3 Grammaires non contextuelles

Les grammaires formelles ont pour principal intérêt de définir des syntaxes structurées, en particulier celles des langages informatiques (langage de programmation, langage de requête, langage de balisage, etc.). On s'intéresse surtout à la manière dont les mots s'obtiennent par la grammaire et, de façon modeste, à la manière d'analyser un mot (un programme) en une structure de données qui le représente.

Notions	**Commentaires**
Grammaire non contextuelle. Vocabulaire : symbole initial, symbole non-terminal, symbole terminal, règle de production, dérivation immédiate, dérivation. Langage engendré par une grammaire, langage non contextuel. Non contextualité des langages réguliers.	Notations : règle de production $\rightarrow$, dérivation immédiate $\Rightarrow$, dérivation $\Rightarrow^*$. On montre comment définir une expression arithmétique ou une formule de la logique propositionnelle par une grammaire. On peut présenter comme exemple un mini-langage fictif de programmation ou un mini-langage de balisage. Sont hors programme : les automates à pile, les grammaires syntagmatiques générales, la hiérarchie de Chomsky.
Arbre d'analyse. Dérivation à gauche, à droite. Ambiguïté d'une grammaire. Équivalence faible.	On présente le problème du « sinon pendant » (*dangling else*).
Exemple d'algorithme d'analyse syntaxique.	On peut présenter au tableau un algorithme *ad hoc* d'analyse syntaxique par descente récursive (algorithme *top-down*) pour un langage de balisage fictif (par exemple, la grammaire de symbole initial S et de règles de production $S \rightarrow TS\|c$, $T \rightarrow aSb$ sur l'alphabet $\{a, b, c\}$). On ne parle pas d'analyseur LL ou LR. On ne présente pas de théorie générale de l'analyse syntaxique.

Mise en œuvre
On étudie surtout de petits exemples que l'on peut traiter à la main et qui modélisent des situations rencontrées couramment en informatique. On fait le lien avec la définition par induction de certaines structures de données (listes, arbres, formules de logique propositionnelle).

9 Décidabilité et classes de complexité (S3-4)

On s'intéresse à la question de savoir ce qu'un algorithme peut ou ne peut pas faire, inconditionnellement ou sous condition de ressources en temps. Cette partie permet de justifier la construction, plus haut, d'algorithmes exhaustifs, approchés, probabilistes, etc. On s'appuie sur une compréhension pratique de ce qu'est un algorithme.

Notions	**Commentaires**
Problème de décision. Taille d'une instance. Complexité en ordre de grandeur en fonction de la taille d'une instance. Opération élémentaire. Complexité en temps d'un algorithme. Classe **P**.	Les opérations élémentaires sont les lectures et écritures en mémoire, les opérations arithmétiques, etc. La notion de machine de Turing est hors programme. On s'en tient à une présentation intuitive du modèle de calcul (code exécuté avec une machine à mémoire infinie). On insiste sur le fait que la classe **P** concerne des problèmes de décision.
Réduction polynomiale d'un problème de décision à un autre problème de décision.	On se limite à quelques exemples élémentaires.
Certificat. Classe **NP** comme la classe des problèmes que l'on peut vérifier en temps polynomial. Inclusion $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$.	Les modèles de calcul non-déterministes sont hors programme.
NP-complétude. Théorème de Cook-Levin (admis) : SAT est NP-complet.	On présente des exemples de réduction de problèmes NP-complets à partir de SAT. La connaissance d'un catalogue de problèmes NP-complets n'est pas un objectif du programme.
Transformation d'un problème d'optimisation en un problème de décision à l'aide d'un seuil.	
Notion de machine universelle. Problème de l'arrêt.	

Mise en œuvre
On prend soin de distinguer la notion de complexité d'un algorithme de la notion de classe de complexité d'un problème. Le modèle de calcul est une machine à mémoire infinie qui exécute un programme rédigé en OCaml ou en C. La maîtrise ou la technicité dans des formalismes avancés n'est pas un objectif du programme.

A Langage C

La présente annexe liste limitativement les éléments du langage C (norme C99 ou plus récente) dont la connaissance, selon les modalités de chaque sous-section, est exigible des étudiants à la fin de la première année. Ces éléments s'inscrivent dans la perspective de lire et d'écrire des programmes en C ; aucun concept sous-jacent n'est exigible au titre de la présente annexe.
À l'écrit, on travaille toujours sous l'hypothèse que les entêtes suivants ont tous été inclus : <assert.h>, <stdbool.h>, <stddef.h>, <stdint.h>, <stdio.h>, <stdlib.h>. Mais ces fichiers ne font pas en soi l'objet d'une étude et aucune connaissance particulière des fonctionnalités qu'ils apportent n'est exigible.

A.1 Traits et éléments techniques à connaître

Les éléments et notations suivants du langage C doivent pouvoir être compris et utilisés par les étudiants sans faire l'objet d'un rappel, y compris lorsqu'ils n'ont pas accès à un ordinateur.

Traits généraux

- Typage statique. Types indiqués par le programme lors de la déclaration ou définition.
- Passage par valeur.
- Délimitation des portées par les accolades. Les retours à la ligne et l'indentation ne sont pas signifiants mais sont nécessaires pour la lisibilité du code.
- Déclaration et définition de fonctions, uniquement dans le cas d'un nombre fixé de paramètres.
- Gestion de la mémoire : pile et tas, allocation statique et dynamique, durée de vie des objets.

Définitions et types de base

- Types entiers signés `int8_t`, `int32_t` et `int64_t`, types entiers non signés `uint8_t`, `uint32_t` et `uint64_t`. Lorsque la spécification d'une taille précise pour le type n'apporte rien à l'exercice, on utilise les types signé **`int`** et non signé **`unsigned int`**. Opérations arithmétiques `+`, `-`, `/`, `*`. Opération `%` entre opérandes positifs. Ces opérations sont sujettes à dépassement de capacité. À l'écrit, on élude les difficultés liées à la sémantique des constantes syntaxiques. On ne présente pas les opérateurs d'incrémentation.
- Le type **`char`** sert exclusivement à représenter des caractères codés sur un octet. Notation `'\0'` pour le caractère nul.
- Type **`double`** (on considère qu'il est sur 64 bits). Opérations `+`, `-`, `*`, `/`.
- Type `bool` et les constantes `true` et `false`. Opérateurs `!`, `&&`, `||` (y compris évaluation paresseuse). Les entiers ne doivent pas être utilisés comme booléens, ni l'inverse.
- Opérateurs de comparaison `==`, `!=`, `<`, `>`, `<=`, `>=`.
- Les constantes du programme sont définies par **`const`** *type* c `=` v. On n'utilise pas la directive du préprocesseur **`#define`** à cette fin.

Types structurés

- Tableaux statiques : déclaration par *type* T`[`s`]` où s est une constante littérale entière. Lecture et écriture d'un terme de tableau par son indice T`[`i`]` ; le langage ne vérifie pas la licéité des accès. Tableaux statiques multidimensionnels.
- Définition d'un type structuré par **`struct`** *nom_s* `{`*type*$_1$ *champ*$_1$`;` ... *type*$_n$ *champ*$_n$`;}` et ensuite **`typedef struct`** *nom_s nom* (la syntaxe doit cependant être rappelée si les étudiants sont amenés à écrire de telles définitions). Lecture et écriture d'un champ d'une valeur de type structure par v`.`*champ* ainsi que v`->`*champ*. L'organisation en mémoire des structures n'est pas à connaître.
- Chaînes de caractères vues comme des tableaux de caractères avec sentinelle nulle. Fonctions `strlen`, `strcpy`, `strcat`.

Structures de contrôle

- Conditionnelle **`if`** `(`c`)` s_T, **`if`** `(`c`)` s_T **`else`** s_F.
- Boucle **`while`** `(`c`)` s ; boucle **`for`** `(`*init*`;` *fin*`;` *incr*`)` s, possibilité de définir une variable dans *init* ; **`break`**.

— Définition et déclaration de fonction, passage des paramètres par valeur, y compris des pointeurs. Cas particuliers : passage de paramètre de type tableau, simulation de valeurs de retour multiples.

Pointeurs et gestion de la mémoire

— Pointeur vers un objet alloué, notation *type*`* `*p*` = &`*v*. On considère que les pointeurs sont sur 64 bits.
— Déréférencement d'un pointeur valide, notation `*`*p*. On ne fait pas d'arithmétique des pointeurs.
— Pointeurs comme moyen de réaliser une structure récursive. Pointeur `NULL`.
— Création d'un objet sur le tas avec `malloc` et **`sizeof`** (on peut présenter `size_t` pour cet usage mais sa connaissance n'est pas exigible). Libération avec `free`.
— Transtypage de données depuis et vers le type `void*` dans l'optique stricte de l'utilisation de fonctions comme `malloc`.
— En particulier : gestion de tableaux de taille non statiquement connue; linéarisation de tels tableaux quand ils sont multidimensionnels.

Divers

— Utilisation de `assert` lors d'opérations sur les pointeurs, les tableaux, les chaînes.
— Flux standard.
— Utilisation élémentaire de `printf` et de `scanf`. La syntaxe des chaînes de format n'est pas exigible.
— Notion de fichier d'en-tête. Directive **`#include`** `"`*fichier.h*`"`.
— Commentaires `/* ... */` et commentaires ligne `//`

A.2 Éléments techniques devant être reconnus et utilisables après rappel

Les éléments suivants du langage C doivent pouvoir être utilisés par les étudiants pour écrire des programmes dès lors qu'ils ont fait l'objet d'un rappel et que la documentation correspondante est fournie.

Traits généraux et divers

— Utilisation de **`#define`**, **`#ifndef`** et **`#endif`** lors de l'écriture d'un fichier d'en-tête pour rendre son inclusion idempotente.
— Rôle des arguments de la fonction **`int`** `main(`**`int`** `argc, `**`char*`** `argv[])` ; utilisation des arguments à partir de la ligne de commande.
— Fonctions de conversion de chaînes de caractères vers un type de base comme `atoi`.
— Définition d'un tableau par un initialisateur `{`t_0`, `t_1`, `$\dots$`, `t_{N-1}`}`.
— Définition d'une valeur de type structure par un initialisateur `{.`c_1` = `v_1`, .`c_2` = `v_2`, `$\dots$`}`.
— Compilation séparée.

Gestions des ressources de la machine

— Gestion de fichiers : `fopen` (dans les modes `r` ou `w`), `fclose`, `fscanf`, `fprintf` avec rappel de la syntaxe de formatage.
— Fils d'exécution : inclusion de l'entête `pthread.h`, type `pthread_t`, commandes `pthread_create` avec attributs par défaut, `pthread_join` sans récupération des valeurs de retour.
— Mutex : inclusion de l'entête `pthread.h`, type `pthread_mutex_t`, commandes `pthread_mutex_lock`, `pthread_mutex_unlock`, `pthread_mutex_destroy`.
— Sémaphore : inclusion de l'entête `semaphore.h`, type `sem_t`, commandes `sem_init`, `sem_destroy`, `sem_wait`, `sem_post`.

B Langage OCaml

La présente annexe liste limitativement les éléments du langage OCaml (version 4 ou supérieure) dont la connaissance, selon les modalités de chaque sous-section, est exigible des étudiants. Aucun concept sous-jacent n'est exigible au titre de la présente annexe.

B.1 Traits et éléments techniques à connaître

Les éléments et notations suivants du langage OCaml doivent pouvoir être compris et utilisés par les étudiants sans faire l'objet d'un rappel, y compris lorsqu'ils n'ont pas accès à un ordinateur.

Traits généraux

- Typage statique, inférence des types par le compilateur. Idée naïve du polymorphisme.
- Passage par valeur.
- Portée lexicale : lorsqu'une définition utilise une variable globale, c'est la valeur de cette variable au moment de la définition qui est prise en compte.
- Curryfication des fonctions. Fonction d'ordre supérieur.
- Gestion automatique de la mémoire.
- Les retours à la ligne et l'indentation ne sont pas signifiants mais sont nécessaires pour la lisibilité du code.

Définitions et types de base

- `let`, `let rec` (pour des fonctions), `let rec … and …`, `fun` x y `->` e.
- `let` v `=` e `in` e', `let rec` f x `=` e `in` e'.
- Expression conditionnelle `if` e `then` e_V `else` e_F.
- Types de base : `int` et les opérateurs `+`, `-`, `*`, `/`, l'opérateur `mod` quand toutes les grandeurs sont positives ; exception `Division_by_zero` ; `float` et les opérateurs `+.`, `-.`, `*.`, `/.` ; `bool`, les constantes `true` et `false` et les opérateurs `not`, `&&`, `||` (y compris évaluation paresseuse). Entiers et flottants sont sujets aux dépassements de capacité.
- Comparaisons sur les types de base : `=`, `<>`, `<`, `>`, `<=`, `>=`.
- Types `char` et `string` ; `'`x`'` quand x est un caractère imprimable, `"`x`"` quand x est constituée de caractères imprimables, `String.length`, s`.[`i`]`, opérateur `^`. Existence d'une relation d'ordre total sur `char`. Immuabilité des chaînes.

Types structurés

- n-uplets ; non-nécessité d'un `match` pour récupérer les valeurs d'un n-uplet.
- Listes : type `'a list`, constructeurs `[]` et `::`, notation `[`x`;` y`;` z`]` ; opérateur `@` (y compris sa complexité) ; `List.length`. Motifs de filtrage associés.
- Tableaux : type `'a array`, notations `[|…|]`, t`.(`i`)`, t`.(`i`) <-` v ; fonctions `length`, `make`, et `copy` (y compris le caractère superficiel de cette copie) du module `Array`.
- Type `'a option`.
- Déclaration de type, y compris polymorphe.
- Types énumérés (ou sommes, ou unions), récursifs ou non ; les constructeurs commencent par une majuscule, contrairement aux identifiants. Motifs de filtrage associés.
- Filtrage : `match` e `with` p_0 `->` v_0 `|` p_1 `->` v_1 … ; les motifs ne doivent pas comporter de variable utilisée antérieurement ni deux fois la même variable ; motifs plus ou moins généraux, notation `_`, importance de l'ordre des motifs quand ils ont des instances communes.

Programmation impérative

- Absence d'instruction ; la programmation impérative est mise en œuvre par des expressions impures ; `unit`, `()`.
- Références : type `'a ref`, notations `ref`, `!`, `:=`. Les références doivent être utilisées à bon escient.
- Séquence `;`. La séquence intervient entre deux expressions.
- Boucle `while` c `do` b `done` ; boucle `for` v `=` d `to` f `do` b `done`.

Divers

— Usage de `begin ... end`.
— `print_int`, `print_float`, `print_string`, `read_int`, `read_float`, `read_line`.
— Exceptions : levée et filtrage d'exceptions existantes avec `raise`, `try ... with ...` ; dans les cas irrattrapables, on peut utiliser `failwith`.
— Utilisation d'un module : notation $M.f$. Les noms des modules commencent par une majuscule.
— Syntaxe des commentaires, à l'exclusion de la nécessité d'équilibrer les délimiteurs dans un commentaire.

B.2 Éléments techniques devant être reconnus et utilisables après rappel

Les éléments suivants du langage OCaml doivent pouvoir être utilisés par les étudiants pour écrire des programmes dès lors qu'ils ont fait l'objet d'un rappel et que la documentation correspondante est fournie.

Traits divers

— Types de base : opérateur `mod` avec opérandes de signes quelconques, opérateur `**`.
— Types enregistrements mutables ou non, notation `{`c_0 `:` t_0`;` c_1 `:` t_1`; ...}`, `{`c_0 `:` t_0`; mutable` c_1 `:` t_1`; ...}` ; leurs valeurs, notations `{`c_0 `=` v_0`;` c_1 `=` v_1`; ...}`, $e.c$, $e.c$ `<-` v.
— Fonctions de conversion entre types de base.
— Listes : fonctions `mem`, `exists`, `for_all`, `filter`, `map`, `iter` du module `List`.
— Tableaux : fonctions `make_matrix`, `init`, `mem`, `exists`, `for_all`, `map` et `iter` du module `Array`.
— Types mutuellement récursifs.
— Filtrage : plusieurs motifs peuvent être rassemblés s'ils comportent exactement les mêmes variables. Notation `function` p_0 `->` v_0 `|` p_1 `->` v_1 `...`.
— Boucle `for` v `=` f `downto` d `do` b `done`.
— Piles et files mutables : fonctions `create`, `is_empty`, `push` et `pop` des modules `Queue` et `Stack` ainsi que l'exception `Empty`.
— Dictionnaires mutables réalisés par tables de hachage sans liaison multiple ni randomisation par le module `Hashtbl` : fonctions `create`, `add`, `remove`, `mem`, `find` (y compris levée de `Not_found`), `find_opt`, `iter`.
— `Sys.argv`.
— Utilisation de `ocamlc` ou `ocamlopt` pour compiler un fichier dépendant uniquement de la bibliothèque standard.

Gestions des ressources de la machine

— Gestion de fichiers : fonctions `open_in`, `open_out`, `close_in`, `close_out`, `input_line`, `output_string`.
— Fils d'exécution : recours au module `Thread`, fonctions `Thread.create`, `Thread.join`.
— Mutex : recours au module `Mutex`, fonctions `Mutex.create`, `Mutex.lock`, `Mutex.unlock`.

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Mathématiques, physique, ingénierie et informatique (MP2I)

Annexe 2
Programme de physique-chimie

Programme de physique-chimie de la voie MPII

Préambule

Objectifs de formation

Le programme de physique-chimie de la classe de MPII est conçu comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités préparant les étudiants à la deuxième année de classe préparatoire et, au-delà, à un cursus d'ingénieur, de chercheur ou d'enseignant. Ce programme permet à tous les étudiants qui ont un parcours d'études secondaires leur ayant permis d'être admis dans une classe de MPII de se préparer à un parcours réussi en deuxième année des différentes voies qui leur sont accessibles. En particulier, il repose sur une progression des enseignements adaptée à la réussite de tous, entre le premier et le second semestre.

L'acquisition de ce socle par les étudiants constitue un objectif prioritaire pour l'enseignant.
Parce que la physique et la chimie sont avant tout des sciences expérimentales qui développent la curiosité, la créativité et l'analyse critique, l'expérience est au cœur de son enseignement, que ce soit en cours ou lors des séances de travaux pratiques. Les activités expérimentales habituent les étudiants à se confronter au réel, comme ils auront à le faire dans l'exercice de leur métier.

De même, l'introduction de capacités numériques dans le programme prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation. Elles offrent aux étudiants la possibilité d'effectuer une modélisation avancée du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires.

La démarche de modélisation occupe également une place centrale dans le programme pour former les étudiants à établir, de manière autonome, un lien, fait d'allers-retours, entre le « monde » des objets, des expériences, des faits, et celui des modèles et des théories. L'enseignant doit rechercher un point d'équilibre entre des approches complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative. La construction d'un modèle passe aussi par l'utilisation maîtrisée des mathématiques dont un des fondateurs de la physique expérimentale, Galilée, énonçait déjà qu'elles sont le langage dans lequel est écrit le monde.

Enfin, l'autonomie et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à exercer les étudiants à mobiliser de façon complémentaire connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Organisation du programme

Le programme est organisé en deux parties.

Dans la première partie, intitulée **« Formation expérimentale »,** sont décrits les objectifs de formation sur le thème « Mesures et incertitudes » ainsi que les méthodes et les capacités expérimentales que les étudiants doivent maîtriser à la fin de l'année scolaire. Leur mise en œuvre doit notamment s'appuyer sur des problématiques concrètes identifiées en gras dans la seconde partie du programme intitulée « **Contenus thématiques** ». Elles doivent être programmées par l'enseignant de façon à assurer un apprentissage progressif de l'ensemble des capacités attendues.

La seconde partie, intitulée « **Contenus thématiques »** est structurée autour de trois thèmes : « ondes et signaux », « mouvements et interactions » et « l'énergie : conversions et transferts ». Un quatrième thème « constitution et transformations de la matière » est proposé aux étudiants qui suivent, au deuxième semestre, l'option « sciences de l'ingénieur ». La présentation en deux colonnes (« notions et

contenus » et « capacités exigibles ») met en valeur les éléments clefs constituant le socle de connaissances et de capacités dont l'assimilation par tous les étudiants est requise. La progression dans les contenus disciplinaires est organisée en deux semestres. Pour faciliter la progressivité des acquisitions, au premier semestre les grandeurs physiques introduites sont essentiellement des grandeurs scalaires dépendant du temps et éventuellement d'une variable d'espace.
Certains items de cette seconde partie**, identifiés en caractères gras**, se prêtent particulièrement à une approche expérimentale. Ils doivent être abordés en priorité lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant doivent être privilégiées. La présence de capacités numériques explicitées atteste par ailleurs de la volonté de renforcer ce volet de la formation des étudiants ; l'annexe dédiée à cette composante en précise les objectifs.

Trois annexes sont consacrées d'une part au matériel nécessaire à la mise en œuvre des programmes, d'autre part aux outils mathématiques et aux outils numériques que les étudiants doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de physique et, le cas échéant, de chimie à la fin de l'année de la classe de MPII.

Ce programme précise les objectifs de formation à atteindre pour tous les étudiants. Il n'impose en aucun cas une progression pour chacun des deux semestres ; celle-ci relève de la liberté pédagogique de l'enseignant.

Les compétences travaillées dans le cadre de la démarche scientifique

L'ensemble des activités proposées en classe préparatoire aux grandes écoles – activités expérimentales, résolutions de problèmes, TIPE, etc. – permet de travailler les compétences de la démarche scientifique qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences. L'ordre de présentation de ces compétences ne préjuge pas d'un ordre de mobilisation de ces dernières lors d'une activité.

Les compétences doivent être acquises à l'issue de la formation en CPGE. Elles nécessitent d'être régulièrement mobilisées par les étudiants et sont évaluées en s'appuyant, par exemple, sur l'utilisation de grilles d'évaluation.

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier	- Rechercher, extraire et organiser l'information en lien avec la situation étudiée. - Identifier la complémentarité d'informations présentées sous des formes différentes (texte, graphe, tableau, etc.). - Énoncer ou dégager une problématique scientifique. - Représenter la situation par un schéma modèle. - Identifier les grandeurs pertinentes, leur attribuer un symbole. - Relier le problème à une situation modèle connue. - Acquérir de nouvelles connaissances en autonomie.
Analyser/ Raisonner	- Formuler des hypothèses. - Décomposer un problème en plusieurs problèmes plus simples. - Proposer une stratégie pour répondre à une problématique. - Choisir, concevoir, justifier un protocole, un dispositif expérimental, un modèle ou des lois physiques. - Évaluer des ordres de grandeur. - Identifier les idées essentielles d'un document et leurs articulations. - Relier qualitativement ou quantitativement différents éléments d'un ou de documents.

Réaliser	- Mettre en œuvre les étapes d'une démarche, un protocole, un modèle. - Extraire une information d'un texte, d'un graphe, d'un tableau, d'un schéma, d'une photo. - Schématiser un dispositif, une expérience, une méthode de mesure. - Utiliser le matériel et les produits de manière adaptée en respectant des règles de sécurité. - Effectuer des représentations graphiques à partir de données. - Mener des calculs analytiques ou à l'aide d'un langage de programmation, effectuer des applications numériques. - Conduire une analyse dimensionnelle.
Valider	- Exploiter des observations, des mesures en estimant les incertitudes. - Confronter les résultats d'un modèle à des résultats expérimentaux, à des données figurant dans un document, à ses connaissances. - Confirmer ou infirmer une hypothèse, une information. - Analyser les résultats de manière critique. - Repérer les points faibles d'une argumentation (contradiction, partialité, incomplétude, etc.). - Proposer des améliorations de la démarche ou du modèle.

Communiquer	- À l'écrit comme à l'oral :
	    o présenter les étapes de sa démarche de manière synthétique, organisée et cohérente.
	    o rédiger une synthèse, une analyse, une argumentation.
	    o utiliser un vocabulaire scientifique précis et choisir des modes de représentation adaptés (schémas, graphes, cartes mentales, etc.).
	- Écouter, confronter son point de vue.

Le niveau de maîtrise de ces compétences dépend de **l'autonomie et de l'initiative** requises dans les activités proposées aux étudiants sur les notions et capacités exigibles du programme.
La mise en œuvre des programmes doit aussi être l'occasion d'aborder avec les étudiants des questions liées à l'histoire de l'évolution des idées, des modèles et des théories en physique-chimie, à des questions liées à la recherche scientifique actuelle et à des enjeux citoyens comme la responsabilité individuelle et collective, la **sécurité** pour soi et pour autrui, l'**environnement** et le **développement durable** ou encore le **réchauffement climatique**.

Repères pour l'enseignement

Dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant organise son enseignement en respectant trois grands principes directeurs :

- privilégier la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances, des capacités et des compétences est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Les supports pédagogiques utilisés doivent notamment favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie des étudiants. L'investigation expérimentale et la résolution de problèmes favorisent cette mise en activité ;
- recourir à la mise en contexte des contenus scientifiques : le questionnement scientifique peut être introduit à partir de phénomènes naturels, de procédés industriels ou d'objets technologiques. Le recours à des approches documentaires est un moyen pertinent pour diversifier les supports d'accès à l'information scientifique et technologique et ainsi former l'étudiant à mieux en appréhender la complexité et à apprendre par lui-même. Lorsque le thème

traité s'y prête, l'enseignant peut le mettre en perspective avec l'histoire des sciences et des techniques, avec des questions d'actualité ou des débats d'idées ;
- contribuer à la nécessaire mise en cohérence des enseignements scientifiques ; la progression en physique-chimie doit être articulée avec celles mises en œuvre dans les autres disciplines scientifiques : mathématiques, informatique, sciences industrielles de l'ingénieur.

Concernant l'évaluation, qui vise à mesurer le degré de maîtrise du socle ainsi défini et le niveau d'autonomie et d'initiative des étudiants, l'enseignant veille soigneusement à identifier les compétences et les capacités mobilisées dans les activités proposées afin d'en élargir le plus possible le spectre.

Enfin, le professeur veille aussi à développer chez les étudiants des compétences transversales et préprofessionnelles relatives aux capacités suivantes :
- identifier les différents champs professionnels et les parcours pour y accéder ;
- valoriser ses compétences scientifiques et techniques en lien avec son projet de poursuite d'études ou professionnel.

Formation expérimentale

Cette partie est spécifiquement dédiée à la mise en œuvre de la formation expérimentale des étudiants lors des séances de travaux pratiques.

Dans un premier temps, elle précise les connaissances et savoir-faire qui doivent être acquis dans le domaine de la mesure et de l'évaluation des incertitudes. Elle présente ensuite de façon détaillée l'ensemble des capacités expérimentales qui doivent être acquises en autonomie par les étudiants à l'issue de leur première année de CPGE. Enfin, elle aborde la question de la prévention du risque au laboratoire de physique-chimie.

Une liste de matériel, que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice succincte, figure dans l'annexe 1 du présent programme.

1. Mesures et incertitudes

Les notions et capacités identifiées ci-dessous couvrent les deux années de formation en classe préparatoire aux grandes écoles ; leur pleine maîtrise est donc un objectif de fin de seconde année.
L'accent est mis sur la variabilité de la mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type. La comparaison entre deux valeurs mesurées d'une même grandeur physique est conduite au moyen de l'écart normalisé, l'objectif principal étant de développer l'esprit critique des étudiants en s'appuyant sur un critère quantitatif. Le même esprit prévaut dans l'analyse des résultats d'une régression linéaire qui ne saurait s'appuyer sur l'exploitation non raisonnée du coefficient de corrélation (R^2).
Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
Incertitudes-types composées.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

2. Mesures et capacités expérimentales

Cette partie présente l'ensemble des capacités expérimentales que les étudiants doivent acquérir au cours de l'année durant les séances de travaux pratiques. Une séance de travaux pratiques s'articule autour d'une problématique, que les thèmes – repérés en gras dans la colonne « capacités exigibles »

de la partie « **Contenus thématiques** » du programme – peuvent servir à définir. Le travail de ces capacités et leur consolidation se poursuit en seconde année.

Dans le tableau ci-dessous, les différentes capacités à acquérir sont groupées par domaines thématiques ou transversaux. Cela ne signifie pas qu'une activité expérimentale se limite à un seul domaine. La capacité à former une image de bonne qualité, par exemple, peut être mobilisée au cours d'une expérience de mécanique ou de thermodynamique, cette transversalité de la formation devant être un moyen, entre d'autres, de favoriser l'autonomie et la prise d'initiative.

Nature et méthodes	Capacités exigibles
1. Mesures de longueurs et d'angles Longueurs : sur un banc d'optique.	Mettre en œuvre une mesure de longueur par déplacement d'un viseur entre deux positions.
Longueurs : à partir d'une photo ou d'une vidéo.	Évaluer, par comparaison à un étalon, une longueur (ou les coordonnées d'une position) sur une image numérique et en estimer la précision.
Angles : avec un goniomètre.	Utiliser un viseur à frontale fixe, une lunette autocollimatrice. Utiliser des vis micrométriques et un réticule.
Longueurs d'onde.	Étudier un spectre à l'aide d'un spectromètre à fibre optique. Mesurer une longueur d'onde optique à l'aide d'un goniomètre à réseau. Mesurer une longueur d'onde acoustique à l'aide d'un support gradué et d'un oscilloscope bicourbe.
2. Mesures de temps et de fréquences Fréquence ou période : mesure au fréquencemètre numérique, à l'oscilloscope ou *via* une carte d'acquisition.	Mettre en œuvre une méthode de mesure de fréquence ou de période.
Analyse spectrale.	Choisir de façon cohérente la fréquence d'échantillonnage et la durée totale d'acquisition. Effectuer l'analyse spectrale d'un signal périodique à l'aide d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition.
Décalage temporel/déphasage à l'aide d'un oscilloscope numérique.	Reconnaître une avance ou un retard de phase. Passer d'un décalage temporel à un déphasage et inversement. Repérer précisément le passage par un déphasage de 0 ou π en mode XY.

3. Électricité Mesurer une tension : - mesure directe au voltmètre numérique ou à l'oscilloscope numérique. Mesurer l'intensité d'un courant : - mesure directe à l'ampèremètre numérique ; - mesure indirecte à l'oscilloscope aux bornes d'une résistance adaptée. Mesurer une résistance ou une impédance : - mesure directe à l'ohmmètre/capacimètre ; - mesure indirecte à l'oscilloscope ou au voltmètre sur un diviseur de tension.	Capacités communes à l'ensemble des mesures électriques : - expliquer le lien entre résolution, calibre, nombre de points de mesure ; - préciser la perturbation induite par l'appareil de mesure sur le montage et ses limites (bande passante, résistance d'entrée) ; - définir la nature de la mesure effectuée (valeur efficace, valeur moyenne, amplitude, valeur crête à crête, etc.).
Produire un signal électrique analogique périodique simple à l'aide d'un GBF.	Obtenir un signal de valeur moyenne, de forme, d'amplitude et de fréquence données.
Agir sur un signal électrique à l'aide des fonctions simples suivantes : ○ isolation, amplification, filtrage ; ○ sommation, intégration.	Gérer, dans un circuit électronique, les contraintes liées à la liaison entre les masses. Mettre en œuvre les fonctions de base de l'électronique réalisées par des blocs dont la structure ne fait pas l'objet d'une étude spécifique. Associer ces fonctions de base pour réaliser une fonction complexe en gérant les contraintes liées aux impédances d'entrée et/ou de sortie des blocs.
4. Optique Former une image.	Éclairer un objet de manière adaptée. Choisir une ou plusieurs lentilles en fonction des contraintes expérimentales, et choisir leur focale de façon raisonnée. Optimiser la qualité d'une image (alignement, limitation des aberrations, etc.). Estimer une valeur approchée d'une distance focale.
Créer ou repérer une direction de référence.	Régler et mettre en œuvre une lunette autocollimatrice et un collimateur.
Analyser une image numérique.	Acquérir (webcam, appareil photo numérique, etc.) l'image d'un phénomène physique sous forme numérique, et l'exploiter à l'aide d'un logiciel pour conduire l'étude d'un phénomène.
5. Mécanique Mesurer une masse, un moment d'inertie.	Utiliser une balance de précision. Repérer la position d'un centre de masse et mesurer un moment d'inertie à partir d'une période.

Visualiser et décomposer un mouvement.	Mettre en œuvre une méthode de stroboscopie. Enregistrer un phénomène à l'aide d'une caméra numérique et repérer la trajectoire à l'aide d'un logiciel dédié, en déduire la vitesse et l'accélération.
Mesurer une accélération.	Mettre en œuvre un accéléromètre, par exemple avec l'aide d'un microcontrôleur.
Quantifier une action.	Utiliser un dynamomètre.
6. Thermodynamique Mesurer une pression.	Mettre en œuvre un capteur, en identifiant son caractère différentiel ou absolu.
Mesurer une température.	Mettre en œuvre un capteur de température, par exemple avec l'aide d'un microcontrôleur. Mettre en œuvre un capteur infrarouge. Choisir le capteur en fonction de ses caractéristiques (linéarité, sensibilité, gamme de fonctionnement, temps de réponse), et du type de mesures à effectuer.
Effectuer des bilans d'énergie.	Mettre en œuvre une technique de calorimétrie.

Pour les étudiants suivant l'option sciences de l'ingénieur au deuxième semestre.

7. Mesures de grandeurs en chimie Mesurer un volume, une masse, un pH, une conductance, une absorbance.	Sélectionner et utiliser le matériel adapté à la précision requise. Distinguer les instruments de verrerie In et Ex. Préparer une solution de concentration en masse ou en quantité de matière donnée à partir d'un solide, d'un liquide, d'une solution de composition connue avec le matériel approprié. Utiliser les méthodes et le matériel adéquats pour transférer l'intégralité du solide ou du liquide pesé. Utiliser les appareils de mesure (masse, pH, conductance) en s'aidant d'une notice. Étalonner une chaîne de mesure si nécessaire.

8. Analyses qualitatives et quantitatives Effectuer des tests qualitatifs.	Proposer ou mettre en œuvre, à partir d'informations fournies, des tests qualitatifs préalables à l'élaboration d'un protocole.
Réaliser des dosages par étalonnage.	Déterminer une concentration en exploitant la mesure de grandeurs physiques caractéristiques de l'espèce ou en construisant et en utilisant une courbe d'étalonnage. Déterminer une concentration ou une quantité de matière par spectrophotométrie UV-Visible.
Réaliser des dosages par titrage. Titrages directs, indirects. Équivalence. Titrages simples, successifs, simultanés. Méthodes expérimentales de suivi d'un titrage : pH-métrie, conductimétrie, indicateurs colorés de fin de titrage.	Identifier et exploiter la réaction support du titrage. Proposer ou justifier le protocole d'un titrage à l'aide de données fournies ou à rechercher. Mettre en œuvre un protocole expérimental correspondant à un titrage direct ou indirect. Choisir et utiliser un indicateur coloré de fin de titrage.
Exploiter des courbes expérimentales de titrage.	Exploiter une courbe de titrage pour déterminer la concentration en espèce titrée. Utiliser un logiciel de simulation pour déterminer des courbes de distribution et confronter la courbe de titrage simulée à la courbe expérimentale. Distinguer l'équivalence et le repérage du virage d'un indicateur coloré de fin de titrage.
Effectuer des suivis cinétiques de transformations chimiques. Suivi en continu de l'évolution temporelle d'une grandeur physique.	Exploiter les résultats d'un suivi temporel de concentration pour déterminer les caractéristiques cinétiques d'une réaction. Proposer et mettre en œuvre des conditions expérimentales permettant la simplification de la loi de vitesse. Déterminer la valeur d'une énergie d'activation.

3. Prévention du risque au laboratoire de physique

L'apprentissage et le respect des règles de sécurité électrique, optique et celles liées à la pression et à la température permettent aux étudiants de prévenir et de minimiser les risques. Futurs ingénieurs, chercheurs, enseignants, ils doivent être sensibilisés au respect de la législation et à l'impact de leur activité sur l'environnement.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Prévention des risques au laboratoire	Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire. Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.
- **Risque électrique**	Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation d'appareils électriques.
- **Risque optique**	Utiliser les sources laser et les diodes électroluminescentes de manière adaptée.

- **Risques liés à la pression et à la température**	Adopter une attitude responsable lors de manipulations de corps chauds ou de dispositifs engageant des hautes ou des basses pressions.

Pour les étudiants suivant l'option sciences de l'ingénieur au deuxième semestre.

Les étudiants doivent prendre conscience du risque lié à la manipulation et au rejet des produits chimiques. L'apprentissage et le respect des règles de sécurité chimique, leur permettent de prévenir et de minimiser ce risque.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Prévention des risques au laboratoire	Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire. Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.
- **Risque chimique** Règles de sécurité au laboratoire. Classes et catégories de danger. Pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques. Mentions de danger (H) et conseils de prudence (P). Fiches de sécurité.	Relever les indications sur le risque associé au prélèvement, au mélange et au stockage des produits chimiques et adopter une attitude responsable lors de leur utilisation.
2. Prévention de l'impact environnemental Traitement et rejet des espèces chimiques.	Adapter le mode d'élimination d'une espèce chimique ou d'un mélange en fonction des informations recueillies sur la toxicité ou les risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.

Contenus thématiques

L'organisation des semestres est la suivante.

Premier semestre MPII

Thème 1 : ondes et signaux (1)

1.1. Formation des images
1.2. Signaux et composants électriques
1.3. Circuit linéaire du premier ordre et du deuxième ordre
1.4. Propagation d'un signal

Thème 2 : mouvements et interactions (1)

2.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point
2.2. Lois de Newton
2.3. Approche énergétique du mouvement d'un point matériel
2.4. Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétostatique, uniformes et stationnaires

Thème 3 : l'énergie : conversions et transferts (1)

3.1. Descriptions microscopique et macroscopique d'un système : modèle du gaz parfait et de la phase condensée incompressible indilatable

3.2. Bilan d'énergie pour un système thermodynamique

Deuxième semestre MPII options sciences informatiques et sciences de l'ingénieur

Thème 1 : ondes et signaux (2)

1.5. Régime sinusoïdal forcé

1.6. Filtrage linéaire

Thème 2 : mouvements et interactions (2)

2.5. Moment cinétique d'un point matériel

2.6. Mouvements dans un champ de gravitation newtonien

2.7. Mouvement d'un solide

Thème 3 : l'énergie : conversions et transferts (2)

3.3. Deuxième principe. Bilans d'entropie

3.4. Transitions de phases

3.5. Machines thermiques

Thème 1 : ondes et signaux (2)

1.7. Induction et forces de Laplace

- 1.7.1. Champ magnétique
- 1.7.2. Actions d'un champ magnétique
- 1.7.3. Lois de l'induction
- 1.7.4. Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps
- 1.7.5. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

1.8. Introduction à la physique quantique

Deuxième semestre MPII option sciences de l'ingénieur

Thème 4 : constitution et transformations de la matière

4.1. Relations entre la structure des entités chimiques et les propriétés physiques macroscopiques

- 4.1.1. Structure des entités chimiques
- 4.1.2. Relations entre la structure des entités et les propriétés physiques macroscopiques

4.2. Transformations de la matière

- 4.2.1. Description d'un système et de son évolution vers un état final lors d'une transformation chimique
- 4.2.2. Évolution temporelle d'un système chimique

A. Premier semestre MPII

Thème 1 : ondes et signaux (1)

La partie **1.1.** « **Formation des images** » traite de la formation des images et propose une ouverture sur la notion de guidage de la lumière par une fibre optique. Cette partie est l'occasion d'interroger le concept de modèle en physique et d'en identifier les limites de validité. Elle permet également d'aborder de nombreuses applications technologiques ; certaines sont précisées par le programme, d'autres sont laissées à l'appréciation des enseignants (appareil photographique, microscope, optique d'un smartphone, etc.). L'approche expérimentale doit être privilégiée dans ce domaine de la physique qui s'y prête particulièrement bien.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.1. Formation des images	
Sources lumineuses Modèle de la source ponctuelle monochromatique. Spectre.	Caractériser une source lumineuse par son spectre. Relier la longueur d'onde dans le vide et la couleur.
Modèle de l'optique géométrique Modèle de l'optique géométrique. Notion de rayon lumineux. Indice d'un milieu transparent.	Définir le modèle de l'optique géométrique. Indiquer les limites du modèle de l'optique géométrique.
Réflexion, réfraction. Lois de Snell-Descartes.	Établir la condition de réflexion totale.
La fibre optique à saut d'indice.	Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre à saut d'indice.
Image d'un objet Miroir plan.	Construire l'image d'un objet par un miroir plan.
Lentilles minces.	Exploiter les propriétés du centre optique, des foyers principaux et secondaires, de la distance focale, de la vergence. Construire l'image d'un objet situé à distance finie ou infinie à l'aide de rayons lumineux, identifier sa nature réelle ou virtuelle. Exploiter les formules de conjugaison et de grandissement transversal de Descartes et de Newton. Établir et utiliser la condition de formation de l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergente. **Former l'image d'un objet dans des situations variées.**
Stigmatisme approché.	Capacité numérique : tester, à l'aide d'un langage de programmation, le stigmatisme approché d'une lentille demi-boule pour les rayons proches de l'axe optique.
Modèles de quelques dispositifs optiques L'œil.	Modéliser l'œil comme l'association d'une lentille de vergence variable et d'un capteur plan fixe. Citer les ordres de grandeur de la limite de résolution angulaire et de la plage d'accommodation.
Lunette astronomique avec objectif et oculaire convergents. Grossissement.	Représenter le schéma d'une lunette afocale modélisée par deux lentilles minces convergentes ; identifier l'objectif et l'oculaire. Représenter le faisceau émergent issu d'un point objet situé « à l'infini » et traversant une lunette afocale. Établir l'expression du grossissement d'une lunette afocale. Exploiter les données caractéristiques d'une lunette commerciale.

	Étudier une maquette de lunette astronomique ou une lunette commerciale pour en déterminer le grossissement.

La partie **1.2.** « **Signaux électriques** » pose les bases nécessaires à l'étude des circuits électriques. Le programme se concentre sur l'étude des comportements résistifs, capacitifs et inductifs.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.2. Signaux et composants électriques	
Grandeurs électriques Charge électrique, intensité du courant électrique. Régime variable et régime continu. Potentiel, référence de potentiel, tension. Puissance électrique.	Relier l'intensité d'un courant électrique au débit de charges. Utiliser la loi des nœuds et la loi des mailles. Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur. Citer les ordres de grandeur d'intensités, de tensions et de puissances dans différents domaines d'application.
Dipôles électriques usuels Source de tension.	Modéliser une source en utilisant la représentation de Thévenin. **Évaluer la résistance de sortie d'une source de tension réelle.**
Système à comportement résistif.	Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance.
Associations de deux résistances. Ponts diviseurs de tension et de courant.	Remplacer une association série ou parallèle de deux résistances par une résistance équivalente. Exploiter des ponts diviseurs de tension ou de courant. **Mettre en évidence l'influence de la résistance d'entrée d'un voltmètre ou d'un ampèremètre sur les valeurs mesurées.**
Système à comportement capacitif : modèle du condensateur idéal. Relation entre charge et tension ; capacité d'un condensateur. Énergie stockée.	Établir l'expression de l'énergie stockée dans un condensateur. Exploiter l'expression fournie de la capacité d'un condensateur en fonction de ses caractéristiques.
Système à comportement inductif : modèle de la bobine idéale. Relation entre intensité et tension ; inductance d'une bobine.	Établir l'expression de l'énergie stockée dans une bobine.

La partie **1.3** « **Circuit linéaire du premier et du deuxième ordre** » aborde l'étude temporelle de circuits linéaires du premier et du second ordre. Il s'agit avant tout de comprendre les principes des méthodes mises en œuvre.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.3. Circuits linéaires du premier et du deuxième ordre	
Modèle du circuit RC série alimenté par une source idéale de tension.	Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.

Charge d'un condensateur par une source de tension constante, décharge d'un condensateur, temps caractéristique. Capteurs capacitifs.	Déterminer en fonction du temps la tension aux bornes d'un condensateur dans le cas de sa charge et de sa décharge. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. **Mettre en œuvre un capteur capacitif à l'aide d'un microcontrôleur.**
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique sur le circuit RC série.
Modèle du circuit RL série. Capteurs inductifs.	Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant dans le circuit. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. Réaliser un bilan énergétique sur le circuit RL série.
Circuit du premier ordre.	**Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un circuit linéaire du premier ordre dans un circuit comportant une ou deux mailles et analyser ses caractéristiques.** <u>Capacité numérique</u> : mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.
Modèle du circuit LC. Oscillations harmoniques. Pulsation, fréquence et période propres d'oscillations. Amplitude, phase.	Établir l'équation différentielle qui caractérise l'évolution d'une grandeur électrique ; la résoudre compte-tenu des conditions initiales. Réaliser un bilan énergétique pour le circuit LC.
Modèle du circuit RLC série.	Écrire sous forme canonique l'équation différentielle qui caractérise l'évolution d'une grandeur électrique afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. Identifier la nature de la réponse libre en fonction de la valeur du facteur de qualité. Déterminer la réponse dans le cas d'un régime libre ou indiciel en recherchant les racines du polynôme caractéristique et en tenant compte des conditions initiales. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité. Réaliser un bilan énergétique pour un circuit RLC série. **Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.** <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, simuler la réponse d'un système linéaire du deuxième ordre à une excitation de forme quelconque.

Dans la partie **1.4.** consacrée à la « **Propagation d'un signal** », il est recommandé de s'appuyer sur une approche expérimentale ou sur des logiciels de simulation pour permettre aux étudiants de faire le lien entre l'observation de signaux qui se propagent et la traduction mathématique de cette propagation, sans qu'aucune référence ne soit faite à une équation d'onde. L'étude de la somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence et du phénomène d'interférences associé permet de mettre en évidence le rôle essentiel joué par le déphasage entre les deux signaux dans le signal résultant. L'étude des interférences lumineuses est l'occasion d'introduire la notion de différence de chemin optique et de la relier au déphasage.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.4. Propagation d'un signal	
Exemples de signaux.	Identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux acoustiques, électriques, électromagnétiques.
Propagation d'un signal dans un milieu illimité, non dispersif et transparent Onde progressive dans le cas d'une propagation unidimensionnelle non dispersive. Célérité, retard temporel.	Écrire les signaux sous la forme f(x-ct) ou g(x+ct). Écrire les signaux sous la forme f(t-x/c) ou g(t+x/c). Prévoir, dans le cas d'une onde progressive, l'évolution temporelle à position fixée et l'évolution spatiale à différents instants.
Modèle de l'onde progressive sinusoïdale unidimensionnelle. Vitesse de phase, déphasage, double périodicité spatiale et temporelle.	Citer quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines acoustique, mécanique et électromagnétique. Établir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la vitesse de phase. Relier le déphasage entre les signaux perçus en deux points distincts au retard dû à la propagation. **Mesurer la vitesse de phase, la longueur d'onde et le déphasage dû à la propagation d'un phénomène ondulatoire.**
Phénomène de diffraction Diffraction d'une onde par une ouverture : conditions d'observation et caractéristiques. Angle caractéristique de diffraction.	Caractériser le phénomène de diffraction dans des situations variées et en citer des conséquences concrètes. Exploiter la relation exprimant l'angle caractéristique de diffraction en fonction de la longueur d'onde et de la taille de l'ouverture. **Illustrer et caractériser qualitativement le phénomène de diffraction dans des situations variées.**
Phénomène d'interférences Interférences de deux ondes de même fréquence. Interférences constructives, Interférences destructives	Caractériser le phénomène d'interférences de deux ondes et en citer des conséquences concrètes. Établir les conditions d'interférences constructives et destructives de deux ondes issues de deux sources ponctuelles en phase dans le cas d'un milieu de propagation homogène.

Interférences de deux ondes lumineuses de même fréquence, différence de chemin optique, conditions d'interférences constructives ou destructives. Exemple du dispositif des trous d'Young éclairé par une source monochromatique.	Déterminer les lieux d'interférences constructives et les lieux d'interférences destructives dans le cas des trous d'Young. Relier le déphasage entre les deux ondes à la différence de chemin optique. Établir l'expression littérale de la différence de chemin optique linéarisée entre les deux ondes. Établir l'expression de l'interfrange. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental pour visualiser le phénomène d'interférences de deux ondes.**

Thème 2 : mouvements et interactions (1)

La partie **2.1** « **Description et paramétrage du mouvement d'un point »** vise notamment à mettre en place les principaux systèmes de coordonnées : cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques. Le but est de permettre aux étudiants de disposer d'outils efficaces pour décrire une grande variété de mouvements de points. Pour atteindre cet objectif, il convient de les familiariser progressivement avec les projections et dérivations de vecteurs ainsi qu'avec l'algébrisation des grandeurs dans un contexte relevant de la physique. Enfin, cette partie est l'occasion de procéder à des analyses qualitatives des comportements cinématiques de systèmes réels assimilés à un point, notamment sur les exemples simples des mouvements rectilignes et circulaires.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point	
Repérage dans l'espace et dans le temps Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.	Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
Cinématique du point Description du mouvement d'un point. Vecteurs position, vitesse et accélération. Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.	Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques. Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.
Mouvement rectiligne uniformément accéléré.	Caractériser le vecteur accélération pour les mouvements suivants : rectiligne, rectiligne uniforme, rectiligne uniformément accéléré.
Mouvement à vecteur accélération constant.	Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.

Mouvement circulaire uniforme et non uniforme.	Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.
Coordonnées des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour un mouvement circulaire.	Caractériser le vecteur accélération pour les mouvements suivants : circulaire, circulaire uniforme. Faire le lien avec les composantes polaires de l'accélération. **Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs vitesse et accélération.**

Dans la partie **2.2**. intitulée « **Lois de Newton »**, on cherche d'abord à renforcer les compétences des étudiants relatives à la mise en équations d'un problème, qu'il s'agisse des étapes de bilans de forces ou de projection de la deuxième loi de Newton sur la base choisie. On cherche par ailleurs, sur l'exemple de quelques mouvements simples, à renforcer les compétences d'analyse qualitative d'une équation différentielle : stabilité des solutions, positions d'équilibre, type d'évolution, durée ou période typique d'évolution, etc. Cette pratique s'articule avec l'utilisation d'un langage de programmation pour résoudre des équations différentielles. Enfin, il s'agit aussi de confronter les étudiants aux limites de validité de certains modèles de forces, et ainsi de donner toute leur importance aux étapes de modélisation et de validation d'un modèle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.2. Lois de Newton	
Quantité de mouvement Masse d'un système. Centre de masse d'un système.	Justifier qualitativement la position du centre de masse d'un système, cette position étant donnée.
Quantité de mouvement d'un point matériel et d'un système de points.	Utiliser la relation entre la quantité de mouvement d'un système et la vitesse de son centre de masse.
Lois de Newton Première loi de Newton : principe d'inertie. Référentiels galiléens.	Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens. Discuter qualitativement du caractère galiléen d'un référentiel donné pour le mouvement étudié.
Notion de force. Troisième loi de Newton.	Établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.
Deuxième loi de Newton. Équilibre d'un système.	Utiliser la deuxième loi de Newton dans des situations variées. Exploiter une équation différentielle sans la résoudre analytiquement, par exemple : analyse en ordres de grandeur, existence d'une vitesse limite, écriture adimensionnée, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique. **Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant d'étudier une loi de force à l'aide d'un microcontrôleur ou de l'analyse d'un mouvement enregistré.**
Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète. Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme.	Établir et exploiter les équations horaires du mouvement. Établir l'équation de la trajectoire.

Modèle linéaire d'une force de frottement fluide. Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute. Vitesse limite.	**Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure de frottements fluides.**
Système modèle masse-ressort sans frottement.	Déterminer et résoudre l'équation différentielle du mouvement. Exploiter les analogies avec un oscillateur harmonique électrique.
Tension d'un fil. Pendule simple.	Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier le caractère harmonique des oscillations de faible amplitude.

La partie **2.3. « Approche énergétique du mouvement d'un point matériel** » vise à construire une démarche alternative et complémentaire pour l'étude d'une situation relevant de la mécanique – et plus généralement de la physique – fondée sur la conservation de certaines grandeurs – ici, l'énergie mécanique. Cette approche est l'occasion d'illustrer la capacité prédictive des analyses graphiques et numériques, par exemple pour pouvoir décrire un comportement à partir d'une représentation graphique de l'énergie potentielle dans le cas d'un mouvement conservatif.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.3. Approche énergétique du mouvement d'un point matériel	
Puissance, travail et énergie cinétique Puissance et travail d'une force dans un référentiel.	Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.
Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen, dans le cas d'un système modélisé par un point matériel.	Exploiter le théorème de l'énergie cinétique.
Champ de force conservative et énergie potentielle Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle.	Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique. Déduire qualitativement du graphe d'une fonction énergie potentielle le sens et l'intensité de la force associée pour une situation à un degré de liberté.
Énergie mécanique Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif.	Exploiter la conservation de l'énergie mécanique pour analyser un mouvement.
Mouvement conservatif à une dimension. Cas d'une situation modélisable par un système masse-ressort et d'un système soumis à un champ de force uniforme.	Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
Positions d'équilibre. Stabilité.	Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.
Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.	Établir l'équation différentielle linéarisée du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre. <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une

	équation différentielle du deuxième ordre non-linéaire et faire apparaître l'effet des termes non-linéaires.

La partie **2.4.** « **Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétostatique, uniformes et stationnaires »** introduit l'expression de la force de Lorentz ainsi que deux situations de base sur lesquelles les étudiants doivent être autonomes dans la résolution, attestant en cela de l'acquisition d'une certaine aisance à ce stade de leur formation. Des situations physiques variées sont en capacité d'illustrer concrètement cette partie qui ne doit pas se réduire à des développements calculatoires ou des illustrations graphiques.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.4. Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétostatique, uniformes et stationnaires	
Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle ; champs électrique et magnétique.	Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.
Puissance de la force de Lorentz.	Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.	Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant. Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la valeur de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétostatique.	Déterminer le rayon de la trajectoire sans calcul en admettant que celle-ci est circulaire.

Thème 3 : l'énergie : conversions et transferts (1)

Après avoir mis l'accent sur le passage fondamental d'une réalité microscopique à des grandeurs mesurables macroscopiques, cette partie propose, en s'appuyant sur des exemples concrets, de poursuivre la description et l'étude de la matière à l'échelle macroscopique, et d'aborder les bilans d'énergie en thermodynamique.

On utilise les notations suivantes : pour une grandeur extensive « A », « a » sera la grandeur massique associée et « A_m » la grandeur molaire associée.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.1. Descriptions microscopique et macroscopique d'un système : modèles du gaz parfait et de la phase condensée incompressible indilatable	
État microscopique et état macroscopique.	Préciser les paramètres nécessaires à la description d'un état microscopique et d'un état macroscopique sur un exemple. Relier qualitativement les valeurs des grandeurs macroscopiques aux propriétés du système à l'échelle microscopique.

Modèle du gaz parfait. Masse volumique, température thermodynamique, pression. Équation d'état du gaz parfait.	Exploiter l'équation d'état du gaz parfait pour décrire le comportement d'un gaz.
Énergie interne du gaz parfait monoatomique. Capacité thermique à volume constant du gaz parfait monoatomique. Capacité thermique à volume constant d'un gaz considéré comme parfait.	Exploiter l'expression de la variation de l'énergie interne d'un gaz considéré comme parfait.
Modèle de la phase condensée incompressible et indilatable. Énergie interne et capacité thermique à volume constant d'une phase condensée considérée incompressible et indilatable.	Exploiter l'expression de la variation de l'énergie interne d'un système considéré incompressible et indilatable en fonction de sa température.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
3.2. Bilan d'énergie pour un système thermodynamique	
Énergie interne d'un système. Aspects microscopiques. Premier principe de la thermodynamique. Transfert thermique, travail.	Citer les différentes contributions microscopiques et macroscopiques à l'énergie d'un système. Analyser qualitativement les différents termes intervenant dans l'écriture du premier principe.
Modes de transfert thermique.	Caractériser qualitativement les trois modes de transfert thermique : conduction, convection, rayonnement.
Flux thermique. Résistance thermique.	Exploiter la relation entre flux thermique, résistance thermique et écart de température, l'expression de la résistance thermique étant donnée.
Loi phénoménologique de Newton, modélisation de l'évolution de la température d'un système incompressible au contact d'un thermostat.	Effectuer un bilan d'énergie pour un système incompressible et indilatable en contact avec un thermostat : établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la température du système.
Transformation thermodynamique subie par un système. Évolutions isochore, isotherme, isobare, monobare, monotherme.	Exploiter les conditions imposées par le milieu extérieur pour déterminer l'état d'équilibre final.
Travail des forces de pression. Transformation isochore. Transformation monobare.	Évaluer un travail par découpage en travaux élémentaires et sommation sur un chemin donné dans le cas d'une seule variable. Interpréter géométriquement le travail des forces de pression dans un diagramme de Clapeyron.
Bilans d'énergie.	Conduire un bilan d'énergie sur un système modélisé par un gaz parfait ou par une phase condensée incompressible et indilatable. **Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure d'une capacité thermique.**

Enthalpie d'un système. Capacité thermique à pression constante dans le cas du gaz parfait et d'une phase condensée incompressible et indilatable.	Exprimer le premier principe sous forme de bilan d'enthalpie dans le cas d'une transformation monobare avec équilibre mécanique dans l'état initial et dans l'état final. Exprimer l'enthalpie $H_m(T)$ du gaz parfait à partir de l'énergie interne. Citer l'ordre de grandeur de la capacité thermique massique de l'eau liquide.

Second semestre options sciences informatiques et sciences de l'ingénieur

Thème 1 : Ondes et signaux (2)

La partie **1.5** « **Régime sinusoïdal forcé** », est l'occasion d'introduire les notions d'impédance et de résonance. Sans en faire un objet d'étude spécifique, l'existence d'analogies comportementales avec des situations relevant du domaine de la mécanique mérite d'être signalée.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.5 Régime sinusoïdal forcé	
Signal sinusoïdal. Description du comportement d'un dipôle en régime sinusoïdal forcé. Impédances complexes. Cas d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine.	Établir l'expression de l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.
Association de deux impédances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
Oscillateurs électrique soumis à une excitation sinusoïdale. Résonance.	Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé. Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité. Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental visant à caractériser un phénomène de résonance.**

L'objectif principal de la partie **1.6.** « **Filtrage linéaire** » n'est pas de former les étudiants aux aspects techniques des calculs des fonctions de transfert et des tracés de diagrammes de Bode mais de mettre l'accent sur l'interprétation des propriétés du signal de sortie connaissant celles du signal d'entrée et d'appréhender le rôle central de la linéarité des systèmes utilisés.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.6. Filtrage linéaire	
Signaux périodiques.	Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal périodique. Calculer la valeur efficace d'un signal sinusoïdal. Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.

Fonction de transfert harmonique. Diagramme de Bode.	Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1. Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique. Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les comportements asymptotiques des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental exploitant les propriétés des fonctions de transfert d'un système linéaire.**
Modèles de filtres passifs d'ordre 1 : passe-bas et passe-haut.	Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges. **Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale.**
Filtre passe-bande.	<u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre d'ordre 1 ou 2 sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.

Thème 2 : mouvements et interactions (2)

Au second semestre, le thème « **Mouvements et interactions** » est structuré en trois parties : moment cinétique d'un point matériel, mouvements dans un champ de gravitation newtonien et mouvement d'un solide.

La partie **2.5.** « **Moment cinétique d'un point matériel** » est l'occasion d'introduire les notions de moment cinétique et de moment d'une force. L'un des objectifs visés est que les étudiants disposent de représentations concrètes qui permettent de donner du sens aux grandeurs vectorielles et scalaires utilisées ; c'est notamment pour cela que le bras de levier est introduit. L'accent est mis sur l'identification des situations où le moment cinétique est conservé.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
2.5. Moment cinétique d'un point matériel	
Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté.	Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.
Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté.	Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.
Théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen. Conservation du moment cinétique.	Identifier les cas de conservation du moment cinétique.

La partie **2.6. « Mouvements dans un champ de gravitation newtonien »** est notamment motivée par ses nombreuses applications possibles. On discute la nature de la trajectoire sur un graphe donnant l'énergie potentielle effective et on ne poursuit l'étude que dans le cas d'une trajectoire circulaire. Le caractère elliptique des trajectoires associées à un état lié est affirmé sans qu'aucune étude géométrique des ellipses ne soit exigible ; on utilise, dans ce cas, les constantes du mouvement (moment cinétique et énergie mécanique) pour exprimer l'énergie de la trajectoire elliptique en fonction du demi-grand axe.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.6. Mouvement dans un champ de gravitation newtonien	
Point matériel soumis à un champ de gravitation newtonien. Conservation du moment cinétique et conséquences.	Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique. Établir les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.
Conservation de l'énergie mécanique. Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.	Exprimer l'énergie mécanique d'un système conservatif ponctuel à partir de l'équation du mouvement. Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective. Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique.
Mouvement des satellites et des planètes. Lois de Kepler. Période de révolution. Satellite géostationnaire.	Déterminer les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération du centre de masse d'un système en mouvement circulaire dans un champ de gravitation newtonien. Établir et exploiter la troisième loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire. <u>Capacité numérique</u> : exploiter, à l'aide d'un langage de programmation, des données astronomiques ou satellitaires pour tester les deuxième et troisième lois de Kepler.

Concernant le solide en rotation autour d'un axe fixe dans la partie **2.7. « Mouvement d'un solide »**, il s'agit de définir le mouvement en remarquant que tout point du solide décrit un cercle autour de l'axe avec une même vitesse angulaire et de déterminer la vitesse de chaque point en fonction de celle-ci et de la distance à l'axe de rotation.
Des exemples de dynamique du solide sont introduits (translation et rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen), avec toutefois des limitations strictes : l'étude générale d'un mouvement composé d'une translation dans un référentiel galiléen et d'une rotation autour d'un axe fixe dans le référentiel barycentrique ne figure pas au programme. En particulier, l'étude du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe gardant une direction fixe dans un référentiel galiléen mais pour lequel l'axe de rotation est en mouvement est exclue.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.7. Mouvement d'un solide	
Description du mouvement d'un solide dans deux cas particuliers Définition d'un solide.	Différencier un solide d'un système déformable.
Translation.	Reconnaître et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire.
Rotation autour d'un axe fixe.	Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.

Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide mobile autour d'un axe fixe Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe : moment d'inertie.	Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni. Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
Couple.	Définir un couple.
Liaison pivot.	Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	Exploiter le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.
Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté, dans un référentiel galiléen Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie. **Réaliser l'étude énergétique d'un pendule pesant et mettre en évidence une diminution de l'énergie mécanique.**
Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Établir, dans ce cas, l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.

Thème 3 : l'énergie : conversions et transferts (2)

Dans le cadre de la mise en œuvre de la partie **3.3.** « **Deuxième principe. Bilans d'entropie** », l'expression de la fonction d'état entropie est systématiquement donnée et sa construction n'est pas une capacité visée.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.3. Deuxième principe. Bilans d'entropie	
Deuxième principe de la thermodynamique : entropie, entropie créée, entropie échangée. $\Delta S = S_{ech} + S_{créé}$ avec $S_{ech} = \Sigma Q_i/T_i$.	Définir un système fermé et établir pour ce système un bilan entropique. Relier la création d'entropie à une ou plusieurs causes physiques de l'irréversibilité. Analyser le cas particulier d'un système en évolution adiabatique.
Variation d'entropie d'un système.	Utiliser l'expression fournie de la fonction d'état entropie. Exploiter l'extensivité de l'entropie.
Loi de Laplace.	Citer et utiliser la loi de Laplace et ses conditions d'application.

La partie **3.4.** « **Transitions de phases** » est l'occasion, d'une part, d'utiliser un diagramme de représentation des différents états d'un système et, d'autre part, de conduire des bilans d'enthalpie et d'entropie.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.4. Transitions de phase	
Corps pur diphasé en équilibre. Diagramme de phases (P,T). Cas de l'équilibre liquide-vapeur : diagramme de Clapeyron (P,v), titre en vapeur.	Analyser un diagramme de phase expérimental (P,T). Proposer un jeu de variables d'état suffisant pour caractériser l'état d'équilibre d'un corps pur diphasé soumis aux seules forces de pression. Positionner les phases dans les diagrammes (P,T) et (P,v). Déterminer la composition d'un mélange diphasé en un point d'un diagramme (P,v).
Enthalpie associée à une transition de phase : enthalpie de fusion, enthalpie de vaporisation, enthalpie de sublimation. Variation d'entropie associée à une transition de phase.	Exploiter l'extensivité de l'enthalpie et réaliser des bilans énergétiques en prenant en compte des transitions de phases. Exploiter la relation entre les variations d'entropie et d'enthalpie associées à une transition de phase.

Dans la partie **3.5.** intitulée « **Machines thermiques** », il s'agit d'appliquer les principes de la thermodynamique aux machines thermiques en citant des applications industrielles.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.5. Machines thermiques	
Application du premier principe et du deuxième principe de la thermodynamique aux machines thermiques cycliques dithermes : rendement, efficacité, théorème de Carnot.	Donner le sens des échanges énergétiques pour un moteur ou un récepteur thermique ditherme. Analyser un dispositif concret et le modéliser par une machine cyclique ditherme. Définir un rendement ou une efficacité et les relier aux énergies échangées au cours d'un cycle. Justifier et utiliser le théorème de Carnot. Citer quelques ordres de grandeur des rendements des machines thermiques réelles actuelles. Expliquer le principe de la cogénération. **Mettre en œuvre une machine thermique cyclique ditherme.**

Thème 1 : Onde et signaux (2)

La partie **1.7. « Induction et forces de Laplace »** s'appuie sur les nombreuses applications présentes dans notre environnement immédiat : boussole, moteur électrique, alternateur, transformateur, haut-parleur, plaques à induction, carte RFID... Il s'agit de restituer toute la richesse de ces applications dans un volume horaire modeste, ce qui limite les géométries envisagées et le formalisme utilisé. Le point de vue adopté cherche à mettre l'accent sur les phénomènes et sur la modélisation sommaire de leurs applications. Toute étude du champ électromoteur est exclue. L'induction et les forces de Laplace dans un circuit mobile sont introduites dans le cas d'un champ uniforme et stationnaire, soit dans le modèle des rails de Laplace, soit dans celui d'un cadre rectangulaire en rotation. Ce dernier modèle permet d'introduire la notion de dipôle magnétique et une analogie de comportement permet de l'étendre au cas de l'aiguille d'une boussole.
Le succès de cet enseignement suppose le respect de ces limitations : il ne s'agit pas d'une étude générale des phénomènes d'induction. Corrélativement, l'enseignement de cette partie doit impérativement s'appuyer sur une démarche expérimentale authentique, qu'il s'agisse d'expériences de cours ou d'activités expérimentales.

La partie **1.7.1** « **Champ magnétique** » vise à relier le champ magnétique et ses sources ; l'accent est mis sur le concept de champ vectoriel et l'exploitation des représentations graphiques et la connaissance d'ordres de grandeur.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.1. Champ magnétique	
Sources de champ magnétique ; cartes de champ magnétique.	Exploiter une représentation graphique d'un champ vectoriel, identifier les zones de champ uniforme, de champ faible et l'emplacement des sources. Tracer l'allure des cartes de champs magnétiques pour un aimant droit, une spire circulaire et une bobine longue. Décrire un dispositif permettant de réaliser un champ magnétique quasi uniforme. Citer des ordres de grandeur de champs magnétiques : au voisinage d'aimants, dans un appareil d'IRM, dans le cas du champ magnétique terrestre.
Lien entre le champ magnétique et l'intensité du courant.	Évaluer l'ordre de grandeur d'un champ magnétique à partir d'expressions fournies.
Moment magnétique.	Définir le moment magnétique associé à une boucle de courant plane. Associer à un aimant un moment magnétique par analogie avec une boucle de courant. Citer un ordre de grandeur du moment magnétique associé à un aimant usuel.

Dans la partie **1.7.2** « **Actions d'un champ magnétique** », l'enseignant est libre d'introduire la force de Laplace avec ou sans référence à la force de Lorentz. Il s'agit ici de se doter d'expressions opérationnelles pour étudier le mouvement dans un champ uniforme et stationnaire (soit d'une barre en translation, soit d'un moment magnétique en rotation modélisé par un cadre rectangulaire).

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.2. Actions d'un champ magnétique	
Densité linéique de la force de Laplace dans le cas d'un élément de courant filiforme.	Différencier le champ magnétique extérieur subi du champ magnétique propre créé par le courant filiforme.
Résultante et puissance des forces de Laplace.	Établir et exploiter l'expression de la résultante et de la puissance des forces de Laplace dans le cas d'une barre conductrice placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire. Exprimer la puissance des forces de Laplace.
Couple et puissance des actions mécaniques de Laplace dans le cas d'une spire rectangulaire, parcourue par un courant, en rotation autour d'un axe de symétrie de la spire passant par les deux milieux de côtés opposés et placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire orthogonal à l'axe.	Établir et exploiter l'expression du moment du couple subi en fonction du champ magnétique extérieur et du moment magnétique. Exprimer la puissance des actions mécaniques de Laplace.
Action d'un champ magnétique extérieur uniforme sur un aimant. Positions d'équilibre et stabilité.	**Mettre en œuvre un dispositif expérimental pour étudier l'action d'un champ magnétique uniforme sur une boussole.**

Effet moteur d'un champ magnétique tournant.	**Créer un champ magnétique tournant à l'aide de deux ou trois bobines et mettre en rotation une aiguille aimantée.**

La partie **1.7.3** « **Lois de l'induction** » repose sur la loi de Faraday qui se prête parfaitement à une introduction expérimentale et qui constitue un bel exemple d'illustration de l'histoire des sciences. On évoque, à ce sujet, les différents points de vue possibles sur le même phénomène selon le référentiel dans lequel on se place.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.3. Lois de l'induction	
Flux d'un champ magnétique Flux d'un champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté.	Évaluer le flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan.
Loi de Faraday Courant induit par le déplacement relatif d'une boucle conductrice par rapport à un aimant ou un circuit inducteur. Sens du courant induit.	**Décrire, mettre en œuvre et interpréter des expériences illustrant les lois de Lenz et de Faraday.**
Loi de modération de Lenz.	Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.
Force électromotrice induite, loi de Faraday.	Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'algébrisation.

La partie **1.7.4** « **Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps** » aborde le phénomène d'auto-induction puis le couplage par mutuelle inductance entre deux circuits fixes. Elle traite du modèle du transformateur de tensions.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.4. Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps	
Auto-induction Flux propre et inductance propre.	Différencier le flux propre des flux extérieurs. Utiliser la loi de modération de Lenz. Évaluer et citer l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur. **Mesurer la valeur de l'inductance propre d'une bobine.**
Étude énergétique.	Réaliser un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.
Cas de deux bobines en interaction Inductance mutuelle entre deux bobines.	Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en « influence totale ». **Mesurer la valeur de l'inductance mutuelle entre deux bobines et étudier l'influence de la géométrie.**
Circuits électriques à une maille couplés par le phénomène de mutuelle induction en régime sinusoïdal forcé.	Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante. Établir le système d'équations en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents.

Étude énergétique.	Réaliser un bilan de puissance et d'énergie.

La partie **1.7.5** « **Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire** » est centrée sur la conversion de puissance. Des situations géométriques simples permettent de dégager les paramètres physiques pertinents afin de modéliser, par exemple, un dispositif de freinage.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
1.7.5. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire	
Conversion de puissance mécanique en puissance électrique Rail de Laplace. Spire rectangulaire soumise à un champ magnétique extérieur uniforme et en rotation uniforme autour d'un axe fixe orthogonal au champ magnétique.	Interpréter qualitativement les phénomènes observés. Écrire les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe. Effectuer un bilan énergétique. Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante.
Freinage par induction.	Expliquer l'origine des courants de Foucault et en connaître des exemples d'utilisation. **Mettre en évidence qualitativement les courants de Foucault.**

La partie **1.8. « Introduction à la physique quantique »** vise à présenter un premier questionnement de la représentation classique du monde proposée dans les autres parties du programme. Les notions essentielles abordées sont le photon et la dualité onde-particule dans une approche essentiellement qualitative sauf dans l'étude des relations d'Einstein et de de Broglie.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
1.8. Introduction à la physique quantique	
Dualité onde-particule pour la lumière et la matière Le photon : énergie, vitesse, masse, impulsion.	Décrire un exemple d'expérience mettant en évidence la nécessité de la notion de photon.
Effet photoélectrique.	Interpréter qualitativement l'effet photoélectrique à l'aide du modèle particulaire de la lumière. Établir, par un bilan d'énergie, la relation entre l'énergie cinétique des électrons et la fréquence. Expliquer qualitativement le fonctionnement d'une cellule photoélectrique.
Absorption et émission de photons.	Citer quelques applications actuelles mettant en jeu l'interaction photon-matière (capteurs de lumière, cellules photovoltaïques, diodes électroluminescentes, spectroscopies UV-visible et IR, etc.)
Onde de matière associée à une particule. Relation de de Broglie.	Décrire un exemple d'expérience mettant en évidence le comportement ondulatoire de la matière. Évaluer des ordres de grandeurs typiques intervenant dans des phénomènes quantiques. Interpréter une expérience illustrant la dualité onde-particule.

Second semestre option sciences de l'ingénieur

Thème 4 : constitution et transformation de la matière

4.1. Relations entre structure des entités chimiques et propriétés physiques macroscopiques

Le chimiste modélise la matière au niveau microscopique par des entités chimiques dont les structures électroniques et géométriques permettent d'interpréter et de prévoir certaines des propriétés physiques et chimiques de la matière au niveau macroscopique.

La partie **4.1.1 « Structure des entités chimiques »** aborde l'étude de la constitution de la matière au niveau microscopique en s'appuyant sur le tableau périodique des éléments, outil essentiel du chimiste, dans l'objectif de développer progressivement les compétences relatives à l'utilisation des informations qu'il contient pour prévoir, dans cette partie, le nombre de liaisons d'un atome et la nature (polaire, ionique) des liaisons chimiques.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.1.1. Structure des entités chimiques	
Modèle de la liaison covalente Liaison covalente localisée ; longueurs et énergies de liaisons.	Citer les ordres de grandeur de longueurs et d'énergies de liaisons covalentes.
Schéma de Lewis d'une molécule ou d'un ion monoatomique ou d'un ion polyatomique pour les éléments des blocs s et p.	Déterminer, pour les éléments des blocs s et p, le nombre d'électrons de valence d'un atome à partir de la position de l'élément dans le tableau périodique. Établir un schéma de Lewis pertinent pour une molécule ou un ion. Identifier les écarts à la règle de l'octet.
Géométrie et polarité des entités chimiques Électronégativité : liaison polarisée, moment dipolaire, molécule polaire.	Associer qualitativement la géométrie d'une entité à une minimisation de son énergie. Comparer les électronégativités de deux atomes à partir de données ou de leurs positions dans le tableau périodique. Prévoir la polarisation d'une liaison à partir des électronégativités comparées des deux atomes mis en jeu. Relier l'existence ou non d'un moment dipolaire permanent à la structure géométrique donnée d'une molécule. Déterminer direction et sens du vecteur moment dipolaire d'une liaison ou d'une molécule de géométrie donnée.

La partie 4.1.2. « **Relations entre la structure des entités et les propriétés physiques macroscopiques** » a pour objectif l'identification d'interactions entre entités moléculaires ou ioniques afin d'interpréter, de prévoir ou de comparer certaines propriétés physiques : température de changement d'état, miscibilité, solubilité. De nombreuses illustrations et applications dans la vie courante, au niveau du laboratoire ou dans le domaine du vivant peuvent être proposées.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.1.2. Relations entre la structure des entités et les propriétés physiques macroscopiques	
Interaction entre entités Interactions de van der Waals. Liaison hydrogène ou interaction par pont hydrogène.	Citer les ordres de grandeur énergétiques des interactions de van der Waals et des interactions par pont hydrogène.

	Interpréter l'évolution des valeurs de températures de changement d'état de différents corps purs moléculaires à l'aide de l'existence d'interactions de van der Waals ou par pont hydrogène.
Solubilité ; miscibilité. Grandeurs caractéristiques et propriétés de solvants moléculaires : moment dipolaire, permittivité relative, caractère protogène. Mise en solution d'une espèce chimique moléculaire ou ionique. Solubilité.	Associer une propriété d'un solvant moléculaire à une ou des grandeurs caractéristiques. Interpréter la miscibilité ou la non-miscibilité de deux solvants. Interpréter la solubilité d'une espèce chimique moléculaire ou ionique dans un solvant donné.

4.2. Transformations de la matière

L'objectif de cette partie est d'amener les étudiants à mobiliser de manière autonome les notions et modèles pour décrire, au niveau macroscopique, un système physico-chimique et son évolution. Il convient que les problématiques abordées, les illustrations et les applications prennent largement appui sur des transformations chimiques rencontrées dans la vie courante, au laboratoire, en milieu industriel ou dans le monde du vivant.
Les concepts développés dans la partie **4.2.1. « Description d'un système et de son évolution vers un état final »** permettent l'étude quantitative de l'état final d'un système, siège d'une transformation chimique, à partir d'une modélisation par une seule réaction chimique symbolisée par une équation de réaction à laquelle est associée une constante thermodynamique d'équilibre. Il s'agit de prévoir le sens d'évolution de systèmes homogènes ou hétérogènes et de déterminer leur composition dans l'état final. Ces études porteront notamment sur les transformations chimiques en solutions aqueuses, notamment sur des transformations modélisées par des réactions acido-basiques et d'oxydo-réduction qui interviennent dans un nombre considérable de développements technologiques et d'analyses environnementales (traitement des eaux, méthodes d'analyse, générateurs électrochimiques, lutte contre la corrosion, etc.). Il est important de noter qu'on évitera tout calcul inutile de concentration, en privilégiant l'utilisation des diagrammes pour valider le choix de la réaction mise en jeu. Aucune formule de calcul de pH n'est exigible. La relation de Nernst ainsi que la relation entre la constante thermodynamique d'équilibre d'une réaction d'oxydo-réduction et les potentiels standard permettent de prévoir l'évolution des systèmes et le caractère favorisé des transformations.

Les choix pédagogiques relatifs au contenu des séances de travail expérimental permettront de contextualiser ces enseignements. Les dosages par étalonnage et les titrages sont étudiés exclusivement en travaux pratiques. Ces séances de travail expérimental constituent une nouvelle occasion d'aborder la problématique mesures et incertitudes.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.2.1. Description d'un système et de son évolution vers un état final lors d'une transformation chimique	
Transformation chimique d'un système Espèces physico-chimiques.	Recenser les espèces physico-chimiques présentes dans un système chimique.
Équation de réaction ; constante thermodynamique d'équilibre.	Écrire l'équation de la réaction (ou des réactions) qui modélise(nt) une transformation chimique donnée.

Évolution d'un système lors d'une transformation chimique modélisée par une seule réaction chimique : avancement, activité, quotient réactionnel, critère d'évolution.	Décrire qualitativement et quantitativement un système chimique dans l'état initial ou dans un état d'avancement quelconque. Exprimer l'activité d'une espèce chimique pure ou dans un mélange dans le cas de solutions aqueuses très diluées. Exprimer le quotient réactionnel. Prévoir le sens de l'évolution spontanée d'un système chimique.
Composition chimique du système dans l'état final : état d'équilibre chimique, transformation totale.	Identifier un état d'équilibre chimique. Déterminer la composition chimique du système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. **Réaliser une solution de concentration donnée en soluté apporté à partir d'un solide, d'un liquide ou d'une solution de composition connue.** **Déterminer une constante d'équilibre.**
Conductance, conductivité ; loi de Kohlrausch.	**Mesurer une conductance et tracer une courbe d'étalonnage pour déterminer une concentration**
Acides et bases, réactions acide-base Transformation modélisée par une réaction acide-base, pH. Couples acide-base, constante d'acidité ; acides et bases fort(e)s ou faibles ; diagramme de prédominance et courbes de distribution.	 Identifier le caractère acido-basique d'une réaction. Écrire l'équation d'une réaction acide-base et déterminer la valeur de sa constante thermodynamique d'équilibre à partir des pKa des couples acide-base mis en jeu. Associer le caractère fort d'un acide (d'une base) à la transformation quasi-totale de cet acide (cette base) avec l'eau. Utiliser un diagramme de prédominance pour prévoir les espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires. Retrouver les valeurs de constantes d'équilibre par lecture de courbes de distribution et de diagrammes de prédominance (et réciproquement). **Mettre en œuvre les suivis pH-métrique et conductimétrique d'un titrage ayant pour support une réaction acide-base.**
Oxydants et réducteurs, réactions d'oxydo-réduction Transformation modélisée par une réaction d'oxydo-réduction. Couple oxydant-réducteur. Nombre d'oxydation**.**	 Identifier une réaction d'oxydo-réduction. Identifier l'oxydant et le réducteur d'un couple.

Pile, tension à vide, potentiel d'électrode, potentiel standard, formule de Nernst, électrode standard à hydrogène.	Décrire le fonctionnement d'une pile à partir d'une mesure de tension à vide ou à partir des potentiels d'électrode. **Réaliser une pile et étudier son fonctionnement.**
Aspect thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction.	Écrire l'équation d'une réaction d'oxydoréduction. Prévoir qualitativement ou quantitativement le caractère thermodynamiquement favorisé ou défavorisé d'une réaction d'oxydo-réduction à partir des potentiels standard des couples. **Mettre en œuvre une réaction d'oxydo-réduction pour réaliser une analyse quantitative en solution aqueuse.**

La partie **4.2.2**. « **Évolution temporelle d'un système chimique** » permet de dégager expérimentalement les facteurs cinétiques, concentration et température. Cette mise en évidence est prolongée par les premières modélisations macroscopiques d'évolution des concentrations avec des lois de vitesse d'ordre simple et d'influence de la température avec la loi d'Arrhenius.
Les déterminations d'ordre mettent en œuvre la méthode différentielle ou intégrale, et peuvent s'effectuer à l'aide de logiciels dédiés ou de programmes élaborés en langage de programmation, pour l'exploitation des mesures expérimentales dans le cadre d'un réacteur fermé.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.2.2. Évolution temporelle d'un système chimique	
Cinétique en réacteur fermé de composition uniforme Transformations lentes et rapides. Facteurs cinétiques : concentrations des réactifs, température Vitesses de consommation d'un réactif et de formation d'un produit. Vitesse de réaction pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique supposée sans accumulation d'intermédiaires. Lois de vitesse : réactions sans ordre, réactions avec ordre simple (0, 1, 2).	**Établir une loi de vitesse de formation d'un produit ou de consommation d'un réactif à partir du suivi temporel d'une grandeur physique.**
Loi d'Arrhenius ; énergie d'activation.	**Déterminer l'énergie d'activation d'une réaction chimique.**

Annexe 1 : matériel

La liste ci-dessous regroupe le matériel que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice simplifiée fournie sous forme de version papier ou numérique. Une utilisation de matériel hors de cette liste lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'une introduction guidée suffisamment détaillée.

1. Domaine optique

- Goniomètre
- Viseur à frontale fixe
- Lunette auto-collimatrice
- Spectromètre à fibre optique
- Laser à gaz
- Lampes spectrales
- Source de lumière blanche à condenseur

2. Domaine électrique

- Oscilloscope numérique
- Carte d'acquisition et logiciel dédié
- Générateur de signaux Basse Fréquence
- Multimètre numérique
- Multiplieur analogique
- Émetteur et récepteur acoustique (domaine audible et domaine ultrasonore)
- Microcontrôleur

3. Domaines mécanique et thermodynamique

- Dynamomètre
- Capteur de pression
- Accéléromètre
- Stroboscope
- Webcam avec logiciel dédié
- Appareil photo numérique ou caméra numérique
- Thermomètre, thermocouple, thermistance, capteur infra-rouge
- Calorimètre
- Machines thermiques dithermes

4. Domaine constitution et transformations de la matière

- Verrerie classique de chimie analytique : burettes, pipettes jaugées et graduées, fioles jaugées, erlenmeyers, béchers, etc.
- Matériel classique du laboratoire de chimie : dispositifs de chauffage ou de refroidissement (bain-marie, bain froid, etc.), dispositifs d'agitation, matériel de filtration sous pression atmosphérique et sous pression réduite.
- Spectrophotomètre UV-visible
- pH-mètre et électrodes de mesure
- Voltmètre et électrodes
- Conductimètre et cellule de mesure
- Thermomètre
- Balance de précision

Annexe 2 : outils mathématiques

L'utilisation d'outils mathématiques est indispensable en physique comme en chimie.
La capacité à mettre en œuvre de manière autonome certains de ces outils mathématiques dans le cadre des activités relevant de la physique-chimie fait partie des compétences exigibles à la fin de la première année. Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que le niveau de maîtrise attendu en fin de première année. Il est complété dans le programme de seconde année.
Cependant les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité sont traitées à l'aide d'outils numériques (calculatrices, logiciels de calcul numérique).

Outils mathématiques	Capacités exigibles
1. Équations algébriques	
Systèmes linéaires de n équations à p inconnues.	Identifier les variables (inconnues) nécessaires à la modélisation du problème sous forme d'un système d'équations linéaires. Donner l'expression formelle des solutions dans le seul cas $n = p = 2$.
Équations non linéaires.	Représenter graphiquement une équation de la forme $f(x) = g(x)$. Interpréter graphiquement la ou les solutions.
2. Équations différentielles	
Équations différentielles linéaires à coefficients constants.	Identifier l'ordre. Mettre l'équation sous forme canonique.
Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants : $y' + ay = f(x)$.	Trouver la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène). Trouver l'expression des solutions lorsque $f(x)$ est constante ou de la forme $A.\cos(\omega x+\varphi)$ (en utilisant la notation complexe).
Équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants : $y'' + ay' + by = f(x)$.	Utiliser l'équation caractéristique pour trouver la solution générale de l'équation sans second membre. Prévoir le caractère borné ou non de ses solutions (critère de stabilité). Trouver l'expression des solutions lorsque $f(x)$ est constante ou de la forme $A.\exp(\lambda x)$ avec λ complexe. Trouver la solution de l'équation complète correspondant à des conditions initiales données. Représenter graphiquement cette solution.
Autres équations différentielles d'ordre 1 ou 2.	Obtenir une intégrale première d'une équation de Newton $x'' = f(x)$ et l'exploiter graphiquement. Séparer les variables d'une équation du premier ordre à variables séparables. Faire le lien entre les conditions initiales et le graphe de la solution correspondante.
3. Fonctions	
Fonctions usuelles.	Exponentielle, logarithme népérien et décimal, cosinus, sinus, tangente, puissance réelle ($x \rightarrow x^a$).
Dérivée. Notation dx/dt.	Utiliser la formule de Taylor à l'ordre un ou deux ; interpréter graphiquement.

Développements limités.	Connaître et utiliser les développements limités à l'ordre 1 des fonctions $(1 + x)^\alpha$, e^x et $\ln(1 + x)$, et à l'ordre 2 des fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
Primitive et intégrale.	Interpréter l'intégrale comme une somme de contributions infinitésimales, en lien avec la méthode des rectangles en mathématiques.
Valeur moyenne.	Exprimer la valeur moyenne sous forme d'une intégrale. Connaître la valeur moyenne sur une période des fonctions cos, sin, $\cos^2$ et $\sin^2$.
Représentation graphique d'une fonction.	Déterminer un comportement asymptotique ; rechercher un extremum local. Utiliser des échelles logarithmiques ; identifier une loi de puissance à une droite en échelle log-log.
Développement en série de Fourier d'une fonction périodique.	Utiliser un développement en série de Fourier fourni par un formulaire.
4. Géométrie	
Vecteurs et système de coordonnées.	Exprimer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Utiliser les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
Projection d'un vecteur et produit scalaire.	Interpréter géométriquement le produit scalaire et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée. Utiliser la bilinéarité et le caractère symétrique du produit scalaire.
Produit vectoriel.	Interpréter géométriquement le produit vectoriel et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée directe. Utiliser la bilinéarité et le caractère antisymétrique du produit vectoriel. Faire le lien avec l'orientation des trièdres.
Transformations géométriques.	Utiliser les symétries par rapport à un plan, les translations et les rotations de l'espace. Utiliser leur effet sur l'orientation de l'espace.
Courbes planes.	Reconnaître l'équation cartésienne d'une droite, d'un cercle. Utiliser la représentation polaire d'une courbe plane ; utiliser un grapheur pour obtenir son tracé.
Courbes planes paramétrées.	Identifier une ellipse à l'aide de sa représentation paramétrique ($x = a.\cos(\omega t)$, $y = b.\cos(\omega t-\varphi)$) et la tracer dans les cas particuliers $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ et $\varphi = \pi$.
Longueurs, aires et volumes classiques.	Citer les expressions du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'une sphère, du volume d'une boule, du volume d'un cylindre.
Barycentre d'un système de points.	Énoncer la définition du barycentre. Utiliser son associativité. Exploiter les symétries pour prévoir la position du barycentre d'un système homogène.
5. Trigonométrie	
Angle orienté.	Définir une convention d'orientation des angles d'un plan (euclidien) et lire des angles orientés.

	Relier l'orientation d'un axe de rotation à l'orientation positive des angles d'un plan perpendiculaire à cet axe.
Fonctions cosinus, sinus et tangente.	Utiliser le cercle trigonométrique et l'interprétation géométrique des fonctions cosinus, sinus et tangente comme aide-mémoire : relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, relations entre fonctions trigonométriques et toutes relations du type $\cos(\pi \pm x)$ et $\cos(\pi/2 \pm x)$, parités, périodicité, valeurs des fonctions pour les angles usuels. Citer les formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus ; utiliser un formulaire dans les autres cas.
Nombres complexes et représentation dans le plan. Somme et produit de nombres complexes.	Calculer et interpréter géométriquement la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument d'un nombre complexe.

Annexe 3 : outils numériques

La prise en compte de capacités de codage en langage Python dans la formation des étudiants inclue l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques. Elle vise à une meilleure appréhension des principes mis en œuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée. Elle a aussi pour objectif de mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la physique et de la chimie. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la physique-chimie comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.

Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que les capacités exigibles en fin de première année. Il sera complété dans le programme de physique-chimie de seconde année.

Domaines numériques	**Capacités exigibles**
1. Outils graphiques	
Représentation graphique d'un nuage de points.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **matplotlib** pour représenter un nuage de points.
Représentation graphique d'une fonction.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **matplotlib** pour tracer la courbe représentative d'une fonction.
Courbes planes paramétrées.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **matplotlib** pour tracer une courbe plane paramétrée.
2. Équations algébriques	
Résolution d'une équation algébrique ou d'une équation transcendante : méthode dichotomique.	Déterminer, en s'appuyant sur une représentation graphique, un intervalle adapté à la recherche numérique d'une racine par une méthode dichotomique. Mettre en œuvre une méthode dichotomique afin de résoudre une équation avec une précision donnée. Utiliser la fonction **bisect** de la bibliothèque **scipy.optimize** (sa spécification étant fournie).
3. Intégration – Dérivation	

Calcul approché d'une intégrale sur un segment par la méthode des rectangles.	Mettre en œuvre la méthode des rectangles pour calculer une valeur approchée d'une intégrale sur un segment.
Calcul approché du nombre dérivé d'une fonction en un point.	Utiliser un schéma numérique pour déterminer une valeur approchée du nombre dérivé d'une fonction en un point.
4. Équations différentielles	
Équations différentielles d'ordre 1.	Mettre en œuvre la méthode d'Euler explicite afin de résoudre une équation différentielle d'ordre 1.
Équations différentielles d'ordre supérieur ou égal à 2	Transformer une équation différentielle d'ordre n en un système différentiel de n équations d'ordre 1. Utiliser la fonction **odeint** de la bibliothèque **scipy.integrate** (sa spécification étant fournie).
5. Probabilité – statistiques	
Variable aléatoire.	Utiliser les fonctions de base des bibliothèques **random** et/ou **numpy** (leurs spécifications étant fournies) pour réaliser des tirages d'une variable aléatoire. Utiliser la fonction **hist** de la bibliothèque **matplotlib.pyplot** (sa spécification étant fournie) pour représenter les résultats d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire. Déterminer la moyenne et l'écart-type d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire.
Régression linéaire.	Utiliser la fonction **polyfit** de la bibliothèque **numpy** (sa spécification étant fournie) pour exploiter des données. Utiliser la fonction **random.normal** de la bibliothèque **numpy** (sa spécification étant fournie) pour simuler un processus aléatoire.

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voies Mathématiques, physique, ingénierie et informatique (MP2I) et Physique et sciences de l'ingénieur (PSI)

Annexe 3
Programmes de sciences industrielles de l'ingénieur

PROGRAMME DE SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR DANS LA FILIÈRE MP2I-PSI

1. Objectifs de formation

1.1. Finalité

Le programme de sciences industrielles de l'ingénieur de la filière MPII-PSI s'inscrit dans un parcours de formation initiale pour accéder au titre d'ingénieur. Il trouve ses racines dans le choix de spécialités scientifiques au cycle terminal du lycée. L'objectif de ce programme est de proposer des contenus d'enseignements qui permettent de développer progressivement les compétences nécessaires à l'intégration dans une grande école et à l'exercice des métiers d'ingénieurs. Ce programme est ambitieux quant au développement de compétences scientifiques et technologiques qui soutiennent l'expertise du futur ingénieur. Il l'est aussi pour le développement de compétences transversales nécessaires pour communiquer, travailler en équipe, exercer un sens critique et des responsabilités de manière éthique et déontologique. En cohérence avec les objectifs du cycle initial de la formation aux métiers de l'ingénierie, ce programme contribue à l'approche pédagogique par les STEM (*Science, Technology, Engineering and Mathematics*).

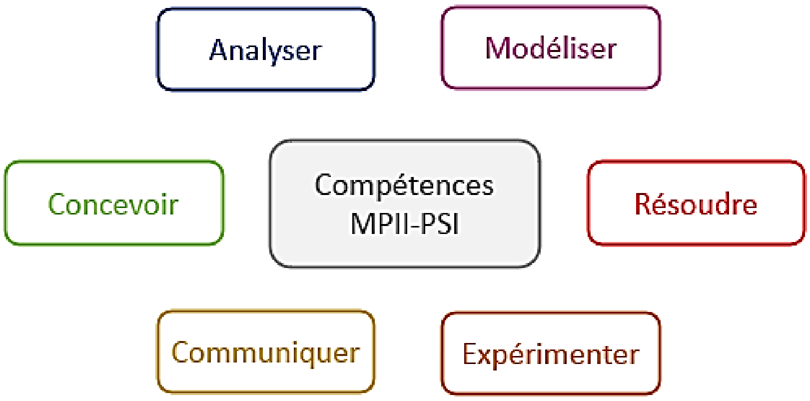
1.2. Objectifs généraux

Les ingénieurs doivent être en capacité de résoudre de façon innovante des problèmes inédits afin de répondre aux besoins des personnes et d'apporter un progrès dans leur qualité de vie. Ils participent aux processus de développement des systèmes à chaque étape de leur cycle de vie, de la caractérisation du besoin jusqu'au recyclage, en respectant les contraintes de développement durable et d'écoconception.

Cette capacité des ingénieurs à proposer des solutions innovantes est plus que jamais indispensable au développement d'une industrie capable de faire face aux grands enjeux sociétaux, économiques et environnementaux. Ces enjeux sont notamment ceux de la transition énergétique, la préservation de la qualité de l'environnement, la progression des technologies du numérique, la mutation des métropoles et des territoires, l'évolution des besoins alimentaires et des exigences en matière de santé pour des humains toujours plus nombreux sur notre planète. Dans un contexte de concurrence mondialisée, la capacité d'innovation des ingénieurs est nécessaire à l'industrie de notre pays qui doit demeurer compétitive et souveraine.

Les objectifs généraux du programme de la filière MPII-PSI visent à développer les compétences clés dans le large domaine des sciences industrielles de l'ingénieur qui sont nécessaires à l'exercice du métier d'ingénieur. Celles-ci sont consolidées et complétées par la formation poursuivie jusqu'à l'obtention du titre d'ingénieur.

L'enseignement en MPII-PSI se donne également pour objectif d'apporter aux étudiants des méthodes et des outils qui leur permettront de s'adapter aux évolutions permanentes des sciences et des technologies et de communiquer avec l'ensemble des acteurs associés à l'exercice des métiers d'ingénieurs et scientifiques.

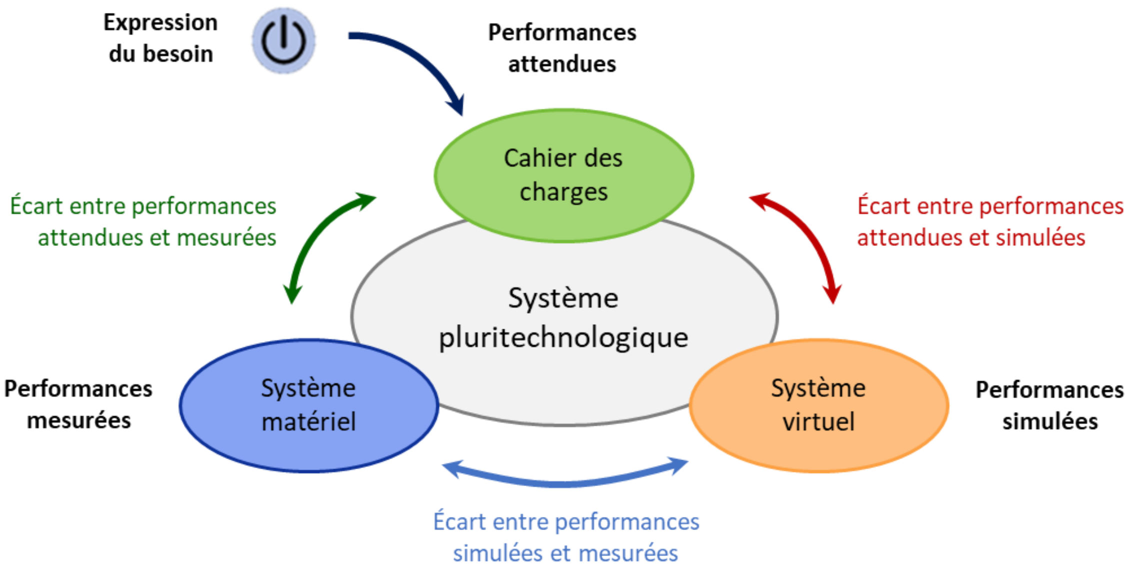


Les compétences générales de l’ingénieur développées en MPII-PSI

1.3. La démarche des enseignements en MPII-PSI

L’approche pédagogique et didactique des enseignements en MPII-PSI s’organise autour de systèmes pluritechnologiques. Chaque système est défini à partir de besoins fonctionnels et d’exigences, de modèles numériques et d’un système matériel. Un système sera étudié dans sa globalité à partir de ces trois approches imbriquées :

- la réalité du besoin ou exigences fonctionnelles. Elle se décline dans le cahier des charges défini avec un client ;
- la réalité virtuelle d’un système. Elle se traduit dans l’élaboration d’un modèle permettant de simuler son comportement afin d’en prévoir et d’en évaluer les performances ;
- la réalité matérielle d’un système. Les performances du système matériel sont mesurées par expérimentation.



La démarche pédagogique et didactique en sciences industrielles de l’ingénieur

Les objets et les systèmes, dans leur complexité, mobilisent plusieurs formes d’énergie et sont communicants. Ils sont pluritechnologiques.

La démarche en sciences industrielles de l'ingénieur en MPII-PSI vise à :

- s'approprier les trois réalités du système pluritechnologique (le cahier des charges, le système virtuel et le système matériel) ;
- comparer les performances issues de ces trois réalités ;
- optimiser le système virtuel et le système matériel afin de faire converger leurs performances vers celles attendues au cahier des charges.

Les contenus du programme de MPII-PSI permettent aux étudiants d'investir complètement la démarche de l'ingénieur en s'intéressant à toutes les représentations des systèmes. Pour cela les enseignements en MPII-PSI installent progressivement l'ensemble des connaissances et des compétences nécessaires à la maitrise des différentes représentations d'un même objet ou système, à la comparaison des différentes performances, à l'optimisation des systèmes dans leurs réalités numérique et matérielle, afin de répondre aux attentes du client.

Des solutions innovantes sont modélisées de façon numérique. Ces modèles numériques permettent la simulation du comportement des systèmes pluritechnologiques afin d'obtenir des performances simulées. Une démarche expérimentale menée sur des systèmes existants vient enrichir les compétences des étudiants au service de la démarche de l'ingénieur. Elle permet la comparaison des performances simulées et mesurées avec celles attendues au cahier des charges afin d'optimiser tout ou partie du modèle numérique.

1.4. Usage de la liberté pédagogique

Le programme définit les obligations faites aux professeurs des contenus à enseigner, les mêmes pour tous les étudiants, garantes de l'équité d'une formation offrant à chacun les mêmes chances de réussite. Les finalités et objectifs généraux de la formation en sciences industrielles de l'ingénieur laissent aux enseignants le choix pédagogique de l'organisation des enseignements et de ses méthodes. La nature des enseignements en sciences industrielles de l'ingénieur suppose la mise en œuvre d'une didactique naturellement liée à la discipline qui impose une réflexion sur le développement des compétences, la transmission des connaissances et leur ordonnancement dans la programmation des apprentissages. Les supports d'enseignement sont choisis afin d'être représentatifs des solutions innovantes pour répondre aux besoins actuels. Les solutions contemporaines sont mises en perspective avec l'histoire des sociétés, des sciences et des techniques, avec les préoccupations de respect de l'environnement et des ressources naturelles, de façon à construire les bases d'une culture d'ingénieur éthique et responsable.

2. Programme

Le programme est organisé en six compétences générales déclinées en compétences attendues qui pourront être évaluées en fin de cycle.

Partant de ces indications de fin de cycle, le programme détaille les compétences développées, précise les connaissances associées et fournit un indicateur de positionnement temporel dans le cycle.

Les compétences développées et les connaissances associées sont positionnées dans les semestres, cela signifie :

- qu'elles doivent être acquises en fin du semestre précisé ;
- qu'elles ont pu être introduites au cours des semestres précédents ;
- qu'elles peuvent être mobilisées aux semestres suivants.

Les compétences générales et compétences attendues sont détaillées ci-dessous.

A – Analyser
- A1 – Analyser le besoin et les exigences
- A2 – Définir les frontières de l'analyse
- A3 – Analyser l'organisation fonctionnelle et structurelle
- A4 – Analyser les performances et les écarts

B – Modéliser
- B1 – Choisir les grandeurs physiques et les caractériser
- B2 – Proposer un modèle de connaissance et de comportement
- B3 – Valider un modèle

C – Résoudre
- C1 – Proposer une démarche de résolution
- C2 – Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique
- C3 – Mettre en œuvre une démarche de résolution numérique

D – Expérimenter
- D1 – Mettre en œuvre un système
- D2 – Proposer et justifier un protocole expérimental
- D3 – Mettre en œuvre un protocole expérimental

E – Communiquer
- E1 – Rechercher et traiter des informations
- E2 – Produire et échanger de l'information

F – Concevoir
- F1 – Concevoir l'architecture d'un système innovant
- F2 – Proposer et choisir des solutions techniques

Les liens avec l'enseignement d'informatique sont identifiés par le symbole $\leftrightarrows I$.

A – Analyser

A1 – Analyser le besoin et les exigences

Compétences développées	**Connaissances associées**	**Semestre**
Décrire le besoin et les exigences.	Ingénierie Système et diagrammes associés. Cahier des charges.	S1
Commentaires *La connaissance de la syntaxe d'un langage d'Ingénierie Système n'est pas exigible. La structure des diagrammes d'Ingénierie Système (SysML) est fournie. Ils peuvent être proposés à lire ou à compléter.*		

Traduire un besoin fonctionnel en exigences.	Impact environnemental. Analyse du cycle de vie (extraction, fabrication, utilisation, fin de vie, recyclage et transport). Critères et niveaux.	S1
Définir les domaines d'application et les critères technico-économiques et environnementaux.		
Qualifier et quantifier les exigences.		
Évaluer l'impact environnemental et sociétal.		
Commentaire *Il s'agit de prendre en compte les exigences liées au développement durable et sensibiliser aux aspects sociétaux.*		

A2 – Définir les frontières de l'analyse

Compétences développées	**Connaissances associées**	**Semestre**
Isoler un système et justifier l'isolement.	Frontière de l'étude. Milieu extérieur.	S2
Définir les éléments influents du milieu extérieur.		
Identifier la nature des flux échangés traversant la frontière d'étude.	Flux de matière, d'énergie et d'information (définition, nature et codage).	S2

A3 – Analyser l'organisation fonctionnelle et structurelle

<table>
<tr><th>Compétences développées</th><th>Connaissances associées</th><th>Semestre</th></tr>
<tr><td>Associer les fonctions aux constituants.</td><td rowspan="4">Architecture fonctionnelle et structurelle.
Diagramme de définition de blocs.
Diagramme de bloc interne.
Chaines fonctionnelles (chaine d’information et chaine de puissance).
Fonctions acquérir, traiter et communiquer.
Fonctions alimenter, moduler, convertir, transmettre et agir.
Systèmes asservis et séquentiels.</td><td>S2</td></tr>
<tr><td>Justifier le choix des constituants dédiés aux fonctions d’un système.</td><td>S4</td></tr>
<tr><td>Identifier et décrire les chaines fonctionnelles du système.</td><td>S1</td></tr>
<tr><td>Identifier et décrire les liens entre les chaines fonctionnelles.</td><td>S1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Commentaires
La description des chaines fonctionnelles de différents systèmes permet de construire une culture technologique.
Les chaines fonctionnelles, diagrammes de définition de blocs et diagrammes de bloc interne peuvent être à lire ou à compléter avec les éléments syntaxiques fournis.</td></tr>
</table>

Caractériser un constituant de la chaine de puissance.	Alimentation d'énergie. Association de préactionneurs et d’actionneurs : – caractéristiques ; – réversibilité ; – domaines d'application. Transmetteurs de puissance : – caractéristiques ; – réversibilité ; – domaines d'application.	S3
Caractériser un constituant de la chaine d’information.	Capteurs : – fonctions ; – nature des grandeurs physiques d’entrées et de sorties ; – nature du signal et support de l’information.	S2
Analyser les principes d'intelligence artificielle. $\leftrightarrows I$	Régression et classification, apprentissages supervisé et non supervisé. Phases d'apprentissage et d'inférence. Modèle linéaire monovariable ou multivariable. Réseaux de neurones (couches d'entrée, cachées et de sortie, neurones, biais, poids et fonction d'activation).	S3

<table>
<tr><td>Interpréter tout ou partie de l’évolution temporelle d’un système séquentiel.</td><td>Diagramme d'états.
État, transition, événement, condition de garde, activité et action.</td><td>S2</td></tr>
<tr><td colspan="3">Commentaires
La connaissance de la syntaxe d’un langage d’Ingénierie Système n’est pas exigible. La structure des diagrammes d’Ingénierie Système (SysML) est fournie. Ils peuvent être proposés à lire ou à compléter.
L'évolution temporelle des états et des variables d'un diagramme d'états est représentée sous la forme d'un chronogramme.</td></tr>
</table>

Identifier la structure d'un système asservi.	Grandeurs d'entrée et de sortie. Capteur, chaine directe, chaine de retour, commande, comparateur, consigne, correcteur et perturbation. Poursuite et régulation.	S1

A4 – Analyser les performances et les écarts

<table>
<tr><th>Compétences développées</th><th>Connaissances associées</th><th>Semestre</th></tr>
<tr><td>Extraire un indicateur de performance pertinent à partir du cahier des charges ou de résultats issus de l'expérimentation ou de la simulation.</td><td rowspan="4">Ordre de grandeur.
Homogénéité des résultats.
Matrice de confusion (tableau de contingence), sensibilité et spécificité d'un test.</td><td rowspan="4">S4</td></tr>
<tr><td>Caractériser les écarts entre les performances.</td></tr>
<tr><td>Interpréter et vérifier la cohérence des résultats obtenus expérimentalement, analytiquement ou numériquement.
⇆</td></tr>
<tr><td>Rechercher et proposer des causes aux écarts constatés.</td></tr>
</table>

B – Modéliser

B1 – Choisir les grandeurs physiques et les caractériser

<table>
<tr><th>Compétences développées</th><th>Connaissances associées</th><th>Semestre</th></tr>
<tr><td>Identifier les performances à prévoir ou à évaluer.</td><td rowspan="2">Grandeurs flux, grandeurs effort.</td><td rowspan="2">S4</td></tr>
<tr><td>Identifier les grandeurs d'entrée et de sortie d’un modèle.</td></tr>
</table>

Identifier les paramètres d'un modèle.	Grandeurs flux, grandeurs effort.	S4
Identifier et justifier les hypothèses nécessaires à la modélisation.		

B2 – Proposer un modèle de connaissance et de comportement

Compétences développées	**Connaissances associées**	**Semestre**
Choisir un modèle adapté aux performances à prévoir ou à évaluer.	Phénomènes physiques. Domaine de validité. Solide indéformable.	S4
Compléter un modèle multiphysique.	Paramètres d'un modèle. Grandeurs flux et effort. Sources parfaites.	S3
Associer un modèle aux composants des chaines fonctionnelles.		
Commentaires *Un logiciel de modélisation multiphysique permettant d'assembler des composants technologiques issus d'une bibliothèque est privilégié pour la modélisation des systèmes pluritechnologiques. Les modèles mis en œuvre couvrent différents domaines (électrique, mécanique, thermique, hydraulique et pneumatique).*		

Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert.	Systèmes linéaires continus et invariants : – causalité ; – modélisation par équations différentielles ; – transformées de Laplace ; – fonction de transfert ; – forme canonique ; – gain, ordre, classe, pôles et zéros.	S1
Commentaires *L'utilisation des transformées de Laplace ne nécessite aucun prérequis. Leur présentation se limite à leurs énoncés et aux propriétés du calcul symbolique strictement nécessaires. Les théorèmes de la valeur finale, de la valeur initiale et du retard sont donnés sans démonstration.*		

Modéliser le signal d'entrée.	Signaux canoniques d'entrée : – impulsion ; – échelon ; – rampe ; – signaux périodiques.	S1

Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle. ⇆ *I*	Premier ordre, deuxième ordre, dérivateur, intégrateur, gain et retard. Paramètres caractéristiques. Allures des réponses indicielle et fréquentielle. Diagramme de Bode.	S2
Modéliser un système par schéma-blocs.	Schéma-blocs organique d'un système. Élaboration, manipulation et réduction de schéma-blocs. Fonctions de transfert : – chaîne directe et chaîne de retour ; – boucle ouverte et boucle fermée.	S1
Simplifier un modèle.	Linéarisation d'un modèle autour d'un point de fonctionnement. Pôles dominants et réduction de l'ordre du modèle : – principe ; – justification ; – limites.	S3
Modéliser un correcteur numérique. ⇆ *I*	Caractérisation des signaux à temps discret (échantillonnage et quantification). Modélisation par équations aux différences (équations de récurrence) d'un correcteur numérique (proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase).	S4
Commentaires *L'augmentation de la période d'échantillonnage permet de mettre en évidence les limites du modèle continu.* *Les transformées en z ne sont pas au programme.*		

Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.	Solide indéformable : – définition ; – repère ; – équivalence solide/repère ; – volume et masse ; – centre d'inertie ; – matrice d'inertie.	S3
Commentaire *Les calculs intégraux des éléments d'inertie (matrice et centre d'inertie) ne donnent pas lieu à évaluation.*		

Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques.	Liaisons : – liaisons parfaites ; – degrés de liberté ; – classe d'équivalence cinématique ; – géométrie des contacts entre deux solides ; – liaisons normalisées entre solides, caractéristiques géométriques et repères d'expression privilégiés ; – paramètres géométriques linéaires et angulaires ; – symboles normalisés. Graphe de liaisons. Schéma cinématique.	S1
Proposer un modèle cinématique à partir d'un système réel ou d'une maquette numérique.		
Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.	Vecteur position. Mouvements simple (translation et rotation) et composé. Trajectoire d'un point. Définition du vecteur vitesse et du vecteur taux de rotation. Définition du vecteur accélération. Composition des mouvements. Définition du contact ponctuel entre deux solides (roulement et glissement). Torseur cinématique (champ des vecteurs vitesse).	S2
Modéliser une action mécanique.	Modèle local (densités linéique, surfacique et volumique d'effort). Actions à distance et de contact. Modèle global. Passage d'un modèle local au modèle global. Frottements sec (lois de Coulomb) et visqueux. Torseur des actions mécaniques transmissibles. Torseur d'une action mécanique extérieure. Torseurs couple et glisseur.	S2
Simplifier un modèle de mécanisme.	Associations de liaisons en série et en parallèle. Liaisons équivalentes (approches cinématique et statique). Conditions et limites de la modélisation plane.	S2
Modifier un modèle pour le rendre isostatique.	Mobilité du modèle de mécanisme. Degré d'hyperstatisme du modèle. Substitution de liaisons.	S3

Décrire le comportement d'un système séquentiel.	Diagramme d'états.	S2
Commentaire *La description graphique permet de s'affranchir d'un langage de programmation spécifique.*		

B3 – Valider un modèle

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.	Critères de performances.	S2
Préciser les limites de validité d'un modèle.	Point de fonctionnement. Non-linéarités (courbure, hystérésis, saturation et seuil) et retard pur.	S4
Modifier les paramètres et enrichir le modèle pour minimiser l'écart entre les résultats analytiques et/ou numériques et les résultats expérimentaux.		S4

C – Résoudre

C1 – Proposer une démarche de résolution

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.	Critères du cahier des charges : – stabilité (marges de stabilité, amortissement et dépassement relatif) ; – précision (erreur/écart statique et erreur de trainage) ; – rapidité (temps de réponse à 5 %, bande passante et retard de trainage).	S2
Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.	Compensation de pôles, réglage de marges, amortissement, rapidité et bande passante. Application aux correcteurs de type proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase.	S3

Choisir une démarche de résolution d’un problème d'ingénierie numérique ou d'intelligence artificielle. ⇆ *I*	Décomposition d'un problème complexe en sous problèmes simples. Choix des algorithmes (réseaux de neurones, *k* plus proches voisins et régression linéaire multiple).	S3
Proposer une démarche permettant d'obtenir une loi entrée-sortie géométrique. ⇆ *I*	Fermetures géométriques.	S1
Proposer une démarche permettant la détermination d’une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.	Graphe de structure. Choix des isolements. Choix des équations à écrire pour appliquer le principe fondamental de la statique ou le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen. Théorème de l'énergie cinétique.	S3

C2 – Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique

Compétences développées	**Connaissances associées**	**Semestre**
Déterminer la réponse temporelle. ⇆ *I*	Expressions des solutions des équations différentielles pour les systèmes d’ordre 1 et 2 soumis à une entrée échelon. Allures des solutions des équations différentielles d’ordre 1 et 2 pour les entrées de type impulsion, échelon, rampe et sinus (en régime permanent).	S1
Commentaire *La résolution d’équations différentielles et les transformées inverses de Laplace ne sont pas au programme.*		

Déterminer la réponse fréquentielle. ⇆ *I*	Allures des diagrammes réel et asymptotique de Bode.	S2

Déterminer les performances d'un système asservi.	Stabilité d'un système asservi : – définition ; – amortissement ; – position des pôles dans le plan complexe ; – marges de stabilité. Rapidité d'un système : – temps de réponse à 5 % ; – bande passante. Précision d'un système asservi : – théorème de la valeur finale ; – écart/erreur statique (consigne ou perturbation) ; – erreur de trainage vis-à-vis de la consigne ; – lien entre la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte et l'écart statique.	S2
Commentaire *Les critères de Routh et de Nyquist, ainsi que les diagrammes de Black-Nichols et de Nyquist, ne sont pas au programme.*		

Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.	Correcteurs proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase.	S4
Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère.	Trajectoire d'un point. Mouvements de translation et de rotation. Mouvement composé.	S1
Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques. ⇆ I	Loi entrée-sortie géométrique. Loi entrée-sortie cinématique. Transmetteurs de puissance (vis-écrou, roue et vis sans fin, trains d'engrenages simples, trains épicycloïdaux, pignon-crémaillère et poulies-courroie).	S2
Déterminer les actions mécaniques en statique.	Référentiel galiléen. Principe fondamental de la statique. Principe des actions réciproques.	S2

Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.	Torseurs cinétique et dynamique d'un solide ou d'un ensemble de solides, par rapport à un référentiel galiléen. Principe fondamental de la dynamique en référentiel galiléen. Énergie cinétique. Inertie et masse équivalentes. Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ou à un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport au repère galiléen. Puissance intérieure à un ensemble de solides. Théorème de l'énergie cinétique. Rendement en régime permanent.	S3
Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.		

C3 – Mettre en œuvre une démarche de résolution numérique

Compétences développées	**Connaissances associées**	**Semestre**
Mener une simulation numérique. ⇆ *I*	Choix des grandeurs physiques. Choix du solveur et de ses paramètres (pas de discrétisation et durée de la simulation). Choix des paramètres de classification. Influence des paramètres du modèle sur les performances.	S4
Résoudre numériquement une équation ou un système d'équations. ⇆ *I*	Réécriture des équations d'un problème. Résolution de problèmes du type $f(x) = 0$ (méthodes de dichotomie et de Newton). Résolution d'un système linéaire du type $A \cdot X = B$. Résolution d'équations différentielles (schéma d'Euler explicite). Intégration et dérivation numérique (schémas arrière et avant).	S3
Commentaires *La « réécriture des équations » signifie :* *– remettre en forme des équations pour leurs traitements par une bibliothèque ;* *– mettre sous forme matricielle un problème (problème de Cauchy et système linéaire).* *Les méthodes numériques sont introduites au fur et à mesure, en fonction des besoins de la formation. Pour la résolution d'un système d'équations du type A·X = B, l'utilisation d'une bibliothèque pré implémentée est privilégiée.* *Les aspects théoriques liés aux méthodes numériques ne sont pas exigibles (stabilité, convergence, conditionnement de matrices…).*		

Résoudre un problème en utilisant une solution d'intelligence artificielle. $\leftrightarrows I$	Apprentissage supervisé. Choix des données d'apprentissage. Mise en œuvre des algorithmes (réseaux de neurones, *k* plus proches voisins et régression linéaire multiple). Phases d'apprentissage et d'inférence.	S3
Commentaire *Des bibliothèques préimplémentées sont utilisées.*		

D – Expérimenter

D1 – Mettre en œuvre un système

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Mettre en œuvre un système en suivant un protocole.		S2
Repérer les constituants réalisant les principales fonctions des chaines fonctionnelles.	Fonctions acquérir, traiter et communiquer. Fonctions alimenter, moduler, convertir, transmettre et agir.	S2
Identifier les grandeurs physiques d’effort et de flux.		S2

D2 – Proposer et justifier un protocole expérimental

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Choisir le protocole en fonction de l'objectif visé.		S4
Choisir les configurations matérielles et logicielles du système en fonction de l'objectif visé par l'expérimentation.		S2
Choisir les réglages du système en fonction de l'objectif visé par l'expérimentation.		
Choisir la grandeur physique à mesurer ou justifier son choix.		
Choisir les entrées à imposer et les sorties pour identifier un modèle de comportement.		

Justifier le choix d'un capteur ou d'un appareil de mesure vis-à-vis de la grandeur physique à mesurer.		S3

D3 – Mettre en œuvre un protocole expérimental

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Régler les paramètres de fonctionnement d'un système.		S2
Mettre en œuvre un appareil de mesure adapté à la caractéristique de la grandeur à mesurer.		
Effectuer des traitements à partir de données.⇆ *I*	Traitement de fichiers de données. Moyenne et écart type. Moyenne glissante et filtres numériques passe-bas du premier et du second ordre.	S3
Identifier les erreurs de mesure.	Incertitudes, résolution, quantification, échantillonnage, justesse, fidélité, linéarité et sensibilité.	S2
Identifier les erreurs de méthode.		
Commentaires *L'incertitude renvoie à la technologie des appareils de mesure et des capteurs. Il n'est pas souhaité de longs développements théoriques et calculs associés.*		

E – Communiquer

E1 – Rechercher et traiter des informations

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Rechercher des informations.	Outils de recherche. Mots-clefs.	S2
Distinguer les différents types de documents et de données en fonction de leurs usages.		S2
Vérifier la pertinence des informations (obtention, véracité, fiabilité et précision de l'information).		
Extraire les informations utiles d'un dossier technique.		

Lire et décoder un document technique.	Diagrammes SysML. Schémas cinématique, électrique, hydraulique et pneumatique.	S3
Commentaire *Les normes de représentation des schémas pneumatiques, hydrauliques et du langage SysML sont fournies.*		

Trier les informations selon des critères.		S2
Effectuer une synthèse des informations disponibles dans un dossier technique.		

E2 – Produire et échanger de l'information

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Choisir un outil de communication adapté à l'interlocuteur.		S2
Faire preuve d'écoute et confronter des points de vue.		
Présenter les étapes de son travail.		
Présenter de manière argumentée une synthèse des résultats.		
Produire des documents techniques adaptés à l'objectif de la communication.	Diagrammes SysML. Chaine fonctionnelle. Schéma-blocs. Schéma cinématique. Graphe de structure. Spécifications d'algorithmes.	S3
Commentaire *L'écriture des diagrammes SysML se limite à leur complétion et à leur modification*.		

Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.	Grandeurs utilisées : – unités du système international ; – homogénéité des grandeurs.	S4

F – Concevoir

F1 – Concevoir l'architecture d'un système innovant

<table>
<tr><th>Compétences développées</th><th>Connaissances associées</th><th>Semestre</th></tr>
<tr><td>Proposer une architecture fonctionnelle et organique.</td><td></td><td>S4</td></tr>
<tr><td colspan="3">Commentaires
Cette proposition peut se faire sous forme d'association de blocs.
Il s'agit d'allouer des composants à la satisfaction d'exigences fonctionnelles et éventuellement de décrire les interfaces entre ces composants.
L’activité de projet est une modalité pédagogique à privilégier pour développer cette compétence.</td></tr>
</table>

F2 – Proposer et choisir des solutions techniques

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Modifier la commande pour faire évoluer le comportement du système. $\leftrightarrows I$	Modification d'un programme : – système séquentiel ; – structures algorithmiques. Choix et paramètres d'un correcteur.	S4

Programmes de la classe préparatoire scientifique Physique, chimie et sciences de l'ingénieur (PCSI) et au programme de sciences industrielles de l'ingénieur de la classe Physique et sciences de l'ingénieur (PSI)

NOR : ESRS2035780A
arrêté du 5-1-2021 - JO du 7-2-2021
MESRI - DGESIP - A1-2

Vu Code de l'éducation, notamment articles D. 612-19 à D. 612-29 ; arrêtés du 10-2-1995 modifiés ; arrêté du 3-7-1995 modifié ; arrêté du 20-6-1996 modifié ; avis du CSE du 10-12-2020 ; avis du Cneser du 15-12-2020 ; avis de la ministre des Armées du 15-12-2020

Article 1 - Les programmes de première année de mathématiques, de physique et de chimie de la classe préparatoire scientifique Physique, chimie et sciences de l'ingénieur (PCSI), figurant respectivement aux annexes I, II et III de l'arrêté du 3 juillet 1995 susvisé, sont remplacés par ceux figurant respectivement aux annexes 1, 2 et 3 du présent arrêté.

Article 2 - Les programmes de première et seconde années de sciences industrielles de l'ingénieur des classes préparatoires scientifiques Physique, chimie et sciences de l'ingénieur (PCSI) et Physique et sciences de l'ingénieur (PSI), figurant respectivement à l'annexe IV de l'arrêté du 3 juillet 1995 susvisé et à l'annexe IV de l'arrêté du 20 juin 1996 susvisé, sont remplacés par ceux figurant à l'annexe 4 du présent arrêté.

Article 3 - Les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021-2022 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023 pour les classes de seconde année.

Article 4 - Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie.

Article 5 - Le présent arrêté sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait le 5 janvier 2021

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
Édouard Geffray

Pour le ministre des Outre-mer et par délégation,
La directrice générale des outre-mer,
Sophie Brocas

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Pour la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle,
Le chef de service, adjoint de la directrice générale,
Brice Lannaud

Annexes

↳ *Annexes 1 à 4*

- Annexe 1 : programmes de mathématiques
- Annexe 2 : programme de physique-chimie
- Annexe 3 : programmes de chimie

- Annexe 4 : programmes de sciences industrielles de l'ingénieur

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Physique, chimie et sciences de l'ingénieur (PCSI)

Annexe 1
Programme de mathématiques

Classe préparatoire PCSI
Programme de mathématiques

Table des matières

Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires scientifiques MPSI, PCSI, PTSI, MP2I, MP, PC, PSI, PT, MPI sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.

Objectifs de formation

En classe préparatoire scientifique, les mathématiques constituent conjointement une discipline scientifique à part entière, développant des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques, et une discipline fournissant des connaissances et des méthodes nécessaires aux autres disciplines scientifiques.
La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels :
- fournir un solide bagage de connaissances, de concepts et de méthodes ;
- exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé ;
- développer l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur ;
- promouvoir la réflexion personnelle des étudiantes et étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples ; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires scientifiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :
- **chercher**, mettre en œuvre des stratégies : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner**, argumenter : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer**, utiliser le langage symbolique : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

Chercher
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions

entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension-même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et illustrent certains résultats d'analyse.
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

Architecture et contenu du programme

L'année est découpée en deux semestres. Les contenus du programme peuvent se répartir en trois champs : algèbre, analyse et probabilités. L'algèbre et l'analyse occupent le plus grand volume sur les deux semestres, tandis que les probabilités sont introduites au second semestre. Si la géométrie n'apparaît pas comme un champ autonome, son importance dans la représentation des objets du programme ne saurait être sous-estimée. Ainsi, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour l'étude des nombres complexes, l'algèbre linéaire, les espaces euclidiens, les fonctions d'une variable réelle. Les notions de géométrie affine et euclidienne étudiées au lycée sont reprises dans un cadre plus général.
L'étude de chaque domaine permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation et d'établir des liens avec les autres disciplines.

Outre l'étude des nombres complexes, le programme d'algèbre comprend deux volets. Le premier est l'étude des polynômes à une indéterminée. Le second, nettement plus volumineux, est consacré aux notions de base de l'algèbre linéaire, pour laquelle un équilibre est réalisé entre les points de vue géométrique et numérique. Il importe de souligner le caractère général des méthodes linéaires, notamment à travers leurs interventions en analyse et en géométrie.

Le programme d'analyse est centré autour des concepts fondamentaux de fonction et de suite. Les interactions entre les aspects discret et continu sont mises en valeur. Le programme d'analyse combine l'étude de problèmes qualitatifs et quantitatifs, il développe conjointement l'étude du comportement global de suite ou de fonction avec celle de leur comportement local ou asymptotique. À ce titre, les méthodes de l'analyse asymptotique font l'objet d'une section spécifique, qui est exploité ultérieurement dans l'étude des séries. Pour l'étude des solutions des équations, le programme allie les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact et les méthodes d'approximation. Enfin, les fonctions de deux variables préparent au programme de deuxième année.

L'enseignement des probabilités se place dans le cadre des univers finis. Il a vocation à interagir avec le reste du programme. La notion de variable aléatoire permet d'aborder des situations réelles nécessitant une modélisation probabiliste. L'accent mis sur cette notion permet de travailler rapidement avec des événements construits en termes de variables aléatoires.

La pratique de calculs simples permet aux étudiants de s'approprier de manière effective les notions du programme. Le choix a donc été fait d'introduire très tôt un module substantiel visant à consolider les pratiques de calcul (dérivation des fonctions, calcul de primitives, résolution de certains types d'équations différentielles). Les théories sous-jacentes sont étudiées ultérieurement, ce qui doit en faciliter l'assimilation.
Les étudiants doivent savoir mettre en œuvre directement (c'est-à-dire sans recourir à un instrument de calcul), sur des exemples simples, un certain nombre de méthodes de calcul, mais aussi connaître leur cadre d'application et la forme des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

En cohérence avec l'introduction d'un enseignement d'algorithmique au lycée, le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels). Il identifie un certain nombre d'algorithmes qui doivent être connus et pratiqués par les étudiants. Ceux-ci doivent également savoir utiliser les fonctionnalités graphiques des calculatrices et des logiciels.

Le volume global du programme a été conçu pour libérer des temps dédiés à une mise en activité effective des étudiants, quel que soit le contexte proposé (cours, travaux dirigés).

Organisation du texte

Le programme définit les objectifs de l'enseignement et décrit les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; il précise aussi certains points de terminologie et certaines notations. Il fixe clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.
À l'intérieur de chaque semestre, le programme est décliné en sections. Chaque section comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. À l'intérieur de chaque semestre, le professeur conduit en toute liberté, dans le respect de la cohérence de la formation globale, l'organisation de son enseignement et le choix de ses méthodes. En particulier, la chronologie retenue dans la présentation des différentes sections de chaque semestre ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression. Cependant, la progression retenue au cours du premier semestre doit respecter les objectifs de l'enseignement dispensé au cours de cette période. Ces objectifs sont détaillés dans le bandeau qui suit le titre « Premier semestre ».
Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes…) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différentes sections ;

– celles qui sont indiquées dans les bandeaux ou dans la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
– celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit en particulier des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme.

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

Afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les autres disciplines scientifiques.

Premier semestre

Le premier semestre vise deux objectifs majeurs.

- Aménager un passage progressif de la classe de terminale à l'enseignement supérieur, en commençant par renforcer et approfondir les connaissances des bacheliers. À ce titre, trois sections jouent un rôle particulier.
  - La section « Raisonnement et vocabulaire ensembliste » regroupe des notions dont la plupart ont été mises en place au lycée. Il s'agit de les consolider et de les structurer afin qu'elles soient maîtrisées par les étudiants à la fin du premier semestre. Cette section n'a pas vocation à être enseignée d'un seul tenant ni en tout début de semestre.
  - Les sections « Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie » et « Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral » sont axées sur les techniques de calcul. La seconde est fondée sur des théorèmes admis à ce stade, mais démontrés plus loin dans le programme. Cette présentation en deux temps, destinée à faciliter les apprentissages, peut être modulée par le professeur.
- Susciter la curiosité et l'intérêt des étudiants en leur présentant un spectre suffisamment large de problématiques et de champs nouveaux.
  - La section « Nombres complexes » permet l'étude algébrique et géométrique de ces nombres.Elle aborde des applications à la trigonométrie ainsi qu'une première approche des équations algébriques.
  - Les sections « Nombres réels et suites numériques » et « Limites, continuité, dérivabilité » fondent l'analyse réelle sur des bases solides.
  - La section « Calcul matriciel et systèmes linéaires » fournit le vocabulaire et les techniques de résolution des systèmes linéaires, et prépare l'algèbre linéaire du second semestre.
  - Par les possibilités qu'elle offre de combiner beaucoup d'idées et de techniques étudiées au cours du premier semestre, la section « Polynômes » constitue un objet d'étude pertinent pour la fin du semestre.

Le professeur organise l'enseignement de la manière qui lui semble la plus profitable, en gardant à l'esprit le fait que la maîtrise rapide des techniques de calcul est un impératif, notamment en vue de l'enseignement de physique-chimie. Les ensembles de nombres usuels $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sont supposés connus. Toute construction est hors programme.

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Cette section regroupe les différents points de vocabulaire, notations, outils et raisonnements nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique. Ces notions doivent être introduites de manière progressive. Leur acquisition est un objectif pour la fin du premier semestre.

Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Toute étude systématique de la logique, de la théorie des ensembles ou de l'arithmétique est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Rudiments de logique	
Quantificateurs.	L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviation est exclu.
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par disjonction des cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.	Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.
Raisonnement par récurrence (simple, double, forte).	Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.
b) Ensembles	
Ensemble, appartenance. Ensemble vide.	
Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et A^c pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathscr{P}(E)$.
Recouvrement disjoint, partition.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Ensembles de nombres usuels	
Entiers naturels, entiers relatifs, divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples.	
Théorème de la division euclidienne.	
PGCD de deux entiers relatifs dont l'un au moins est non nul.	Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{Z}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
PPCM.	
Algorithme d'Euclide.	
Nombre premier.	
L'ensemble des nombres premiers est infini.	
Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.	La démonstration est hors programme. Application au calcul du PGCD et du PPCM.
Nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.	La construction des ensembles de nombres usuels, en particulier celle de $\mathbb{R}$, est hors programme.
d) Applications	
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathscr{F}(E,F)$ et F^E.
Famille d'éléments d'un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f\|_A$.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition.	
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	Notation f^{-1}. Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.

Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie

Cette section « boîte à outils » complète l'enseignement du lycée sur un certain nombre de points importants pour la suite :

- *calculs de sommes et de produits, dont la formule du binôme ;*
- *résolution de petits systèmes linéaires par l'algorithme du pivot ;*
- *manipulation d'inégalités et résolution d'inéquations ;*
- *utilisation du cercle trigonométrique, manipulation des lignes et fonctions trigonométriques.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Sommes et produits	
Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.	Notations $\sum_{i\in I} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i\in I} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Cas où I est vide.
Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.	Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.
Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$. Factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$.	
Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.	Exemples de sommes triangulaires.
Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux. Formule du binôme dans $\mathbb{R}$.	Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k<0$ et $k>n$.
b) Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot	
Système linéaire à coefficients réels de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues. Algorithme du pivot et mise en évidence des opérations élémentaires.	Interprétation géométrique : intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$, de plans dans $\mathbb{R}^3$. Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ($\lambda \neq 0$), $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
c) Inégalités	
Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations. Intervalles de $\mathbb{R}$.	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.
Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $\lvert x-a\rvert \leqslant b$.
Dans $\mathbb{R}$, parties majorées, minorées, bornées. Majorant, minorant ; maximum, minimum.	
Partie entière d'un nombre réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$.
d) Trigonométrie	
Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.	
Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.	Notation $a \equiv b\ [2\pi]$.
Cosinus et sinus de $\pi \pm x$, de $\frac{\pi}{2} \pm x$. Cosinus et sinus des angles usuels.	Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.
Formules d'addition $\cos(a\pm b)$, $\sin(a\pm b)$. Cas particulier des formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.	On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a)\sin(b)$.
Fonctions circulaires cosinus et sinus.	On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.
Pour $x \in \mathbb{R}$, inégalité $\lvert\sin(x)\rvert \leqslant \lvert x\rvert$.	
Fonction tangente.	Notation tan. Dérivée, variations, représentation graphique.
Tangente de $\pi \pm x$. Tangente des angles usuels. Formule d'addition $\tan(a\pm b)$.	Interprétation sur le cercle trigonométrique.

Nombres complexes

L'objectif de cette section, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

- *l'étude algébrique de l'ensemble $\mathbb{C}$ et la notion d'équation algébrique ;*
- *l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;*
- *l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).
b) Conjugaison et module	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module. Relation $\|z\|^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $\|z - z'\|$, cercles et disques.
c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme.	Notation $\mathbb{U}$.
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q), \sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
d) Forme trigonométrique	
Forme trigonométrique $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(r > 0)$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t - \varphi)$.	
e) Équations algébriques	
Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.	
Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Somme et produit des racines.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
f) Racines n-ièmes	
Description des racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.

Contenus	Capacités & Commentaires
g) Exponentielle complexe	
Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.	Notations $\exp(z)$, e^z. Module et arguments de e^z.
h) Interprétation géométrique des nombres complexes	
Interprétation géométrique des module et arguments de $\dfrac{c-a}{b-a}$.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.
Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az$ et $z \mapsto z + b$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Interprétation géométrique de la conjugaison.	Il s'agit d'introduire certaines transformations du plan : translations, homothéties, rotations. L'étude générale des similitudes est hors programme.

Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

Le point de vue adopté dans cette section est pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre les techniques de base de l'analyse. La mise en place rigoureuse des notions abordées fait l'objet de sections ultérieures.

Les objectifs de formation sont les suivants :
- *l'introduction de fonctions pour établir des inégalités et résoudre des problèmes d'optimisation ;*
- *la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu ;*
- *le calcul de dérivées et de primitives ;*
- *la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable ;*
- *l'application des deux points précédents aux équations différentielles.*

Le cours sur les équations différentielles est illustré par des exemples issus des autres disciplines scientifiques.

A - Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.
Somme, produit, composée. Monotonie (large et stricte).	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si et seulement si $\|f\|$ est majorée.
b) Dérivation	
Dérivée d'une fonction.	Notations $f'(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade. Exemples simples de calculs de dérivées partielles.
Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.	Résultats admis à ce stade.

Contenus	Capacités & Commentaires
Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.	Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.
Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.	La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	
Dérivées d'ordre supérieur.	

c) Fonctions usuelles

Contenus	Capacités & Commentaires
Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.	
Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.	
Inégalités $\exp(x) \geqslant 1 + x$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.	
Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.	Dérivée, variations, représentation graphique.
Fonctions hyperboliques sh, ch.	Dérivée, variations, représentation graphique. La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

d) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.	La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.	Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.
Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.	

B - Primitives et équations différentielles linéaires

Contenus	Capacités & commentaires

a) Calcul de primitives

Contenus	Capacités & commentaires
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f. On pourra noter $\displaystyle\int^{x} f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Intégration par parties, changement de variable.	Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ensemble des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée. Méthode de la variation de la constante. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.	Équation homogène associée.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

Nombres réels et suites numériques

L'objectif de cette section est de donner une base solide à l'étude des suites réelles, notamment les suites définies par une relation de récurrence.

Dans l'étude des suites, on distingue nettement les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).

Contenus	Capacités & commentaires
a) Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure). Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.	Notations $\sup X$, $\inf X$. On convient que $\sup X = +\infty$ si X est non majorée.
b) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\big(\lvert u_n\rvert\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $u_n \longrightarrow \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Passage à la limite d'une inégalité large. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Utilisation d'une majoration de la forme $\|u_n - \ell\| \leqslant v_n$, où (v_n) converge vers 0.
d) Suites monotones	
Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.	
Approximations décimales d'un réel.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès. Tout réel est limite d'une suite de rationnels.
e) Suites extraites	
Suite extraite.	Tout développement théorique sur les suites extraites est hors programme.
Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ. Le théorème de Bolzano-Weierstrass est hors programme.
f) Suites complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
g) Suites particulières	
Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.	Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.
Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.	
Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.	Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de (u_n), on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de $f(x) - x$, et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f.

Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité, dérivabilité

Dans cette section, on démontre les théorèmes de base relatifs aux fonctions réelles de variable réelle. Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et, sauf dans les paragraphes A-d) et B-f), sont à valeurs réelles. On dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré en a si a est réel, avec un intervalle $]A, +\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty, A[$ si $a = -\infty$.

L'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ est l'occasion d'introduire la notion de vitesse de convergence. Sur des exemples, on met en évidence divers comportements (convergence lente, géométrique, quadratique) en explicitant le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision donnée. On pourra en particulier présenter la méthode de Newton. De même, l'étude de la dérivabilité donne un prétexte pour présenter la notion de discrétisation, à travers la méthode d'Euler.

A - Limites et continuité

Le paragraphe a) consiste largement en des adaptations au cas continu de notions déjà étudiées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de disposer d'outils efficaces (développements limités).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Limite d'une fonction en un point	
Étant donné a fini ou infini appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.	
Si f possède une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie). Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition. Passage à la limite d'une inégalité large. Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$),par majoration (limite $-\infty$). Théorème de la limite monotone.	
b) Continuité en un point	
Continuité, prolongement par continuité en un point.	La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
Continuité à gauche, à droite. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
c) Continuité sur un intervalle	
Continuité sur un intervalle.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Principe de démonstration par dichotomie.
Image d'un intervalle par une fonction continue. Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.	
Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.
Image d'un segment par une fonction continue.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.	La démonstration n'est pas exigible.
d) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.

B - Dérivabilité

Contenus	Capacités & commentaires
a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite.	Définition par le taux d'accroissement. Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas $f(a+h)=f(a)+f'(a)h+h\varepsilon(h)$, où $\varepsilon(h)\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0$. Interprétation géométrique : tangente. Interprétation cinématique : vitesse instantanée.
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une fonction réciproque.
b) Extremum local et point critique	
Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.
c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\lvert f'\rvert$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.	Interprétations géométrique et cinématique. La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle. Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I\setminus\{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x)=\ell\in\mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a)=\ell$. Extension au cas où $\ell=\pm\infty$.	La fonction f' est alors continue en a.
d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$	
Pour $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

Contenus	Capacités & Commentaires
e) Fonctions convexes	
La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.	Interprétation géométrique. L'inégalité de Jensen et les développements généraux sur les barycentres sont hors programme.
Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes, d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes. Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.	Exemples d'inégalités de convexité.
f) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathscr{C}^1$.	On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Cette section a pour but de présenter une initiation au calcul matriciel, de préparer l'étude géométrique de l'algèbre linéaire menée au second semestre et de revenir sur l'étude des systèmes linéaires. Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Opérations sur les matrices	
Ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice. Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	Notation $A^\top$.
b) Opérations élémentaires	
Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.	
c) Systèmes linéaires	
Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.	
Système compatible.	Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.
Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.	On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Ensemble des matrices carrées	
Ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n.
Matrices symétriques, antisymétriques.	Notations $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Inverse d'une transposée.	
Inverse d'un produit de matrices inversibles.	
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.	
Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.	Toute technicité est exclue.
Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.	Cas particulier des matrices diagonales.

Polynômes

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de base des polynômes et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.

On présente la décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles, uniquement dans des situations simples. L'objectif est de présenter aux étudiants un outil qui leur permette de mener à bien des calculs d'intégration, de dérivation, de somme, etc.

Le programme se limite aux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ensemble des polynômes à une indéterminée	
Ensemble $\mathbb{K}[X]$.	La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme.
Combinaison linéaire et produit de polynômes, formule du binôme.	
Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.	Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.
Degré d'une somme, d'un produit.	Le produit de deux polynômes non nuls est non nul.
Composition.	
b) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples.	
Théorème de la division euclidienne.	Algorithme de la division euclidienne.
c) Fonctions polynomiales et racines	
Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.	Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ». Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale.
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.	Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.
Multiplicité d'une racine.	
Polynôme scindé.	
Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients.	Les fonctions symétriques élémentaires sont hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Dérivation	
Dérivée formelle d'un polynôme.	Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	
e) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$	
Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.	La démonstration est hors programme. Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités. Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.	Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.
f) Décomposition en éléments simples de certaines fonctions rationnelles	
Expression de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles à pôles simples.	La démonstration est hors programme. Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie. Application au calcul de primitives, de dérivées k-ièmes.

Deuxième semestre

Le deuxième semestre s'organise autour de plusieurs objectifs majeurs.

- Introduire les notions fondamentales relatives à l'algèbre linéaire et aux espaces préhilbertiens.
- Prolonger les sections d'analyse du premier semestre par l'étude de l'analyse asymptotique et de l'intégration des fonctions continues sur un segment.
- Consolider et enrichir les notions relatives aux variables aléatoires sur un univers fini introduites au lycée.
- Amorcer l'étude des séries numériques dans un cadre restreint et préparer le calcul différentiel, notions qui seront développées en seconde année.

Le professeur a la liberté d'organiser l'enseignement du semestre de la manière qui lui semble la mieux adaptée. Il est cependant fortement préconisé de traiter la section « Analyse asymptotique » en début de semestre pour disposer rapidement d'outils efficaces, et de traiter la section « Fonctions de deux variables » à la fin.

Le programme d'algèbre linéaire est divisé en deux sections. La première étudie les objets géométriques : espaces, sous-espaces, applications linéaires; la seconde fait le lien avec le calcul matriciel. Cette séparation n'est qu'une commodité de rédaction et le professeur peut organiser l'ensemble comme il le souhaite.

Analyse asymptotique

L'objectif de cette section est d'introduire les techniques asymptotiques fondamentales, dans les cadres continu et discret. Les fonctions et les suites y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant. On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison.

Les développements limités sont les principaux outils du calcul asymptotique. Afin d'en disposer au plus tôt, on traitera en premier lieu les fonctions. Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir mener à bien rapidement des calculs asymptotiques simples. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels.

Cette section permet de revenir sur la problématique de la vitesse de convergence introduite au premier semestre lors de l'étude des fonctions de variable réelle.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Relations de comparaison : cas des fonctions	
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\mathbb{R}$ ou $a=\pm\infty$. Lien entre ces relations.	Notations $$f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)),\ f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)),\ f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x).$$ La relation $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ est définie à partir du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas localement. Pour la relation $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, on donne les deux formes $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x)+o(g(x))$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs. Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a\neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h\to 0$. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées de $\ln^\beta(x)$, x^α, $e^{\gamma x}$ en $+\infty$, de $\ln^\beta(x)$, x^α en 0.
Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O. Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles f, g, h vérifient $f\leqslant g\leqslant h$ et si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Développements limités	
Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.	Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a.
Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.	
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.
Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathscr{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$. Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan.	
Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.	Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.
Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.	
c) Relations de comparaison : cas des suites	
Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.
d) Problèmes d'analyse asymptotique	
Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales.	La notion d'échelle de comparaison est hors programme.

Espaces vectoriels et applications linéaires

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire ;*
- *reconnaître les problèmes linéaires et les traduire à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire ;*
- *définir la notion de dimension, qui décrit le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire ; on insistera sur les méthodes de calcul de dimension et on fera apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentation : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires.*

En petite dimension, l'intuition géométrique permet d'interpréter les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension au cas général : on en tirera parti par de nombreuses figures.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tout développement théorique sur les espaces de dimension infinie est hors programme.

A - Espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel. Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	Notation $\text{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant les x_i contient $\text{Vect}(x_i)_{i\in I}$.
c) Familles finies de vecteurs	
Famille génératrice. Famille libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$.
d) Somme de deux sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces. Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

B - Espaces de dimension finie

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie. Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\dots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\dots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\text{rg}(x_1,\dots,x_n)$.
c) Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann. Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires. Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	

C - Applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	Notation $\operatorname{Im} u$.
Noyau d'une application linéaire.	Notation $\operatorname{Ker} u$. Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$.	
Application linéaire de rang fini.	Notation $\operatorname{rg}(u)$.
Le rang de $v \circ u$ est majoré par $\min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.	
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties.	Notations id_E, id.
Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition.	Notation u^k pour $u \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \operatorname{id}$.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\operatorname{GL}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme. Notation u^k pour $u \in \operatorname{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
c) Détermination d'une application linéaire lorsque E est de dimension finie	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E de dimension finie et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.	
Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.	
Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie.	La démonstration peut être traitée plus tard, à l'aide de la dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Théorème du rang	
Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$. Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $n = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg}(u)$.	
e) Équations linéaires	
Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $a \in F$. L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit de la forme $x_0 + \operatorname{Ker} u$.	Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques.
f) Formes linéaires et hyperplans en dimension finie	
Forme linéaire.	
Hyperplan.	Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$.	

Matrices et déterminants

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *présenter les liens entre applications linéaires et matrices, de manière à exploiter les changements de registres (géométrique, numérique, formel) ;*
- *étudier l'effet d'un changement de bases sur la représentation matricielle d'une application linéaire et d'un vecteur ;*
- *introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;*
- *établir les principales propriétés des déterminants des endomorphismes et des matrices carrées, et indiquer quelques méthodes simples de calcul.*

A - Matrices et applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base. Isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases. Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	Exemple : matrice d'une rotation vectorielle du plan, d'une homothétie.
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes. Matrice de la réciproque d'un isomorphisme.
b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	On identifie ici $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.
Noyau, image et rang d'une matrice. Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n. Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau. Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Lien entre les diverses notions de rang.

Contenus	Capacités & Commentaires
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application : calcul du rang.
Invariance du rang par transposition.	Ce résultat est admis.

c) Changements de bases

Matrice de passage d'une base à une autre. Inversibilité et inverse d'une matrice de passage. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur. Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme. Matrices semblables.	Exemples de recherche d' une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple. Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.

d) Systèmes linéaires

Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions. Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A.	
Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

B - Déterminants

Contenus	Capacités & commentaires
a) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base	
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et si e est une base de E, il existe une unique application $\det_e : E^n \to \mathbb{K}$ linéaire par rapport à chaque variable, alternée, et vérifiant $\det_e(e) = 1$. Si $f : E^n \to \mathbb{K}$ est linéaire par rapport à chaque variable, alternée, alors elle est un multiple de $\det_e$.	La démonstration de ce théorème et la notion générale de forme multilinéaire sont hors programme.
En dimension 2 et 3, expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.	Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).
Comparaison, si e et e' sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$. La famille $(x_1,\dots,x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1,\dots,x_n) \neq 0$.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Déterminant d'un endomorphisme	
Déterminant d'un endomorphisme. Déterminant d'une composée.	Caractérisation des automorphismes.
c) Déterminant d'une matrice carrée	
Déterminant d'une matrice carrée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes.
Déterminant d'un produit.	Relation $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
Caractérisation des matrices inversibles. Déterminant de l'inverse.	
Déterminant d'une transposée.	La démonstration est hors programme.
d) Calcul des déterminants	
Effet des opérations élémentaires.	
Développement par rapport à une ligne ou une colonne.	La démonstration n'est pas exigible. La comatrice est hors programme.
Déterminant d'une matrice triangulaire.	

Intégration

Cette section a pour objectif d'établir les principales propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment de manière à achever la justification des propriétés présentées dans la section « Techniques fondamentales de calcul en analyse ». Elle offre l'occasion de revenir sur les techniques de calcul intégral, mais aussi de traiter des exercices d'esprit plus théorique.

Les méthodes de calcul approché d'intégrales donnent l'occasion de revenir sur la problématique de l'approximation. On pourra ainsi comparer les performances de la méthode des rectangles et de celle des trapèzes.

La construction de l'intégrale n'est pas un attendu du programme, mais les étudiants doivent avoir été sensibilisés à cette problématique.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions en escalier	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier. Intégrale d'une fonction en escalier.	Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
b) Intégrale d'une fonction continue sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Interprétation géométrique de l'intégrale. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale : $\left\|\int_{[a,b]} f\right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|$.	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.	
Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.	Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Sommes de Riemann	
Pour f continue sur le segment $[a,b]$, $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$	Interprétation géométrique. La démonstration pourra être proposée dans le cas où f est lipschitzienne.
d) Lien entre intégrale et primitive	
Dérivation de $x\mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.	
e) Inégalité de Taylor-Lagrange	
Inégalité de Taylor-Lagrange.	La formule de Taylor avec reste intégral n'est pas exigible. L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et l'inégalité de Taylor-Lagrange (globale).
f) Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{C}$. Linéarité, majoration du module de l'intégrale. Inégalité de Taylor-Lagrange.	Définition au moyen des parties réelle et imaginaire.

Dénombrement

Cette section est introduite essentiellement en vue de son utilisation en probabilités ; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique.

Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- *parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;*
- *l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\lvert A\rvert$, $\mathrm{Card}(A)$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	
Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	La formule du crible est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Probabilités

Cette section, qui a vocation à interagir avec l'ensemble du programme, a pour objectif de donner aux étudiants une bonne pratique des variables aléatoires dans le cadre fini.
Pour enrichir la pratique de la modélisation probabiliste développée au lycée, on met en évidence qu'une situation probabiliste finie peut être décrite par un n-uplet de variables aléatoires, l'univers étant vu dans cette optique comme une source suffisante d'aléa. L'objectif de cette présentation est de pouvoir travailler le plus tôt possible avec des événements construits en termes de variables aléatoires. La construction d'un univers fini susceptible de porter un n-uplet de variables aléatoires peut être présentée, mais ne constitue pas un objectif du programme.
Les exemples et activités proposés sont de nature plus conceptuelle qu'au lycée. On pourra faire travailler les étudiants sur des marches aléatoires ou des chaînes de Markov en temps fini, des graphes aléatoires, des inégalités de concentration…
Le programme de probabilités de première année s'achève sur une approche non asymptotique de la loi faible des grands nombres qui justifie l'approche fréquentiste des probabilités.

A - Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Univers, événements, variables aléatoires	
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).
Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.	Notations $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$.
b) Espaces probabilisés finis	
Probabilité sur un univers fini.	Espace probabilisé fini (Ω, P). Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leqslant x)$.
Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1.	Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.
Probabilité uniforme.	
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. L'application P_B est une probabilité.	
Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A\|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.
d) Loi d'une variable aléatoire	
Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans E.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x\in E}$. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Variable aléatoire $f(X)$.	Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E.	Notation $X \sim \mathscr{U}(E)$.
Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathscr{B}(p)$. Interprétation comme succès d'une expérience.
Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.
Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X=x, Y=y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
e) Événements indépendants	
Les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance. Extension au cas de n événements.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	
f) Variables aléatoires indépendantes	
Les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers Ω sont indépendantes si pour tout $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathscr{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de (X,Y) est donnée par $P\big((X,Y)=(x,y)\big) = P(X=x)P(Y=y)$.
Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.	Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes ayant chacune la probabilité p de succès.
Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ le sont aussi.	La démonstration est hors programme. Extension au cas de plus de deux coalitions.

B - Espérance et variance

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe	
Espérance $\mathrm{E}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} xP(X=x)$ d'une variable aléatoire X.	L'espérance est un indicateur de position. Formule $\mathrm{E}(X) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$. Variable aléatoire centrée.
Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.	
Espérance d'une variable constante, de Bernoulli, binomiale.	Exemple : $\mathrm{E}(\mathbb{1}_A) = P(A)$.
Formule de transfert : $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X=x)$.	On souligne que la formule de transfert s'applique en particulier aux couples et aux n-uplets.
Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.	Extension au cas de n variables aléatoires indépendantes.

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance	
Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle.	Variance et écart type sont des indicateurs de dispersion. Variable aléatoire réduite.
Relation $V(aX+b)=a^2V(X)$.	Si $\sigma(X)>0$, la variable $\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Relation $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$. Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.	
Covariance de deux variables aléatoires.	Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.
Relation $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$, cas de deux variables indépendantes.	
Variance d'une somme, cas de variables décorrélées.	On retrouve la variance d'une variable binomiale.
c) Inégalités probabilistes	
Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	Application à l'obtention d'inégalités de concentration. Application à une moyenne de variables indépendantes de même loi, interprétation fréquentiste.

Espaces préhilbertiens réels

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. L'objectif de cette section, qu'il est essentiel d'illustrer par de nombreuses figures, est de la généraliser, afin d'exploiter l'intuition acquise en dimension 2 ou 3 pour résoudre des problèmes posés dans un contexte plus abstrait.

Les familles de polynômes orthogonaux donnent des illustrations pertinentes des notions abordées dans cette section.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Produit scalaire	
Produit scalaire.	Notations $\langle x,y\rangle$, $(x\vert y)$, $x\cdot y$.
Espace préhilbertien, espace euclidien.	
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.	Expression $X^\top Y$.
Produit scalaire $\langle f,g\rangle=\int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.	Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.
b) Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.	Exemples : sommes finies, intégrales.
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
Identité remarquable $\Vert x+y\Vert^2=\Vert x\Vert^2+\Vert y\Vert^2+2\langle x,y\rangle$.	Formule de polarisation associée.
c) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.	Notation $X^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Bases orthonormées	
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	
e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F.	En dimension finie : dimension de $F^{\perp}$, vecteur normal à un hyperplan.
Distance d'un vecteur à F.	Notation $d(x,F)$.
Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	

Séries numériques

Cette section a pour but de prolonger l'étude des suites et de permettre d'appliquer les techniques d'analyse asymptotique pour étudier les séries numériques. La notion de suite sommable est introduite mais n'appelle aucun développement théorique.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Convergence et divergence	
Sommes partielles d'une série numérique. Convergence, divergence, somme.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Reste d'une série convergente.	
Lien suite-série.	La suite (u_n) et la série télescopique $\sum(u_{n+1}-u_n)$ sont de même nature.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.	
Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.	
b) Séries à termes positifs ou nuls	
Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0,+\infty]$.	On note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ si la série $\sum u_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ diverge.
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	
Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.	Application à l'étude de sommes partielles.
Séries de Riemann.	

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes, suites sommables	
Convergence absolue de la série numérique $\sum u_n$, encore appelée sommabilité de la suite (u_n).	Notation $\sum_{n=0}^{+\infty} \lvert u_n \rvert < +\infty$. Le critère de Cauchy et la notion de semi-convergence sont hors programme.
Une série numérique absolument convergente est convergente. Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.	Somme d'une suite sommable.

Fonctions de deux variables

Le but de cette section, dont le contenu sera entièrement repris dans un cadre plus général en seconde année, est de familiariser les étudiants avec les calculs sur les dérivées partielles, notamment avec la « règle de la chaîne », et de développer une vision géométrique des fonctions de deux variables. Le point de vue est donc essentiellement pratique. Toute extension et tout développement théorique supplémentaire sont hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonctions continues	
Boules de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne canonique. Ouverts. Continuité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Représentation graphique d'une fonction de deux variables par une surface. La notion de continuité est introduite uniquement en vue du calcul différentiel. L'étude de la continuité d'une fonction n'est pas un objectif du programme.
b) Dérivées partielles	
Dérivées partielles en un point d'une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notations $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité.
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert.	Définition par la continuité des dérivées partielles. La notion de fonction différentiable est hors programme.
Développement limité à l'ordre 1 au point (x_0, y_0) d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$: $$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\lVert(h,k)\rVert).$$	Démonstration hors programme. On met en évidence l'idée de l'approximation linéaire de $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ et l'interprétation de $$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$ comme équation du plan tangent en (x_0, y_0) à la surface d'équation $z = f(x, y)$.
Gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Expression du développement limité à l'aide du gradient.	Notation $\nabla f(x_0, y_0)$. Le gradient de f en (x_0, y_0) définit la direction dans laquelle f croît le plus vite.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Dérivées partielles et composées	
Dérivée selon un vecteur. Règle de la chaîne : les fonctions considérées étant de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(x(t), y(t))\big) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$ Sous les hypothèses appropriées, dérivées partielles de $(u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$.	Expression à l'aide du gradient $\langle \nabla f(x_0, y_0), u\rangle$. Interprétation comme dérivée de f le long d'un arc γ donné par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et expression à l'aide du gradient $$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$$ où $\gamma'(t)$ est défini par $(x'(t), y'(t))$. Le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f.
d) Extremums	
Maximum et minimum, local ou global d'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$. Point critique. Tout extremum local d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est un point critique.	Exemples d'étude de points critiques.

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Physique, chimie et sciences de l'ingénieur (PCSI)

Annexe 2
Programme de physique

Programme de physique de la voie PCSI

Préambule

Objectifs de formation

Le programme de physique de la classe de PCSI est conçu comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités scientifiques préparant les étudiants à la deuxième année de classe préparatoire et, au-delà, à un cursus d'ingénieur, de chercheur ou d'enseignant. Il s'agit de renforcer chez l'étudiant les compétences déjà travaillées au lycée inhérentes à la pratique de la démarche scientifique : observer et s'approprier, analyser et modéliser, réaliser et valider, et enfin communiquer et valoriser ses résultats.

L'acquisition de ce socle par les étudiants constitue un objectif prioritaire pour l'enseignant.
Parce que la physique est avant tout une science expérimentale qui développe la curiosité, la créativité et l'analyse critique, l'expérience est au cœur de son enseignement, que ce soit en cours ou lors des séances de travaux pratiques. Les activités expérimentales habituent les étudiants à se confronter au réel, comme ils auront à le faire dans l'exercice de leur métier.

De même, l'introduction de capacités numériques dans le programme prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation. Elles offrent aux étudiants la possibilité d'effectuer une modélisation avancée du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires.

La démarche de modélisation occupe également une place centrale dans le programme pour former les étudiants à établir, de manière autonome, un lien fait d'allers-retours entre le « monde » des objets, des expériences, des faits, et celui des modèles et des théories. L'enseignant doit rechercher un point d'équilibre entre des approches complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative. La construction d'un modèle passe aussi par l'utilisation maîtrisée des mathématiques dont un des fondateurs de la physique expérimentale, Galilée, énonçait déjà qu'elles sont le langage dans lequel est écrit le monde.

Enfin, l'autonomie et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à exercer les étudiants à mobiliser de façon complémentaire connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Organisation du programme

Le programme est organisé en deux parties.

Dans la première partie, intitulée **« Formation expérimentale »,** sont décrits les objectifs de formation sur le thème « Mesures et incertitudes » ainsi que les méthodes et les capacités expérimentales que les étudiants doivent maîtriser à la fin de l'année scolaire. Leur mise en œuvre doit notamment s'appuyer sur des problématiques concrètes identifiées en gras dans la seconde partie du programme intitulée « **Contenus thématiques** ». Elles doivent être programmées par l'enseignant de façon à assurer un apprentissage progressif de l'ensemble des capacités attendues.

La seconde partie, intitulée « **Contenus thématiques »** est structurée autour de trois thèmes : « ondes et signaux », « mouvements et interactions » et « l'énergie : conversions et transferts ». La présentation en deux colonnes (« notions et contenus » et « capacités exigibles ») met en valeur les éléments clefs constituant le socle de connaissances et de capacités dont l'assimilation par tous les étudiants est

requise. La progression dans les contenus disciplinaires est organisée en deux semestres. Pour faciliter la progressivité des acquisitions, au premier semestre les grandeurs physiques introduites sont essentiellement des grandeurs scalaires dépendant du temps et éventuellement d'une variable d'espace.
Certains items de cette seconde partie**, identifiés en caractères gras**, se prêtent particulièrement à une approche expérimentale. Ils doivent être abordés en priorité lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant doivent être privilégiées. La présence de capacités numériques explicitées atteste par ailleurs de la volonté de renforcer ce volet de la formation des étudiants.

Trois annexes sont consacrées d'une part au matériel nécessaire à la mise en œuvre des programmes, d'autre part aux outils mathématiques et aux outils numériques que les étudiants doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de physique à la fin de l'année de la classe de PCSI.

Ce programme précise les objectifs de formation à atteindre pour tous les étudiants. Il n'impose en aucun cas une progression pour chacun des deux semestres ; celle-ci relève de la liberté pédagogique de l'enseignant.

Les compétences travaillées dans le cadre de la démarche scientifique

L'ensemble des activités proposées en classe préparatoire aux grandes écoles – activités expérimentales, résolutions de problèmes, TIPE, etc. – permet de travailler les compétences de la démarche scientifique qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences. L'ordre de présentation de ces compétences ne préjuge pas d'un ordre de mobilisation de ces dernières lors d'une activité.

Les compétences doivent être acquises à l'issue de la formation en CPGE. Elles nécessitent d'être régulièrement mobilisées par les étudiants et sont évaluées en s'appuyant, par exemple, sur l'utilisation de grilles d'évaluation.

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier	- Rechercher, extraire et organiser l'information en lien avec la situation étudiée. - Identifier la complémentarité d'informations présentées sous des formes différentes (texte, graphe, tableau, etc.). - Énoncer ou dégager une problématique scientifique. - Représenter la situation par un schéma modèle. - Identifier les grandeurs pertinentes, leur attribuer un symbole. - Relier le problème à une situation modèle connue. - Acquérir de nouvelles connaissances en autonomie.
Analyser/ Raisonner	- Formuler des hypothèses. - Décomposer un problème en plusieurs problèmes plus simples. - Proposer une stratégie pour répondre à une problématique. - Choisir, concevoir, justifier un protocole, un dispositif expérimental, un modèle ou des lois physiques. - Évaluer des ordres de grandeur. - Identifier les idées essentielles d'un document et leurs articulations. - Relier qualitativement ou quantitativement différents éléments d'un ou de documents.

Réaliser	- Mettre en œuvre les étapes d'une démarche, un protocole, un modèle. - Extraire une information d'un texte, d'un graphe, d'un tableau, d'un schéma, d'une photo. - Schématiser un dispositif, une expérience, une méthode de mesure. - Utiliser le matériel et les produits de manière adaptée en respectant des règles de sécurité. - Effectuer des représentations graphiques à partir de données. - Mener des calculs analytiques ou à l'aide d'un langage de programmation, effectuer des applications numériques. - Conduire une analyse dimensionnelle.
Valider	- Exploiter des observations, des mesures en estimant les incertitudes. - Confronter les résultats d'un modèle à des résultats expérimentaux, à des données figurant dans un document, à ses connaissances. - Confirmer ou infirmer une hypothèse, une information. - Analyser les résultats de manière critique. - Repérer les points faibles d'une argumentation (contradiction, partialité, incomplétude, etc.). - Proposer des améliorations de la démarche ou du modèle.
Communiquer	- À l'écrit comme à l'oral : o présenter les étapes de sa démarche de manière synthétique, organisée et cohérente. o rédiger une synthèse, une analyse, une argumentation. o utiliser un vocabulaire scientifique précis et choisir des modes de représentation adaptés (schémas, graphes, cartes mentales, etc.). - Écouter, confronter son point de vue.

Le niveau de maîtrise de ces compétences dépend de **l'autonomie et de l'initiative** requises dans les activités proposées aux étudiants sur les notions et capacités exigibles du programme.
La mise en œuvre des programmes doit aussi être l'occasion d'aborder avec les étudiants des questions liées à l'histoire de l'évolution des idées, des modèles et des théories en physique-chimie, à des questions liées à la recherche scientifique actuelle et à des enjeux citoyens comme la responsabilité individuelle et collective, la **sécurité** pour soi et pour autrui, l'**environnement** et le **développement durable** ou encore le **réchauffement climatique**.

Repères pour l'enseignement

Dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant organise son enseignement en respectant trois grands principes directeurs :

- privilégier la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances, des capacités et des compétences est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Les supports pédagogiques utilisés doivent notamment favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie des étudiants. L'investigation expérimentale et la résolution de problèmes favorisent cette mise en activité ;
- recourir à la mise en contexte des contenus scientifiques : le questionnement scientifique peut être introduit à partir de phénomènes naturels, de procédés industriels ou d'objets technologiques. Le recours à des approches documentaires est un moyen pertinent pour diversifier les supports d'accès à l'information scientifique et technologique et ainsi former l'étudiant à mieux en appréhender la complexité et à apprendre par lui-même. Lorsque le thème

traité s'y prête, l'enseignant peut le mettre en perspective avec l'histoire des sciences et des techniques, avec des questions d'actualité ou des débats d'idées ;
- contribuer à la nécessaire mise en cohérence des enseignements scientifiques ; la progression en physique doit être articulée avec celles mises en œuvre dans les autres disciplines scientifiques : chimie, mathématiques, informatique, sciences industrielles de l'ingénieur.

Concernant l'évaluation, qui vise à mesurer le degré de maîtrise du socle ainsi défini et le niveau d'autonomie et d'initiative des étudiants, l'enseignant veille soigneusement à identifier les compétences et les capacités mobilisées dans les activités proposées afin d'en élargir le plus possible le spectre.

Enfin, le professeur veille aussi à développer chez les étudiants des compétences transversales et préprofessionnelles relatives aux capacités suivantes :
- identifier les différents champs professionnels et les parcours pour y accéder ;
- valoriser ses compétences scientifiques et techniques en lien avec son projet de poursuite d'études ou professionnel.

Formation expérimentale

Cette partie est spécifiquement dédiée à la mise en œuvre de la formation expérimentale des étudiants lors des séances de travaux pratiques.

Dans un premier temps, elle précise les connaissances et savoir-faire qui doivent être acquis dans le domaine de la mesure et de l'évaluation des incertitudes. Elle présente ensuite de façon détaillée l'ensemble des capacités expérimentales qui doivent être acquises en autonomie par les étudiants à l'issue de leur première année de CPGE. Enfin, elle aborde la question de la prévention du risque au laboratoire de physique-chimie.

Une liste de matériel, que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice succincte, figure dans l'annexe 1 du présent programme.

1. Mesures et incertitudes

Les notions et capacités identifiées ci-dessous couvrent les deux années de formation en classe préparatoire aux grandes écoles ; leur pleine maîtrise est donc un objectif de fin de seconde année. Elles sont communes aux enseignements de physique et de chimie et leur apprentissage s'effectue de manière coordonnée entre les enseignants.
L'accent est mis sur la variabilité de la mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type. La comparaison entre deux valeurs mesurées d'une même grandeur physique est conduite au moyen de l'écart normalisé, l'objectif principal étant de développer l'esprit critique des étudiants en s'appuyant sur un critère quantitatif. Le même esprit prévaut dans l'analyse des résultats d'une régression linéaire qui ne saurait s'appuyer sur l'exploitation non raisonnée du coefficient de corrélation (R^2).
Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
Incertitudes-types composées.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

2. Mesures et capacités expérimentales

Cette partie présente l'ensemble des capacités expérimentales que les étudiants doivent acquérir au cours de l'année durant les séances de travaux pratiques. Une séance de travaux pratiques s'articule autour d'une problématique, que les thèmes – repérés en gras dans la colonne « capacités exigibles »

de la partie « **Contenus thématiques** » du programme – peuvent servir à définir. Le travail de ces capacités et leur consolidation se poursuit en seconde année.

Dans le tableau ci-dessous, les différentes capacités à acquérir sont groupées par domaines thématiques ou transversaux. Cela ne signifie pas qu'une activité expérimentale se limite à un seul domaine. La capacité à former une image de bonne qualité, par exemple, peut être mobilisée au cours d'une expérience de mécanique ou de thermodynamique, cette transversalité de la formation devant être un moyen, entre d'autres, de favoriser l'autonomie et la prise d'initiative.

Nature et méthodes	Capacités exigibles
1. Mesures de longueurs et d'angles Longueurs : sur un banc d'optique.	Mettre en œuvre une mesure de longueur par déplacement d'un viseur entre deux positions.
Longueurs : à partir d'une photo ou d'une vidéo.	Évaluer, par comparaison à un étalon, une longueur (ou les coordonnées d'une position) sur une image numérique et en estimer la précision.
Angles : avec un goniomètre.	Utiliser un viseur à frontale fixe, une lunette autocollimatrice. Utiliser des vis micrométriques et un réticule.
Longueurs d'onde.	Étudier un spectre à l'aide d'un spectromètre à fibre optique. Mesurer une longueur d'onde optique à l'aide d'un goniomètre à réseau. Mesurer une longueur d'onde acoustique à l'aide d'un support gradué et d'un oscilloscope bicourbe.
2. Mesures de temps et de fréquences Fréquence ou période : - mesure directe au fréquencemètre numérique, à l'oscilloscope ou *via* une carte d'acquisition ; - mesure indirecte : par comparaison avec une fréquence connue voisine, en réalisant des battements.	Mettre en œuvre une méthode directe ou indirecte de mesure de fréquence ou de période.
Analyse spectrale.	Choisir de façon cohérente la fréquence d'échantillonnage et la durée totale d'acquisition. Effectuer l'analyse spectrale d'un signal périodique à l'aide d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition.
Décalage temporel/déphasage à l'aide d'un oscilloscope numérique.	Reconnaître une avance ou un retard de phase. Passer d'un décalage temporel à un déphasage et inversement. Repérer précisément le passage par un déphasage de 0 ou π en mode XY.

3. Électricité Mesurer une tension : - mesure directe au voltmètre numérique ou à l'oscilloscope numérique. Mesurer l'intensité d'un courant : - mesure directe à l'ampèremètre numérique ; - mesure indirecte à l'oscilloscope aux bornes d'une résistance adaptée. Mesurer une résistance ou une impédance : - mesure directe à l'ohmmètre/capacimètre ; - mesure indirecte à l'oscilloscope ou au voltmètre sur un diviseur de tension.	Capacités communes à l'ensemble des mesures électriques : - expliquer le lien entre résolution, calibre, nombre de points de mesure ; - préciser la perturbation induite par l'appareil de mesure sur le montage et ses limites (bande passante, résistance d'entrée) ; - définir la nature de la mesure effectuée (valeur efficace, valeur moyenne, amplitude, valeur crête à crête, etc.).
Caractériser un dipôle quelconque.	Visualiser la caractéristique d'un capteur à l'aide d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition.
Produire un signal électrique analogique périodique simple à l'aide d'un GBF.	Obtenir un signal de valeur moyenne, de forme, d'amplitude et de fréquence données.
Agir sur un signal électrique à l'aide des fonctions simples suivantes : ○ isolation, amplification, filtrage ; ○ sommation, intégration.	Gérer, dans un circuit électronique, les contraintes liées à la liaison entre les masses. Mettre en œuvre les fonctions de base de l'électronique réalisées par des blocs dont la structure ne fait pas l'objet d'une étude spécifique. Associer ces fonctions de base pour réaliser une fonction complexe en gérant les contraintes liées aux impédances d'entrée et/ou de sortie des blocs.
4. Optique Former une image.	Éclairer un objet de manière adaptée. Choisir une ou plusieurs lentilles en fonction des contraintes expérimentales, et choisir leur focale de façon raisonnée. Optimiser la qualité d'une image (alignement, limitation des aberrations, etc.). Estimer une valeur approchée d'une distance focale.
Créer ou repérer une direction de référence.	Régler et mettre en œuvre une lunette autocollimatrice et un collimateur.
Analyser une image numérique.	Acquérir (webcam, appareil photo numérique, etc.) l'image d'un phénomène physique sous forme numérique, et l'exploiter à l'aide d'un logiciel pour conduire l'étude d'un phénomène.
5. Mécanique Mesurer une masse, un moment d'inertie.	Utiliser une balance de précision. Repérer la position d'un centre de masse et mesurer un moment d'inertie à partir d'une période et de l'application de la loi d'Huygens fournie.

Visualiser et décomposer un mouvement.	Mettre en œuvre une méthode de stroboscopie. Enregistrer un phénomène à l'aide d'une caméra numérique et repérer la trajectoire à l'aide d'un logiciel dédié, en déduire la vitesse et l'accélération.
Mesurer une accélération.	Mettre en œuvre un accéléromètre, par exemple avec l'aide d'un microcontrôleur.
Quantifier une action.	Utiliser un dynamomètre.
6. Thermodynamique Mesurer une pression.	Mettre en œuvre un capteur, en identifiant son caractère différentiel ou absolu.
Mesurer une température.	Mettre en œuvre un capteur de température, par exemple avec l'aide d'un microcontrôleur. Mettre en œuvre un capteur infrarouge. Choisir le capteur en fonction de ses caractéristiques (linéarité, sensibilité, gamme de fonctionnement, temps de réponse), et du type de mesures à effectuer.
Effectuer des bilans d'énergie.	Mettre en œuvre une technique de calorimétrie.

3. Prévention du risque au laboratoire de physique

L'apprentissage et le respect des règles de sécurité électrique, optique et celles liées à la pression et à la température permettent aux étudiants de prévenir et de minimiser les risques. Futurs ingénieurs, chercheurs, enseignants, ils doivent être sensibilisés au respect de la législation et à l'impact de leur activité sur l'environnement.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Prévention des risques au laboratoire	Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire. Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.
- **Risque électrique**	Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation d'appareils électriques.
- **Risque optique**	Utiliser les sources laser et les diodes électroluminescentes de manière adaptée.
- **Risques liés à la pression et à la température**	Adopter une attitude responsable lors de manipulations de corps chauds ou de dispositifs engageant des hautes ou des basses pressions.

Contenus thématiques

L'organisation des semestres est la suivante.

Premier semestre

Thème 1 : ondes et signaux (1)

1.1. Formation des images
1.2. Signaux électriques dans l'ARQS
1.3. Circuit linéaire du premier ordre
1.4. Oscillateurs libres et forcés
1.5. Filtrage linéaire
1.6. Propagation d'un signal

Thème 2 : mouvements et interactions (1)

2.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point
2.2. Lois de Newton
2.3. Approche énergétique du mouvement d'un point matériel
2.4. Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétostatique, uniformes et stationnaires

Deuxième semestre

Thème 2 : mouvements et interactions (2)

2.5. Moment cinétique
2.6. Mouvements dans un champ de force centrale conservatif
2.7. Mouvement d'un solide

Thème 3 : l'énergie : conversions et transferts

3.1. Descriptions microscopique et macroscopique d'un système à l'équilibre
3.2. Énergie échangée par un système au cours d'une transformation
3.3. Premier principe. Bilans d'énergie
3.4. Deuxième principe. Bilans d'entropie
3.5. Machines thermiques
3.6. Statique des fluides dans un référentiel galiléen

Thème 1 : ondes et signaux (2)

1.7. Induction et forces de Laplace
- 1.7.1. Champ magnétique
- 1.7.2. Actions d'un champ magnétique
- 1.7.3. Lois de l'induction
- 1.7.4. Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps
- 1.7.5. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

1.8. Introduction à la physique quantique

A. Premier semestre

Thème 1 : ondes et signaux (1)

La partie **1.1. « Formation des images »** traite de la formation des images et propose une ouverture sur la notion de guidage de la lumière par une fibre optique. Cette partie est l'occasion d'interroger le concept de modèle en physique et d'en identifier les limites de validité. Elle permet également d'aborder de nombreuses applications technologiques ; certaines sont précisées par le programme, d'autres sont laissées à l'appréciation des enseignants (lunette, microscope, optique d'un smartphone, etc.). L'approche expérimentale doit être privilégiée dans ce domaine de la physique qui s'y prête particulièrement bien.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.1. Formation des images	
Sources lumineuses Modèle de la source ponctuelle monochromatique. Spectre.	Caractériser une source lumineuse par son spectre. Relier la longueur d'onde dans le vide et la couleur.
Modèle de l'optique géométrique Modèle de l'optique géométrique. Notion de rayon lumineux. Indice d'un milieu transparent.	Définir le modèle de l'optique géométrique. Indiquer les limites du modèle de l'optique géométrique.
Réflexion, réfraction. Lois de Snell-Descartes.	Établir la condition de réflexion totale.
Conditions de l'approximation de Gauss et applications Stigmatisme. Miroir plan.	Construire l'image d'un objet par un miroir plan.
Conditions de l'approximation de Gauss.	Énoncer les conditions de l'approximation de Gauss et ses conséquences. Relier le stigmatisme approché aux caractéristiques d'un détecteur.
Lentilles minces dans l'approximation de Gauss.	Définir les propriétés du centre optique, des foyers principaux et secondaires, de la distance focale, de la vergence. Construire l'image d'un objet situé à distance finie ou infinie à l'aide de rayons lumineux, identifier sa nature réelle ou virtuelle. Exploiter les formules de conjugaison et de grandissement transversal de Descartes et de Newton. Établir et utiliser la condition de formation de l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergente.
Modèles de quelques dispositifs optiques L'œil. Punctum proximum, punctum remotum.	Modéliser l'œil comme l'association d'une lentille de vergence variable et d'un capteur plan fixe. Citer les ordres de grandeur de la limite de résolution angulaire et de la plage d'accommodation.
L'appareil photographique.	Modéliser l'appareil photographique comme l'association d'une lentille et d'un capteur. Construire géométriquement la profondeur de champ pour un réglage donné. **Étudier l'influence de la focale, de la durée d'exposition, du diaphragme sur la formation de l'image.**
La fibre optique à saut d'indice.	Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre à saut d'indice.
Système optique à plusieurs lentilles.	**Modéliser, à l'aide de plusieurs lentilles, un dispositif optique d'utilisation courante.**

La partie **1.2.** « **Signaux électriques dans l'ARQS** » pose les bases nécessaires à l'étude des circuits dans l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS). Si le programme se concentre sur l'étude des dipôles R, L et C, il est possible, lors des travaux pratiques, de faire appel à des composants intégrés ou non linéaires (filtres à capacité commutée, échantillonneur-bloqueur, diodes, photorésistances, etc.) dès lors qu'aucune connaissance préalable n'est nécessaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.2. Signaux électriques dans l'ARQS	
Charge électrique, intensité du courant. Potentiel, référence de potentiel, tension. Puissance.	Justifier que l'utilisation de grandeurs électriques continues est compatible avec la quantification de la charge électrique. Exprimer l'intensité du courant électrique en termes de débit de charge. Exprimer la condition d'application de l'ARQS en fonction de la taille du circuit et de la fréquence. Relier la loi des nœuds au postulat de la conservation de la charge. Utiliser la loi des mailles. Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur. Citer les ordres de grandeur des intensités et des tensions dans différents domaines d'application.
Dipôles : résistances, condensateurs, bobines, sources décrites par un modèle linéaire.	Utiliser les relations entre l'intensité et la tension. Citer des ordres de grandeurs des composants R, L, C. Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance. Exprimer l'énergie stockée dans un condensateur ou une bobine. Modéliser une source en utilisant la représentation de Thévenin.
Association de deux résistances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux résistances par une résistance équivalente. Établir et exploiter les relations des diviseurs de tension ou de courant.
Résistance de sortie, résistance d'entrée.	**Évaluer une résistance d'entrée ou de sortie à l'aide d'une notice ou d'un appareil afin d'appréhender les conséquences de leurs valeurs sur le fonctionnement d'un circuit.** **Étudier l'influence des résistances d'entrée ou de sortie sur le signal délivré par un GBF, sur la mesure effectuée par un oscilloscope ou un multimètre.**
Caractéristique d'un dipôle. Point de fonctionnement.	**Étudier la caractéristique d'un dipôle pouvant être non-linéaire et mettre en œuvre un capteur dans un dispositif expérimental.**

Les deux parties **1.3.** « **Circuit linéaire du premier ordre** » et **1.4.** « **Oscillateurs libres et forcés** » abordent l'étude des circuits linéaires du premier et du second ordre en régime libre puis forcé. Il s'agit avant tout de comprendre les principes des méthodes mises en œuvre et leur exploitation pour étudier le comportement d'un signal traversant un système linéaire. Le choix a été fait de présenter simultanément les oscillateurs électriques et mécaniques de manière à mettre l'accent sur les analogies formelles et comportementales.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.3. Circuit linéaire du premier ordre	
Régime libre, réponse à un échelon de tension.	Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension. Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine. Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles. Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. **Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un circuit linéaire du premier ordre et analyser ses caractéristiques. Confronter les résultats expérimentaux aux expressions théoriques.** Capacité numérique : mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.4. Oscillateurs libres et forces	
Oscillateur harmonique. Exemples du circuit LC et de l'oscillateur mécanique.	Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales. Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation. Réaliser un bilan énergétique.

Circuit RLC série et oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux.	Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité. Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité. **Mettre en évidence la similitude des comportements des oscillateurs mécanique et électronique.** **Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un système linéaire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.**
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.
Impédances complexes.	Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.
Association de deux impédances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale. Résonance.	Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé. Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité. Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental visant à caractériser un phénomène de résonance.** **Mettre en œuvre une démarche expérimentale visant à caractériser des régimes transitoires du premier ou du second ordre (flash, sismomètre, etc.).**

L'objectif principal de la partie **1.5.** « **Filtrage linéaire** » n'est pas de former les étudiants aux aspects techniques des calculs des fonctions de transfert et des tracés de diagrammes de Bode mais de mettre l'accent sur l'interprétation des propriétés du signal de sortie connaissant celles du signal d'entrée et d'appréhender le rôle central de la linéarité des systèmes utilisés. Cette partie se termine par l'introduction de l'amplificateur linéaire intégré (ALI) idéal et en régime linéaire ; celle-ci doit être perçue comme une découverte et ne pas donner lieu à des dérives calculatoires.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.5. Filtrage linéaire	
Signaux périodiques.	Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales. Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal. Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal. Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.
Fonction de transfert harmonique. Diagramme de Bode.	Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1. Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique. Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'utilité des fonctions de transfert pour un système linéaire à un ou plusieurs étages.**
Modèles de filtres passifs : passe-bas et passe-haut d'ordre 1, passe-bas et passe-bande d'ordre 2.	Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges. Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyenneur, intégrateur, ou dérivateur. Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée. Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.). **Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale.** **Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.** Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.

Filtres actifs en électronique. Modèle de l'ALI idéal en régime linéaire.	Identifier la présence d'une rétroaction sur la borne inverseuse comme un indice de fonctionnement en régime linéaire. Établir la relation entrée-sortie des montages non inverseur, suiveur, inverseur, intégrateur. Déterminer les impédances d'entrée de ces montages. **Mettre en œuvre un filtre actif.**

Dans la partie **1.6.** consacrée à la « **Propagation d'un signal** », il est recommandé de s'appuyer sur une approche expérimentale ou sur des logiciels de simulation pour permettre aux étudiants de faire le lien entre l'observation de signaux qui se propagent et la traduction mathématique de cette propagation, sans qu'aucune référence ne soit faite à une équation d'onde. L'étude de la somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence et du phénomène d'interférences associé permet de mettre en évidence le rôle essentiel joué par le déphasage entre les deux signaux dans le signal résultant. L'étude des interférences lumineuses est l'occasion d'introduire la notion de différence de chemin optique et de la relier au déphasage. Les ondes stationnaires permettent d'illustrer le rôle des conditions aux limites dans l'apparition de modes propres.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
1.6. Propagation d'un signal	
Exemples de signaux. Signal sinusoïdal.	Identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux acoustiques, électriques, électromagnétiques.
Approche qualitative de la superposition de deux signaux sinusoïdaux de fréquences voisines. Battements.	**Déterminer une différence de fréquences à partir d'enregistrements de battements ou d'observation sensorielle directe.**
Propagation d'un signal dans un milieu illimité, non dispersif et transparent Onde progressive dans le cas d'une propagation unidimensionnelle non dispersive. Célérité, retard temporel.	Écrire les signaux sous la forme f(x-ct) ou g(x+ct). Écrire les signaux sous la forme f(t-x/c) ou g(t+x/c). Prévoir, dans le cas d'une onde progressive, l'évolution temporelle à position fixée et l'évolution spatiale à différents instants.
Modèle de l'onde progressive sinusoïdale unidimensionnelle. Vitesse de phase, déphasage, double périodicité spatiale et temporelle.	Citer quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines acoustique, mécanique et électromagnétique. Établir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la vitesse de phase. Relier le déphasage entre les signaux perçus en deux points distincts au retard dû à la propagation. **Mesurer la vitesse de phase, la longueur d'onde et le déphasage dû à la propagation d'un phénomène ondulatoire.**
Milieux dispersifs ou non dispersifs.	Définir un milieu dispersif.

	Citer des exemples de situations de propagation dispersive et non dispersive.
Phénomène d'interférences Interférences entre deux ondes acoustiques ou mécaniques de même fréquence.	Exprimer les conditions d'interférences constructives ou destructives. Déterminer l'amplitude de l'onde résultante en un point en fonction du déphasage. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental pour visualiser et caractériser le phénomène d'interférences de deux ondes.**
Interférences entre deux ondes lumineuses de même fréquence. Exemple du dispositif des trous d'Young éclairé par une source monochromatique. Différence de chemin optique. Conditions d'interférences constructives ou destructives. Formule de Fresnel.	Relier le déphasage entre les deux ondes à la différence de chemin optique. Établir l'expression littérale de la différence de chemin optique entre les deux ondes. Exploiter la formule de Fresnel fournie pour décrire la répartition d'intensité lumineuse. **Mettre en œuvre le dispositif expérimental des trous d'Young avec une acquisition numérique d'image.**
Ondes stationnaires mécaniques Modes propres.	Caractériser une onde stationnaire par l'existence de nœuds et de ventres. Exprimer les fréquences des modes propres connaissant la célérité et la longueur de la corde. Utiliser la propriété énonçant qu'une vibration quelconque d'une corde accrochée entre deux extrémités fixes se décompose en modes propres. Relier les notions sur les ondes stationnaires avec celles utilisées en musique. **Décrire une onde stationnaire observée par stroboscopie sur la corde de Melde.** **Mettre en œuvre un dispositif expérimental permettant d'analyser le spectre du signal acoustique produit par une corde vibrante.**

Thème 2 : mouvements et interactions (1)

La partie **2.1 « Description et paramétrage du mouvement d'un point »** vise notamment à mettre en place les principaux systèmes de coordonnées : cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques. Le but est de permettre aux étudiants de disposer d'outils efficaces pour décrire une grande variété de mouvements de points. Pour atteindre cet objectif, il convient de les familiariser progressivement avec les projections et dérivations de vecteurs ainsi qu'avec l'algébrisation des grandeurs dans un contexte relevant de la physique. Enfin, cette partie est l'occasion de procéder à des analyses qualitatives des comportements cinématiques de systèmes réels assimilés à un point, notamment sur les exemples simples des mouvements rectilignes et circulaires.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point	
Repérage dans l'espace et dans le temps Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.	Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
Cinématique du point Description du mouvement d'un point. Vecteurs position, vitesse et accélération. Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.	Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques. Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.
	Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.
Mouvement à vecteur accélération constant.	Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
Mouvement circulaire uniforme et non uniforme.	Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.
Repérage d'un point dont la trajectoire est connue. Vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour une trajectoire plane.	Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle. **Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs vitesse et accélération.**

Dans la partie **2.2.** intitulée « **Lois de Newton »**, on cherche d'abord à renforcer les compétences des étudiants relatives à la mise en équations d'un problème, qu'il s'agisse des étapes de bilans de forces ou de projection de la deuxième loi de Newton sur la base choisie. On cherche par ailleurs, sur l'exemple de quelques mouvements simples, à renforcer les compétences d'analyse qualitative d'une équation différentielle : stabilité des solutions, positions d'équilibre, type d'évolution, durée ou période typique d'évolution, etc. Cette pratique s'articule avec l'utilisation d'un langage de programmation pour résoudre des équations différentielles. Enfin, il s'agit aussi de confronter les étudiants aux limites de validité de certains modèles de forces, et ainsi de donner toute leur importance aux étapes de modélisation et de validation d'un modèle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.2. Lois de Newton	
Quantité de mouvement Masse d'un système. Conservation de la masse pour système fermé.	Exploiter la conservation de la masse pour un système fermé.
Quantité de mouvement d'un point et d'un système de points. Lien avec la vitesse du centre de masse d'un système fermé.	Établir l'expression de la quantité de mouvement pour un système de deux points sous la forme : $\mathbf{p}=m\mathbf{v}(G)$.
Première loi de Newton : principe d'inertie. Référentiels galiléens.	Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.
Notion de force. Troisième loi de Newton.	Établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.
Deuxième loi de Newton. Théorème de la quantité de mouvement.	Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre de masse d'un système fermé dans un référentiel galiléen. **Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant d'étudier une loi de force.**
Force de gravitation. Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète. Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme.	Etudier le mouvement d'un système modélisé par un point matériel dans un champ de pesanteur uniforme en l'absence de frottement.
Modèles d'une force de frottement fluide. Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute.	Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique. Écrire une équation adimensionnée. **Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure de frottements fluides.**
Modèle linéaire de l'élasticité d'un matériau.	Modéliser un comportement élastique par une loi de force linéaire ; extraire une constante de raideur et une longueur à vide à partir de données mesurées ou fournies. Analyser la limite d'une modélisation linéaire à partir de documents expérimentaux. **Mettre en œuvre un microcontrôleur lors d'un test de traction.**
Tension d'un fil. Pendule simple.	Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.
Modèle des lois de frottement de glissement : lois de Coulomb.	Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider.

La partie **2.3. « Approche énergétique du mouvement d'un point matériel** » vise à construire une démarche alternative et complémentaire pour l'étude d'une situation relevant de la mécanique – et plus généralement de la physique – fondée sur la conservation de certaines grandeurs – ici, l'énergie mécanique. Cette approche est l'occasion d'illustrer la capacité prédictive des analyses graphiques et numériques, par exemple pour pouvoir décrire un comportement à partir d'une représentation graphique de l'énergie potentielle dans le cas d'un mouvement conservatif.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.3. Approche énergétique du mouvement d'un point matériel	
Puissance, travail et énergie cinétique Puissance et travail d'une force dans un référentiel.	Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.
Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen, dans le cas d'un système modélisé par un point matériel.	Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.
Champ de force conservative et énergie potentielle Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle. Gradient.	Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique. Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie. Déduire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.
Énergie mécanique Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif.	Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.
Mouvement conservatif à une dimension.	Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
Positions d'équilibre. Stabilité.	Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.
Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.	Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non-linéaire et faire apparaître l'effet des termes non-linéaires.

La partie **2.4.** « **Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétostatique, uniformes et stationnaires »** introduit l'expression de la force de Lorentz ainsi que deux situations de base sur lesquelles les étudiants doivent être autonomes dans la résolution, attestant en cela de l'acquisition d'une certaine aisance à ce stade de leur formation. Des situations physiques variées sont en capacité d'illustrer concrètement cette partie qui ne doit pas se réduire à des développements calculatoires ou des illustrations graphiques.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
2.4. Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétostatique, uniformes et stationnaires	
Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle ; champs électrique et magnétique.	Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.
Puissance de la force de Lorentz.	Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.	Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant. Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la valeur de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétostatique.	Déterminer le rayon de la trajectoire et le sens de parcours.

B. Second semestre

Thème 2 : mouvements et interactions (2)

Au second semestre, le thème « **Mouvements et interactions** » est structuré en trois parties : moment cinétique, mouvements dans un champ de force centrale conservatif et mouvement d'un solide. L'accent est porté sur les lois conservation du moment cinétique, de l'énergie mécanique et de la quantité de mouvement comme outils d'étude des mouvements.

La partie **2.5.** « **Moment cinétique** » est l'occasion d'introduire les notions de moment cinétique et de moment d'une force. L'un des objectifs visés est que les étudiants disposent de représentations concrètes qui permettent de donner du sens aux grandeurs vectorielles et scalaires utilisées ; c'est notamment pour cela que le bras de levier est introduit. Comme souligné précédemment, l'accent est mis sur l'identification des situations où le moment cinétique est conservé.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
2.5. Moment cinétique	
Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté.	Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.
Moment cinétique d'un système discret de points par rapport à un axe orienté.	Utiliser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.

Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté.	Exprimer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.
Théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen. Conservation du moment cinétique.	Identifier les cas de conservation du moment cinétique.

La partie **2.6. « Mouvements dans un champ de force centrale conservatif »** est notamment motivée par ses nombreuses applications possibles. On discute la nature de la trajectoire sur un graphe donnant l'énergie potentielle effective et, dans le cas d'un champ newtonien (lois de Kepler), on ne poursuit l'étude que dans le cas d'une trajectoire circulaire. Le caractère elliptique des trajectoires associées à un état lié est affirmé sans qu'aucune étude géométrique des ellipses ne soit prévue ; on utilise dans ce cas les constantes du mouvement (moment cinétique et énergie mécanique) pour exprimer l'énergie de la trajectoire elliptique en fonction du demi-grand axe.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
2.6. Mouvements dans un champ de force centrale conservatif	
Point matériel soumis à un champ de force centrale.	Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique. Établir les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.
Point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif Conservation de l'énergie mécanique. Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.	Exprimer l'énergie mécanique d'un système conservatif ponctuel à partir de l'équation du mouvement. Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective. Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique. <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, obtenir des trajectoires d'un point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif.
Cas particulier du champ newtonien Lois de Kepler.	Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.
Cas particulier du mouvement circulaire : satellite, planète.	Établir que le mouvement est uniforme et déterminer sa période. Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.
Énergie mécanique dans le cas du mouvement circulaire et dans le cas du mouvement elliptique.	Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire. Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.

Satellites terrestres Satellites géostationnaire, de localisation et de navigation, météorologique.	Différencier les orbites des satellites terrestres en fonction de leurs missions. Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.
Vitesses cosmiques : vitesse en orbite basse et vitesse de libération.	Exprimer ces vitesses et citer leur ordre de grandeur en dynamique terrestre.

Concernant le solide en rotation autour d'un axe fixe dans la partie **2.7. « Mouvement d'un solide »**, il s'agit de définir le mouvement en remarquant que tout point du solide décrit un cercle autour de l'axe avec une même vitesse angulaire et de déterminer la vitesse de chaque point en fonction de celle-ci et de la distance à l'axe de rotation.
Des exemples de dynamique du solide sont introduits (translation et rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen), avec toutefois des limitations strictes : l'étude générale d'un mouvement composé d'une translation dans un référentiel galiléen et d'une rotation autour d'un axe fixe dans le référentiel barycentrique ne figure pas au programme. L'étude du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe gardant une direction fixe dans un référentiel galiléen mais pour lequel l'axe de rotation est en mouvement est exclue. Cette partie se termine par l'étude d'un système déformable pour souligner le rôle des forces intérieures dans le bilan énergétique d'un système.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.7. Mouvement d'un solide	
Description du mouvement d'un solide dans deux cas particuliers Définition d'un solide.	Différencier un solide d'un système déformable.
Translation.	Reconnaître et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire.
Rotation autour d'un axe fixe.	Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide mobile autour d'un axe fixe Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe : moment d'inertie.	Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni. Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
Couple.	Définir un couple.
Liaison pivot.	Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	Exploiter le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.
Pendule de torsion.	Établir l'équation du mouvement. Établir une intégrale première du mouvement.

Pendule pesant.	Établir l'équation du mouvement. Établir une intégrale première du mouvement. **Réaliser l'étude énergétique d'un pendule pesant et mettre en évidence une diminution de l'énergie mécanique.** Capacité numérique **:** à l'aide d'un langage de programmation, mettre en évidence le non isochronisme des oscillations.
Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté, dans un référentiel galiléen Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.
Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Établir, dans ce cas, l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.
Système déformable Théorème de l'énergie cinétique pour un système déformable.	Prendre en compte le travail des forces intérieures. Utiliser sa nullité dans le cas d'un solide. **Conduire le bilan énergétique du tabouret d'inertie.**

Thème 3 : l'énergie : conversions et transferts

Après avoir mis l'accent sur le passage fondamental d'une réalité microscopique à des grandeurs mesurables macroscopiques, cette partie propose, en s'appuyant sur des exemples concrets, de poursuivre la description et l'étude de la matière à l'échelle macroscopique, et d'aborder les deux principes fondamentaux de la thermodynamique. Les capacités identifiées doivent être introduites en s'appuyant dès que possible sur des dispositifs expérimentaux qui permettent ainsi leur acquisition progressive et authentique.

On utilise les notations suivantes : pour une grandeur extensive « A », « a » sera la grandeur massique associée et « A_m » la grandeur molaire associée.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.1. Descriptions microscopique et macroscopique d'un système à l'équilibre	
Échelles microscopique, mésoscopique, et macroscopique. Libre parcours moyen.	Définir l'échelle mésoscopique et en expliquer la nécessité. Citer quelques ordres de grandeur de libres parcours moyens.
État microscopique et état macroscopique.	Préciser les paramètres nécessaires à la description d'un état microscopique et d'un état macroscopique sur un exemple.

Distribution des vitesses moléculaires d'un gaz (homogénéité et isotropie). Vitesse quadratique moyenne. Pression cinétique.	Utiliser un modèle unidirectionnel avec une distribution discrète de vitesse pour montrer que la pression est proportionnelle à la masse des particules, à la densité particulaire et au carré de la vitesse quadratique moyenne.
Température cinétique. Exemple du gaz parfait monoatomique : $E_c=3/2kT$.	Calculer l'ordre de grandeur d'une vitesse quadratique moyenne dans un gaz parfait.
Système thermodynamique.	Identifier un système ouvert, un système fermé, un système isolé.
État d'équilibre d'un système soumis aux seules forces de pression. Pression, température, volume, équation d'état. Grandeur extensive, grandeur intensive. Exemples du gaz parfait et d'une phase condensée indilatable et incompressible.	Calculer une pression à partir d'une condition d'équilibre mécanique. Déduire une température d'une condition d'équilibre thermique. Citer quelques ordres de grandeur de volumes molaires ou massiques dans les conditions usuelles de pression et de température. Citer et utiliser l'équation d'état des gaz parfaits.
Énergie interne d'un système. Capacité thermique à volume constant dans le cas du gaz parfait.	Exprimer l'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique à partir de l'interprétation microscopique de la température. Exploiter la propriété $U_m=U_m(T)$ pour un gaz parfait.
Énergie interne et capacité thermique à volume constant d'une phase condensée considérée incompressible et indilatable.	Exploiter la propriété $U_m=U_m(T)$ pour une phase condensée incompressible et indilatable.
Approximation des phases condensées peu compressibles et peu dilatables.	Interpréter graphiquement la différence de compressibilité entre un liquide et un gaz à partir d'isothermes expérimentales.
Du gaz réel au gaz parfait. [2]	Comparer le comportement d'un gaz réel au modèle du gaz parfait sur des réseaux d'isothermes expérimentales en coordonnées de Clapeyron ou d'Amagat.
Corps pur diphasé en équilibre. Diagramme de phases (P,T). Cas de l'équilibre liquide-vapeur : diagramme de Clapeyron (P,v), titre en vapeur.	Analyser un diagramme de phase expérimental (P,T). Proposer un jeu de variables d'état suffisant pour caractériser l'état d'équilibre d'un corps pur diphasé soumis aux seules forces de pression. Positionner les phases dans les diagrammes (P,T) et (P,v). Déterminer la composition d'un mélange diphasé en un point d'un diagramme (P,v). **Mettre en œuvre un protocole expérimental d'étude des relations entre paramètres d'état d'un fluide à l'équilibre (corps pur monophasé ou sous deux phases).**
Équilibre liquide-vapeur de l'eau en présence d'une atmosphère inerte. Humidité relative.	Utiliser la notion de pression partielle pour étudier les conditions de l'équilibre liquide-vapeur en présence d'une atmosphère inerte.

	Identifier les conditions d'évaporation et de condensation.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.2. Énergie échangée par un système au cours d'une transformation	
Transformation thermodynamique subie par un système. Évolutions isochore, isotherme, isobare, monobare, monotherme.	Définir un système adapté à une problématique donnée. Exploiter les conditions imposées par le milieu extérieur pour déterminer l'état d'équilibre final.
Travail des forces de pression. Transformations isochore, monobare.	Évaluer un travail par découpage en travaux élémentaires et sommation sur un chemin donné dans le cas d'une seule variable. Interpréter géométriquement le travail des forces de pression dans un diagramme de Clapeyron.
Transferts thermiques. Transformation adiabatique. Thermostat, transformations monotherme et isotherme.	Distinguer qualitativement les trois types de transferts thermiques : conduction, convection et rayonnement. Identifier dans une situation expérimentale le ou les systèmes modélisables par un thermostat.

Concernant les bilans d'énergie abordés dans la partie **3.3.** « **Premier principe. Bilans d'énergie »**, les expressions des fonctions d'état $U_m(T,V_m)$ et $H_m(T,P)$ sont données si le système ne relève pas du modèle gaz parfait ou du modèle de la phase condensée incompressible et indilatable.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.3. Premier principe. Bilans d'énergie	
Premier principe de la thermodynamique.	Définir un système fermé et établir pour ce système un bilan énergétique faisant intervenir travail et transfert thermique. Utiliser le premier principe de la thermodynamique entre deux états voisins. Exploiter l'extensivité de l'énergie interne. Distinguer le statut de la variation de l'énergie interne du statut des termes d'échange. Calculer le transfert thermique sur un chemin donné connaissant le travail et la variation de l'énergie interne.
Enthalpie d'un système. Capacité thermique à pression constante dans le cas du gaz parfait et d'une phase condensée incompressible et indilatable.	Exprimer le premier principe sous forme de bilan d'enthalpie dans le cas d'une transformation monobare avec équilibre mécanique dans l'état initial et dans l'état final. Exprimer l'enthalpie $H_m(T)$ du gaz parfait à partir de l'énergie interne. Justifier que l'enthalpie H_m d'une phase condensée peu compressible et peu dilatable peut être considérée comme une fonction de l'unique variable T. Citer l'ordre de grandeur de la capacité thermique massique de l'eau liquide.

Enthalpie associée à une transition de phase : enthalpie de fusion, enthalpie de vaporisation, enthalpie de sublimation.	Exploiter l'extensivité de l'enthalpie et réaliser des bilans énergétiques en prenant en compte des transitions de phases. **Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure d'une grandeur thermodynamique énergétique (capacité thermique, enthalpie de fusion, etc.).**

Concernant la partie **3.4.** « **Deuxième principe. Bilans d'entropie** », l'expression de la fonction d'état entropie est systématiquement donnée et sa construction n'est pas une capacité visée. On cite sans aucun développement quantitatif son interprétation en termes de désordre statistique, de façon à faciliter une interprétation intuitive des bilans d'entropie.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.4. Deuxième principe. Bilans d'entropie	
Fonction d'état entropie.	Interpréter qualitativement l'entropie en termes de désordre statistique à l'aide de la formule de Boltzmann fournie.
Deuxième principe de la thermodynamique : entropie créée, entropie échangée. $\Delta S=S_{ech} + S_{créé}$ avec $S_{ech}=\Sigma Q_i/T_i$.	Définir un système fermé et établir pour ce système un bilan entropique. Relier la création d'entropie à une ou plusieurs causes physiques de l'irréversibilité. Analyser le cas particulier d'un système en évolution adiabatique.
Variation d'entropie d'un système.	Utiliser l'expression fournie de la fonction d'état entropie. Exploiter l'extensivité de l'entropie.
Loi de Laplace.	Citer et utiliser la loi de Laplace et ses conditions d'application.
Cas particulier d'une transition de phase.	Citer et utiliser la relation entre les variations d'entropie et d'enthalpie associées à une transition de phase : Δh_{12} (T)=T Δs_{12} (T)

Dans la partie **3.5.** « **Machines thermiques** », l'enseignement de la thermodynamique est orienté vers des applications industrielles réelles et motivantes.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.5. Machines thermiques	
Application du premier principe et du deuxième principe de la thermodynamique aux machines thermiques cycliques dithermes : rendement, efficacité, théorème de Carnot.	Donner le sens des échanges énergétiques pour un moteur ou un récepteur thermique ditherme. Analyser un dispositif concret et le modéliser par une machine cyclique ditherme. Définir un rendement ou une efficacité et les relier aux énergies échangées au cours d'un cycle. Justifier et utiliser le théorème de Carnot. Citer quelques ordres de grandeur des rendements des machines thermiques réelles actuelles. Expliquer le principe de la cogénération. **Mettre en œuvre une machine thermique cyclique ditherme.**

Cette partie, intitulée **3.6. « Statique des fluides dans un référentiel galiléen »,** est conçue pour introduire sur le support concret de la statique des fluides le principe du découpage d'un domaine physique (volume, surface) en éléments infinitésimaux et de la sommation d'une grandeur extensive (force) pour ce découpage.
Un des objectifs est de montrer dans cette partie l'intérêt d'un formalisme spécifique – utilisation de l'opérateur gradient – pour passer à une formulation universelle d'une loi de la physique.
La statique des fluides permet également d'introduire le facteur de Boltzmann dont on affirme la généralité.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
3.6. Statique des fluides dans un référentiel galiléen	
Forces surfaciques, forces volumiques.	Citer des exemples de forces surfaciques ou volumiques.
Résultante de forces de pression.	Exprimer une surface élémentaire dans un système de coordonnées adaptées. Utiliser les symétries pour déterminer la direction d'une résultante de forces de pression. Évaluer une résultante de forces de pression.
Équivalent volumique des forces de pression.	Exprimer l'équivalent volumique des forces de pression à l'aide d'un gradient.
Équation locale de la statique des fluides.	Établir l'équation locale de la statique des fluides.
Statique dans le champ de pesanteur uniforme : relation $dP/dz = -\rho g$.	Citer des ordres de grandeur des champs de pression dans le cas de l'océan et de l'atmosphère. Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible et homogène et dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, étudier les variations de température et de pression dans l'atmosphère.
Poussée d'Archimède.	Expliquer l'origine de la poussée d'Archimède. Exploiter la loi d'Archimède.
Facteur de Boltzmann.	S'appuyer sur la loi d'évolution de la densité moléculaire de l'air dans le cas de l'atmosphère isotherme pour illustrer la signification du facteur de Boltzmann. Utiliser kT comme référence des énergies mises en jeu à l'échelle microscopique.

Thème 1 : Onde et signaux (2)

La partie **1.7. « Induction et forces de Laplace »** s'appuie sur les nombreuses applications présentes dans notre environnement immédiat : boussole, moteur électrique, alternateur, transformateur, haut-parleur, plaques à induction, carte RFID... Il s'agit de restituer toute la richesse de ces applications dans un volume horaire modeste, ce qui limite les géométries envisagées et le formalisme utilisé. Le point de vue adopté cherche à mettre l'accent sur les phénomènes et sur la modélisation sommaire de leurs applications. Toute étude du champ électromoteur est exclue. L'induction et les forces de Laplace dans un circuit mobile sont introduites dans le cas d'un champ uniforme et stationnaire, soit dans le modèle des rails de Laplace, soit dans celui d'un cadre rectangulaire en rotation. Ce dernier modèle permet

d'introduire la notion de dipôle magnétique et une analogie de comportement permet de l'étendre au cas de l'aiguille d'une boussole.
Le succès de cet enseignement suppose le respect de ces limitations : il ne s'agit pas d'une étude générale des phénomènes d'induction. Corrélativement, l'enseignement de cette partie doit impérativement s'appuyer sur une démarche expérimentale authentique, qu'il s'agisse d'expériences de cours ou d'activités expérimentales.

La partie **1.7.1** « **Champ magnétique** » vise à relier le champ magnétique et ses sources ; l'accent est mis sur le concept de champ vectoriel, l'analyse des symétries et des invariances, l'exploitation des représentations graphiques et la connaissance d'ordres de grandeur.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.1. Champ magnétique	
Sources de champ magnétique ; cartes de champ magnétique.	Exploiter une représentation graphique d'un champ vectoriel, identifier les zones de champ uniforme, de champ faible et l'emplacement des sources. Tracer l'allure des cartes de champs magnétiques pour un aimant droit, une spire circulaire et une bobine longue. Décrire un dispositif permettant de réaliser un champ magnétique quasi uniforme. Citer des ordres de grandeur de champs magnétiques : au voisinage d'aimants, dans un appareil d'IRM, dans le cas du champ magnétique terrestre.
Symétries et invariances des distributions de courant.	Exploiter les propriétés de symétrie et d'invariance des sources pour prévoir des propriétés du champ créé.
Lien entre le champ magnétique et l'intensité du courant.	Évaluer l'ordre de grandeur d'un champ magnétique à partir d'expressions fournies.
Moment magnétique.	Définir le moment magnétique associé à une boucle de courant plane. Associer à un aimant un moment magnétique par analogie avec une boucle de courant. Citer un ordre de grandeur du moment magnétique associé à un aimant usuel.

Dans la partie **1.7.2** « **Actions d'un champ magnétique** », l'enseignant est libre d'introduire la force de Laplace avec ou sans référence à la force de Lorentz. Il s'agit ici de se doter d'expressions opérationnelles pour étudier le mouvement dans un champ uniforme et stationnaire (soit d'une barre en translation, soit d'un moment magnétique en rotation modélisé par un cadre rectangulaire).

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.2. Actions d'un champ magnétique	
Densité linéique de la force de Laplace dans le cas d'un élément de courant filiforme.	Différencier le champ magnétique extérieur subi du champ magnétique propre créé par le courant filiforme.
Résultante et puissance des forces de Laplace.	Établir et citer l'expression de la résultante des forces de Laplace dans le cas d'une barre conductrice placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire. Exprimer la puissance des forces de Laplace.

Couple et puissance des actions mécaniques de Laplace dans le cas d'une spire rectangulaire, parcourue par un courant, en rotation autour d'un axe de symétrie de la spire passant par les deux milieux de côtés opposés et placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire orthogonal à l'axe.	Établir et exploiter l'expression du moment du couple subi en fonction du champ magnétique extérieur et du moment magnétique. Exprimer la puissance des actions mécaniques de Laplace.
Action d'un champ magnétique extérieur uniforme sur un aimant. Positions d'équilibre et stabilité.	**Mettre en œuvre un dispositif expérimental pour étudier l'action d'un champ magnétique uniforme sur une boussole.**
Effet moteur d'un champ magnétique tournant.	**Créer un champ magnétique tournant à l'aide de deux ou trois bobines et mettre en rotation une aiguille aimantée.**

La partie **1.7.3** « **Lois de l'induction** » repose sur la loi de Faraday qui se prête parfaitement à une introduction expérimentale et qui constitue un bel exemple d'illustration de l'histoire des sciences. On évoque, à ce sujet, les différents points de vue possibles sur le même phénomène selon le référentiel dans lequel on se place.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.3. Lois de l'induction	
Flux d'un champ magnétique Flux d'un champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté.	Évaluer le flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan.
Loi de Faraday Courant induit par le déplacement relatif d'une boucle conductrice par rapport à un aimant ou un circuit inducteur. Sens du courant induit.	**Décrire, mettre en œuvre et interpréter des expériences illustrant les lois de Lenz et de Faraday.**
Loi de modération de Lenz.	Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.
Force électromotrice induite, loi de Faraday.	Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'algébrisation.

La partie **1.7.4** « **Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps** » aborde le phénomène d'auto-induction puis le couplage par mutuelle inductance entre deux circuits fixes. Elle traite du modèle du transformateur de tensions.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.4. Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps	
Auto-induction Flux propre et inductance propre.	Différencier le flux propre des flux extérieurs. Utiliser la loi de modération de Lenz. Évaluer et citer l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur. **Mesurer la valeur de l'inductance propre d'une bobine.**
Étude énergétique.	Réaliser un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.

Cas de deux bobines en interaction Inductance mutuelle entre deux bobines.	 Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en « influence totale ». **Mesurer la valeur de l'inductance mutuelle entre deux bobines et étudier l'influence de la géométrie.**
Circuits électriques à une maille couplés par le phénomène de mutuelle induction en régime sinusoïdal forcé.	Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante. Établir le système d'équations en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents.
Transformateur de tension.	Établir la loi des tensions.
Étude énergétique.	Réaliser un bilan de puissance et d'énergie.

La partie **1.7.5** « **Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire** » est centrée sur la conversion de puissance. Des situations géométriques simples permettent de dégager les paramètres physiques pertinents afin de modéliser le principe d'un moteur à courant continu ou un dispositif de freinage.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.5. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire	
Conversion de puissance mécanique en puissance électrique. Rail de Laplace. Spire rectangulaire soumise à un champ magnétique extérieur uniforme et en rotation uniforme autour d'un axe fixe orthogonal au champ magnétique.	 Interpréter qualitativement les phénomènes observés. Écrire les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe. Effectuer un bilan énergétique. Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante.
Freinage par induction.	Expliquer l'origine des courants de Foucault et en citer des exemples d'utilisation. **Mettre en évidence qualitativement les courants de Foucault.**
Conversion de puissance électrique en puissance mécanique Moteur à courant continu à entrefer plan.	 Analyser le fonctionnement du moteur à courant continu à entrefer plan en s'appuyant sur la configuration des rails de Laplace. Citer des exemples d'utilisation du moteur à courant continu.

La partie **1.8. « Introduction à la physique quantique »** est structurée autour de la présentation d'expériences réalisées depuis le début du XXème siècle. Cette partie vise à questionner la représentation classique du monde proposée dans les autres parties du programme. Les concepts essentiels abordés sont la dualité onde-particule, l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde, l'inégalité de Heisenberg spatiale et la quantification de l'énergie dans les atomes. La réflexion sur les thèmes abordés ici est avant tout qualitative ; toute dérive calculatoire exploitant les concepts propres à la physique quantique doit être évitée.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.8. Introduction à la physique quantique	
Dualité onde-particule pour la lumière et la matière Photon : énergie et impulsion.	Décrire un exemple d'expérience mettant en évidence la nécessité de la notion de photon.
Onde de matière associée à une particule. Relation de de Broglie.	Décrire un exemple d'expérience mettant en évidence le comportement ondulatoire de la matière. Évaluer des ordres de grandeurs typiques intervenant dans des phénomènes quantiques.
Introduction au formalisme quantique Fonction d'onde : introduction qualitative, interprétation probabiliste.	Interpréter une expérience d'interférences (matière ou lumière) « particule par particule » en termes probabilistes.
Inégalité de Heisenberg spatiale.	Établir par analogie avec la diffraction des ondes lumineuses, l'inégalité en ordre de grandeur : $\Delta p \, \Delta x \geq \hbar$.
Quantification de l'énergie Modèle planétaire de Bohr. Limites.	Exploiter l'hypothèse de quantification du moment cinétique orbital pour obtenir l'expression des niveaux d'énergie électronique de l'atome d'hydrogène.
Modèle du puits de potentiel unidimensionnel de profondeur infinie.	Exploiter l'inégalité de Heisenberg spatiale pour mettre en évidence l'existence d'une énergie minimale de confinement. Obtenir les niveaux d'énergie par analogie avec les modes propres d'une corde vibrante. Établir le lien qualitatif entre confinement spatial et quantification.

Annexe 1 : matériel

La liste ci-dessous regroupe le matériel que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice simplifiée fournie sous forme de version papier ou numérique. Une utilisation de matériel hors de cette liste lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'une introduction guidée suffisamment détaillée.

1. Domaine optique

- Goniomètre
- Viseur à frontale fixe
- Lunette auto-collimatrice
- Spectromètre à fibre optique
- Laser à gaz
- Lampes spectrales
- Source de lumière blanche à condenseur

2. Domaine électrique

- Oscilloscope numérique
- Carte d'acquisition et logiciel dédié

- Générateur de signaux Basse Fréquence
- Multimètre numérique
- Multiplieur analogique
- Émetteur et récepteur acoustique (domaine audible et domaine ultrasonore)
- Microcontrôleur

3. Domaines mécanique et thermodynamique

- Dynamomètre
- Capteur de pression
- Accéléromètre
- Stroboscope
- Webcam avec logiciel dédié
- Appareil photo numérique ou caméra numérique
- Thermomètre, thermocouple, thermistance, capteur infra-rouge
- Calorimètre
- Machines thermiques dithermes

Annexe 2 : outils mathématiques

L'utilisation d'outils mathématiques est indispensable en physique comme en chimie.
La capacité à mettre en œuvre de manière autonome certains de ces outils mathématiques dans le cadre des activités relevant de la physique-chimie fait partie des compétences exigibles à la fin de la première année. Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que le niveau de maîtrise attendu en fin de première année. Il est complété dans le programme de seconde année.
Cependant les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité sont traitées à l'aide d'outils numériques (calculatrices, logiciels de calcul numérique).

Outils mathématiques	Capacités exigibles
1. Équations algébriques	
Systèmes linéaires de n équations à p inconnues.	Identifier les variables (inconnues) nécessaires à la modélisation du problème sous forme d'un système d'équations linéaires. Donner l'expression formelle des solutions dans le seul cas n = p = 2.
Équations non linéaires.	Représenter graphiquement une équation de la forme f(x) = g(x). Interpréter graphiquement la ou les solutions.
2. Équations différentielles	
Équations différentielles linéaires à coefficients constants.	Identifier l'ordre. Mettre l'équation sous forme canonique.
Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants : y' + ay = f(x).	Trouver la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène). Trouver l'expression des solutions lorsque f(x) est constante ou de la forme A.cos(ωx+φ) (en utilisant la notation complexe).
Équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants : y'' + ay' + by = f(x).	Utiliser l'équation caractéristique pour trouver la solution générale de l'équation sans second membre. Prévoir le caractère borné ou non de ses solutions (critère de stabilité).

	Trouver l'expression des solutions lorsque f(x) est constante ou de la forme A.exp(λx) avec λ complexe. Trouver la solution de l'équation complète correspondant à des conditions initiales données. Représenter graphiquement cette solution.
Autres équations différentielles d'ordre 1 ou 2.	Obtenir une intégrale première d'une équation de Newton x'' = f(x) et l'exploiter graphiquement. Séparer les variables d'une équation du premier ordre à variables séparables. Faire le lien entre les conditions initiales et le graphe de la solution correspondante.
3. Fonctions	
Fonctions usuelles.	Exponentielle, logarithme népérien et décimal, cosinus, sinus, tangente, puissance réelle ($x \rightarrow x^a$).
Dérivée. Notation dx/dt.	Utiliser la formule de Taylor à l'ordre un ou deux ; interpréter graphiquement.
Développements limités.	Connaître et utiliser les développements limités à l'ordre 1 des fonctions $(1 + x)^{\alpha}$, e^x et ln(1 + x), et à l'ordre 2 des fonctions cos(x) et sin(x).
Primitive et intégrale.	Interpréter l'intégrale comme une somme de contributions infinitésimales, en lien avec la méthode des rectangles en mathématiques.
Valeur moyenne.	Exprimer la valeur moyenne sous forme d'une intégrale. Connaître la valeur moyenne sur une période des fonctions cos, sin, $\cos^2$ et $\sin^2$.
Représentation graphique d'une fonction.	Déterminer un comportement asymptotique ; rechercher un extremum local. Utiliser des échelles logarithmiques ; identifier une loi de puissance à une droite en échelle log-log.
Développement en série de Fourier d'une fonction périodique.	Utiliser un développement en série de Fourier fourni par un formulaire.
4. Géométrie	
Vecteurs et système de coordonnées.	Exprimer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Utiliser les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
Projection d'un vecteur et produit scalaire.	Interpréter géométriquement le produit scalaire et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée. Utiliser la bilinéarité et le caractère symétrique du produit scalaire.
Produit vectoriel.	Interpréter géométriquement le produit vectoriel et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée directe. Utiliser la bilinéarité et le caractère antisymétrique du produit vectoriel. Faire le lien avec l'orientation des trièdres.

Transformations géométriques.	Utiliser les symétries par rapport à un plan, les translations et les rotations de l'espace. Utiliser leur effet sur l'orientation de l'espace.
Courbes planes.	Reconnaître l'équation cartésienne d'une droite, d'un cercle. Utiliser la représentation polaire d'une courbe plane ; utiliser un grapheur pour obtenir son tracé.
Courbes planes paramétrées.	Identifier une ellipse à l'aide de sa représentation paramétrique ($x = a.\cos(\omega t)$, $y = b.\cos(\omega t-\varphi)$) et la tracer dans les cas particuliers $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ et $\varphi = \pi$.
Longueurs, aires et volumes classiques.	Citer les expressions du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'une sphère, du volume d'une boule, du volume d'un cylindre.
Barycentre d'un système de points.	Énoncer la définition du barycentre. Utiliser son associativité. Exploiter les symétries pour prévoir la position du barycentre d'un système homogène.
5. Trigonométrie	
Angle orienté.	Définir une convention d'orientation des angles d'un plan (euclidien) et lire des angles orientés. Relier l'orientation d'un axe de rotation à l'orientation positive des angles d'un plan perpendiculaire à cet axe.
Fonctions cosinus, sinus et tangente.	Utiliser le cercle trigonométrique et l'interprétation géométrique des fonctions cosinus, sinus et tangente comme aide-mémoire : relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, relations entre fonctions trigonométriques et toutes relations du type $\cos(\pi \pm x)$ et $\cos(\pi/2 \pm x)$, parités, périodicité, valeurs des fonctions pour les angles usuels. Citer les formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus ; utiliser un formulaire dans les autres cas.
Nombres complexes et représentation dans le plan. Somme et produit de nombres complexes.	Calculer et interpréter géométriquement la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument d'un nombre complexe.
6. Analyse vectorielle	
Gradient d'un champ scalaire.	Citer le lien entre le gradient et la différentielle. Citer l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles. Citer l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes ; utiliser un formulaire fourni en coordonnées cylindriques ou sphériques. Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.

Annexe 3 : outils numériques

La prise en compte de capacités de codage en langage Python dans la formation des étudiants inclue l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques. Elle vise à une meilleure appréhension des principes mis en œuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par

ailleurs toujours recommandée. Elle a aussi pour objectif de mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la physique. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la physique comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.
Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que les capacités exigibles en fin de première année. Il sera complété dans le programme de physique de seconde année.

Domaines numériques	Capacités exigibles
1. Outils graphiques	
Représentation graphique d'un nuage de points.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **matplotlib** pour représenter un nuage de points.
Représentation graphique d'une fonction.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **matplotlib** pour tracer la courbe représentative d'une fonction.
Courbes planes paramétrées.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **matplotlib** pour tracer une courbe plane paramétrée.
2. Équations algébriques	
Résolution d'une équation algébrique ou d'une équation transcendante : méthode dichotomique.	Déterminer, en s'appuyant sur une représentation graphique, un intervalle adapté à la recherche numérique d'une racine par une méthode dichotomique. Mettre en œuvre une méthode dichotomique afin de résoudre une équation avec une précision donnée. Utiliser la fonction **bisect** de la bibliothèque **scipy.optimize** (sa spécification étant fournie).
3. Intégration – Dérivation	
Calcul approché d'une intégrale sur un segment par la méthode des rectangles.	Mettre en œuvre la méthode des rectangles pour calculer une valeur approchée d'une intégrale sur un segment.
Calcul approché du nombre dérivé d'une fonction en un point.	Utiliser un schéma numérique pour déterminer une valeur approchée du nombre dérivé d'une fonction en un point.
4. Équations différentielles	
Équations différentielles d'ordre 1.	Mettre en œuvre la méthode d'Euler explicite afin de résoudre une équation différentielle d'ordre 1.
Équations différentielles d'ordre supérieur ou égal à 2	Transformer une équation différentielle d'ordre n en un système différentiel de n équations d'ordre 1. Utiliser la fonction **odeint** de la bibliothèque **scipy.integrate** (sa spécification étant fournie).
5. Probabilité - statistiques	
Variable aléatoire.	Utiliser les fonctions de base des bibliothèques **random** et/ou **numpy** (leurs spécifications étant fournies) pour réaliser des tirages d'une variable aléatoire. Utiliser la fonction **hist** de la bibliothèque **matplotlib.pyplot** (sa spécification étant fournie)

	pour représenter les résultats d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire. Déterminer la moyenne et l'écart-type d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire.
Régression linéaire.	Utiliser la fonction **polyfit** de la bibliothèque **numpy** (sa spécification étant fournie) pour exploiter des données. Utiliser la fonction **random.normal** de la bibliothèque **numpy** (sa spécification étant fournie) pour simuler un processus aléatoire.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Physique, chimie et sciences de l'ingénieur (PCSI)

Annexe 3
Programme de chimie

Programme de Chimie de la voie PCSI

Préambule

Objectifs de formation

Le programme de chimie de la classe de PCSI est conçu comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités scientifiques préparant les étudiant·es à la deuxième année de classe préparatoire et, au-delà, à un cursus d'ingénieur·e, de chercheur·se, d'enseignant·e ou de scientifique. Il s'agit de renforcer chez l'étudiant·e les compétences déjà travaillées au lycée inhérentes à la pratique de la démarche scientifique : observer et s'approprier, analyser et modéliser, réaliser et valider, et enfin communiquer et valoriser ses résultats. L'acquisition de ce socle par les étudiant·es constitue un objectif prioritaire pour l'enseignant·e.

Parce que la chimie est avant tout une science expérimentale qui développe la curiosité, la créativité et l'analyse critique, l'expérience est au cœur de son enseignement, que ce soit en cours ou lors des séances de travaux pratiques. Les activités expérimentales habituent les étudiant·es à se confronter au réel, comme ils auront à le faire dans l'exercice de leur métier d'ingénieur·e, de chercheur·se ou de scientifique.

De même, l'introduction de capacités numériques dans le programme prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques, notamment dans le domaine de la simulation. Ces sciences offrent aujourd'hui aux étudiant·es la possibilité de modélisations numériques complexes, permettant de décrire plus finement le monde réel.

Afin justement de pouvoir élaborer des modèles en prise avec la réalité, les étudiant·es doivent apprendre à établir, de manière autonome, un lien fait d'allers-retours entre le « monde » des objets, des expériences, des faits et celui des concepts et des théories. La démarche de modélisation occupe donc une place centrale dans le programme et l'enseignant·e doit rechercher un point d'équilibre entre des approches complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative.

La construction d'un modèle passe par l'utilisation maîtrisée des mathématiques dont un des fondateurs de la physique expérimentale, Galilée, énonçait déjà qu'elles sont le langage dans lequel est écrit le monde.

Enfin, l'autonomie de l'étudiant·e et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à apprendre à mobiliser connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Organisation du programme

Le programme est organisé en deux parties.
Dans la première partie, intitulée **« Formation expérimentale »,** sont décrits les objectifs de formation sur le thème « Mesures et incertitudes » ainsi que les méthodes et les capacités expérimentales que les étudiant·es doivent maîtriser à la fin de l'année scolaire. Leur mise en œuvre doit notamment s'appuyer sur des problématiques concrètes identifiées en gras dans la seconde partie du programme intitulée « **Contenus thématiques** ». Elles doivent être programmées par l'enseignant·e de façon à assurer un apprentissage progressif de l'ensemble des capacités attendues.

La seconde partie, intitulée « **Contenus thématiques »** est structurée autour de chapitres portant sur les transformations de la matière d'une part et la structure et les propriétés physiques et chimiques de la matière d'autre part, des modélisations macroscopiques et microscopiques venant rendre compte des

phénomènes de plus en plus précisément. La présentation en deux colonnes « notions et contenus » et « capacités exigibles » met en valeur les éléments clefs constituant le socle de connaissances et de capacités dont l'assimilation par tout·es les étudiant·es est requise. La progression dans les contenus disciplinaires est organisée en deux semestres. Pour faciliter la progressivité des acquisitions, des reprises sont effectuées en enrichissant les descriptions ; par exemple, les transformations sont essentiellement modélisées macroscopiquement au premier semestre, puis progressivement des descriptions microscopiques sont envisagées et enfin un dialogue entre les deux niveaux de description macroscopique-microscopique est engagé.
Certains items de cette seconde partie**, identifiés en caractères gras**, se prêtent particulièrement à une approche expérimentale. Ils doivent être abordés en priorité lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant·e doivent être privilégiées. La présence de capacités numériques explicitées atteste par ailleurs de la volonté de renforcer ce volet de la formation des étudiant·es ; l'annexe dédiée à cette composante en précise les objectifs.

Trois annexes sont consacrées d'une part au matériel nécessaire à la mise en œuvre des programmes, d'autre part aux outils mathématiques et aux outils numériques que les étudiant·es doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de chimie et de physique en fin de l'année de PCSI.

Ce programme précise les objectifs de formation à atteindre pour tou·tes les étudiant·es. Il n'impose en aucun cas une progression pour chacun des deux semestres ; celle-ci relève de la liberté pédagogique de l'enseignant·e.

Les compétences travaillées dans le cadre de la démarche scientifique

L'ensemble des activités proposées en classe préparatoire aux grandes écoles – activités expérimentales, résolutions de problèmes, TIPE, etc. – permet de travailler les compétences de la démarche scientifique qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences. L'ordre de présentation de ces compétences ne préjuge pas d'un ordre de mobilisation de ces dernières lors d'une activité.

Les compétences doivent être acquises à l'issue de la formation en CPGE. Elles nécessitent d'être régulièrement mobilisées par les étudiant·es et sont évaluées en s'appuyant, par exemple, sur l'utilisation de grilles d'évaluation.

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier	- Rechercher, extraire et organiser l'information en lien avec la situation étudiée. - Identifier la complémentarité d'informations présentées sous des formes différentes (texte, représentation graphique, tableau, etc.). - Énoncer ou dégager une problématique scientifique. - Représenter la situation par un schéma modèle. - Identifier les grandeurs pertinentes, leur attribuer un symbole. - Relier le problème à une situation modèle connue. - Acquérir de nouvelles connaissances en autonomie.
Analyser / Raisonner	- Formuler des hypothèses. - Décomposer un problème en plusieurs problèmes plus simples. - Proposer une stratégie pour répondre à une problématique. - Choisir, concevoir, justifier un protocole, un dispositif expérimental, un modèle ou des lois physiques. - Évaluer des ordres de grandeur. - Identifier les idées essentielles d'un document et leurs articulations.

	- Relier qualitativement ou quantitativement différents éléments d'un ou de documents.
Réaliser	- Mettre en œuvre les étapes d'une démarche, d'un protocole, d'un modèle. - Extraire une information d'un texte, d'une représentation graphique, d'un tableau, d'un schéma, d'une photo. - Schématiser un dispositif, une expérience, une méthode de mesure. - Utiliser le matériel et les produits de manière adaptée en respectant des règles de sécurité. - Effectuer des représentations graphiques à partir de données. - Mener des calculs analytiques ou à l'aide d'un langage de programmation, effectuer des applications numériques. - Conduire une analyse dimensionnelle.
Valider	- Exploiter des observations, des mesures en estimant les incertitudes. - Confronter les résultats d'un modèle à des résultats expérimentaux, à des données figurant dans un document, à ses connaissances. - Confirmer ou infirmer une hypothèse, une information. - Analyser les résultats de manière critique. - Repérer les points faibles d'une argumentation (contradiction, partialité, incomplétude, etc.). - Proposer des améliorations de la démarche ou du modèle.
Communiquer	- À l'écrit comme à l'oral : o présenter les étapes de sa démarche de manière synthétique, organisée et cohérente. o rédiger une synthèse, une analyse, une argumentation. o utiliser un vocabulaire scientifique précis et choisir des modes de représentation adaptés (schémas, représentations graphiques, cartes mentales, etc.). - Écouter, confronter son point de vue.

Le niveau de maîtrise de ces compétences dépend de **l'autonomie et de l'initiative** requises dans les activités proposées aux étudiant·es sur les notions et capacités exigibles du programme.
La mise en œuvre des programmes doit aussi être l'occasion d'aborder avec les étudiant·es des questions liées à la poursuite d'études scientifiques, à l'histoire de l'évolution des idées, des modèles et des théories en physique-chimie, à des questions liées à la recherche scientifique actuelle et à des enjeux citoyens comme par exemple la responsabilité individuelle et collective, la **sécurité** pour soi et pour autrui, l'éducation à l'**environnement** et au **développement durable**, le **réchauffement climatique**.

Repères pour l'enseignement

Dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant·e organise son enseignement en respectant trois grands principes directeurs :

- privilégier la mise en activité des étudiant·es en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances, des capacités et des compétences sera d'autant plus efficace que les étudiant·es seront acteurs de leur formation. Les supports pédagogiques utilisés doivent notamment favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie des étudiant·es. L'investigation expérimentale et la résolution de problèmes favorisent cette mise en activité ;
- recourir à la mise en contexte des contenus scientifiques : le questionnement scientifique peut être introduit à partir de phénomènes naturels, de procédés industriels ou d'objets technologiques. Le recours à des approches documentaires est un moyen pertinent pour diversifier les supports d'accès à l'information scientifique et technologique et ainsi former l'étudiant·e à mieux en appréhender la complexité et à apprendre par lui-même. Lorsque le

thème traité s'y prête, l'enseignant·e peut le mettre en perspective avec l'histoire des sciences et des techniques, avec des questions d'actualité ou des débats d'idées ;
- contribuer à la nécessaire mise en cohérence des enseignements scientifiques ; la progression en chimie doit être articulée avec celles mises en œuvre dans les autres disciplines scientifiques, physique, mathématiques, informatique, sciences industrielles de l'ingénieur.

Concernant l'évaluation, qui vise à mesurer le degré de maîtrise du socle ainsi défini et le niveau d'autonomie et d'initiative des étudiant·es, l'enseignant·e veillera soigneusement à identifier les compétences et les capacités mobilisées dans les activités proposées afin d'en élargir le plus possible le spectre.

Formation expérimentale

Cette partie, spécifiquement dédiée à la mise en œuvre de la formation expérimentale des étudiant·es lors des séances de travaux pratiques, vient compléter la liste des thèmes d'étude – en gras dans la partie « **Contenus thématiques** » – à partir desquels la problématique d'une séance peut être définie.
D'une part, elle précise les connaissances et savoir-faire qui doivent être acquis dans le domaine de la **mesure** et de l'évaluation des **incertitudes**. D'autre part, elle présente de façon détaillée l'ensemble des **capacités expérimentales** qui doivent être acquises et pratiquées en autonomie par les étudiant·es à l'issue de leur première année de CPGE.

Une liste de matériel, que les étudiant·es doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice succincte, figure dans une annexe du présent programme.

1. **Mesures et incertitudes**

Les notions et capacités identifiées ci-dessous couvrent les deux années de formation en classe préparatoire aux grandes écoles ; leur pleine maîtrise est donc un objectif de fin de seconde année. Elles sont communes aux enseignements de physique et de chimie et leur apprentissage s'effectue de manière coordonnée entre les enseignant·es.
L'accent est mis sur la variabilité de la mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type. La comparaison entre deux valeurs mesurées d'une même grandeur physique est conduite au moyen de l'écart normalisé, l'objectif principal étant de développer l'esprit critique des étudiant·es en s'appuyant sur un critère quantitatif. Le même esprit prévaut dans l'analyse des résultats d'une régression linéaire qui ne saurait s'appuyer sur l'exploitation non raisonnée du coefficient de corrélation (R^2).
Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de résultats expérimentaux, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.

Incertitudes-types composées.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. **Capacité numérique** : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de type Monte Carlo permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés. **Capacité numérique** : à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, simuler un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude type sur les paramètres du modèle.

2. **Mesures et capacités expérimentales**

Cette partie présente l'ensemble des capacités expérimentales que les étudiant·es doivent avoir acquises, durant les séances de travaux pratiques, à l'issue de la première année. Une séance de travaux pratiques s'articule autour d'une problématique, que les thèmes – repérés en gras dans le corps du programme – peuvent servir à définir.
Les capacités rassemblées ici ne constituent donc en aucun cas une liste de travaux pratiques qui s'organiseraient autour d'une découverte du matériel : par exemple, toutes les capacités mises en œuvre autour d'un appareil de mesure ne sauraient être l'objectif unique d'une séance, mais doivent au contraire faire l'objet d'un apprentissage progressif contextualisé où chaque élément apparaît naturellement à l'occasion de l'étude d'un problème concret.

Les différentes capacités à acquérir sont, pour plus de clarté, regroupées en quatre domaines en chimie, les deux premiers étant davantage transversaux :
2.1. Prévention du risque au laboratoire de chimie
2.2. Mesures de grandeurs physiques
2.3. Synthèses chimiques
2.4. Analyses qualitatives et quantitatives

Cette structuration ne constitue pas une incitation à limiter une activité expérimentale à un seul domaine. En effet, lors de la mise en œuvre d'une synthèse au laboratoire, il peut être utile de procéder à une analyse du produit formé ou à une mesure de grandeur physique caractéristique et, bien entendu, il est indispensable de prendre en compte les consignes de sécurité.
Par ailleurs, il convient de développer les compétences de la démarche scientifique et de favoriser l'autonomie et la prise d'initiative des étudiant·es lors des activités expérimentales.
Le matériel nécessaire à l'acquisition de l'ensemble des capacités ci-dessous figure en **Annexe 1** du programme.

2.1. Prévention du risque au laboratoire de chimie

Les étudiant·es doivent prendre conscience du risque lié à la manipulation, au rejet et au stockage des espèces chimiques. L'apprentissage et le respect des règles de sécurité leur permettent de prévenir et de minimiser ce risque. Futur·es ingénieur·es, chercheur·es, enseignant·es, il·elle·s doivent être sensibilisé·es au respect de la législation et à l'impact de leur activité sur l'environnement.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Prévention du risque chimique Règles de sécurité au laboratoire. Classes et catégories de danger. Pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques. Mentions de danger (H), conseils de prudence (P). Fiches de sécurité.	Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire. Relever les indications sur le risque associé au prélèvement, au mélange et au stockage des produits chimiques. Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.
Prévention de l'impact environnemental Traitement et rejet des espèces chimiques.	Adapter le mode d'élimination d'une espèce chimique ou d'un mélange en fonction des informations recueillies sur la toxicité ou les risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.

2.2. Mesures de grandeurs physiques

Notions et contenus	Capacités exigibles
Mesures de : - Volume - Masse - pH - Conductance et conductivité - Tension - Température - Pouvoir rotatoire - Indice de réfraction - Absorbance et transmittance	Sélectionner et utiliser le matériel adapté à la précision requise. Distinguer les instruments de verrerie *In* et *Ex*. Préparer une solution de concentration en masse ou en quantité de matière donnée à partir d'un solide, d'un liquide, d'une solution de composition connue avec le matériel approprié. Utiliser les méthodes et le matériel adéquats pour transférer l'intégralité du solide ou du liquide pesé. Utiliser les appareils de mesure (balance, pH-mètre, conductimètre, voltmètre, thermomètre, réfractomètre, spectrophotomètre, polarimètre) en s'appuyant sur une notice. Étalonner une chaîne de mesure.

2.3. Synthèses chimiques

Au cours de la première année, l'étudiant·e acquiert la maîtrise de différentes techniques mises en œuvre dans les synthèses et les fondements théoriques de ces techniques, en lien avec les propriétés physico-chimiques concernées. Progressivement, il·elle est invité·e à proposer des stratégies de transformation des réactifs, de séparation et de purification des produits synthétisés.

Les différentes techniques utilisées permettent de réaliser les opérations de :

- chauffage et refroidissement ;
- séparation et purification : extraction liquide-liquide ou liquide-solide, filtrations, séchage d'un liquide ou d'un solide, séparation avec usage de l'évaporateur rotatif, recristallisation.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Transformation chimique Transformations à chaud, à froid, à température ambiante. Contrôle et régulation de la température du milieu réactionnel.	Choisir la verrerie adaptée à la transformation réalisée et aux conditions opératoires mises en œuvre. Réaliser le ou les montages appropriés et en expliquer le principe et l'intérêt. Choisir ou justifier l'ordre d'introduction des réactifs. Réaliser et réguler une addition au goutte à goutte. Utiliser le moyen de chauffage ou de refroidissement adéquat. Suivre et contrôler l'évolution de la température dans le réacteur. Choisir un moyen approprié pour réguler une éventuelle ébullition. Utiliser un réfrigérant, contrôler et réguler le reflux.
Suivi de l'évolution de la transformation.	Mettre en œuvre des méthodes permettant de suivre qualitativement ou quantitativement l'avancement de la transformation.
Séparation et purification	Choisir ou justifier un protocole de séparation ou de purification d'un produit, sur la base de données fournies ou issues d'observations et/ou de mesures.
Séparation de deux liquides non miscibles.	Réaliser une extraction liquide-liquide. Identifier la nature des phases dans une ampoule à décanter. Distinguer extraction et lavage d'une phase.
Séparation de deux espèces dissoutes dans une phase liquide.	Élaborer et mettre en œuvre un protocole de séparation de deux espèces dissoutes dans une phase liquide.
Séparation d'un soluté du solvant. Séparation d'un liquide et d'un solide.	Expliquer l'intérêt de l'évaporateur rotatif. Réaliser et mettre en œuvre une filtration simple, une filtration sous pression réduite. Choisir et justifier la méthode de filtration adaptée au système étudié.
Lavage d'un solide.	Réaliser et justifier les différentes étapes du lavage d'un solide : ajout du solvant de lavage, trituration, essorage.

Recristallisation d'un solide.	Expliquer et mettre en œuvre la technique de recristallisation. Justifier à l'aide de données pertinentes et/ou par l'observation le choix d'un solvant de recristallisation et la quantité mise en œuvre.
Séchage d'un liquide.	Utiliser un desséchant solide et estimer correctement, par l'observation, la quantité à utiliser.

2.4. Analyses qualitatives et quantitatives

Au cours de la première année, l'étudiant·e acquiert la maîtrise de différentes techniques expérimentales mises en œuvre lors des analyses qualitatives et quantitatives pour caractériser une espèce chimique, en contrôler la pureté ou la doser. L'étudiant·e sait distinguer les méthodes d'analyse destructives et non destructives et développe progressivement la capacité à proposer une stratégie de mesures de concentrations ou de quantités de matière, une méthode de caractérisation d'une espèce chimique, tenant compte des propriétés physico-chimiques du système étudié.

Les techniques utilisées lors des analyses qualitatives et quantitatives sont les suivantes : pH-métrie, conductimétrie, potentiométrie à intensité nulle, spectrophotométrie UV-visible, polarimétrie, réfractométrie, chromatographie sur couche mince.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Caractérisation d'une espèce chimique et contrôle de sa pureté	Proposer ou mettre en œuvre, à partir d'informations fournies, des tests qualitatifs préalables à l'élaboration d'un protocole.
Chromatographie sur couche mince.	Mettre en œuvre une chromatographie sur couche mince pour la caractérisation d'un produit et le suivi d'une transformation. Justifier le choix de la méthode de révélation utilisée. Interpréter l'ordre d'élution des différentes espèces en relation avec leurs propriétés physico-chimiques et les caractéristiques de la phase stationnaire et de l'éluant.
Détermination expérimentale de grandeurs physiques ou spectroscopiques caractéristiques de l'espèce chimique (les principes théoriques de la RMN sont hors programme).	Extraire d'une banque de données des informations sur les propriétés physiques des produits. Mesurer une température de fusion. Mesurer un indice de réfraction. Mesurer un pouvoir rotatoire. Mesurer une absorbance. Déterminer un coefficient d'absorption molaire en spectroscopie UV-visible. Comparer les données tabulées aux valeurs mesurées et interpréter d'éventuels écarts. Comparer les caractéristiques d'un produit synthétisé avec celles du produit commercial. À partir d'une mesure appropriée, déterminer le rendement d'une synthèse, d'une méthode de séparation.

Dosages par étalonnage	Déterminer une concentration en exploitant la mesure de grandeurs physiques caractéristiques de l'espèce ou en construisant et en utilisant une courbe d'étalonnage. Déterminer une concentration ou une quantité de matière par spectrophotométrie UV-visible.
Dosages par titrage Titrages directs, indirects. Équivalence. Titrages simples, successifs, simultanés. Méthodes expérimentales de suivi d'un titrage : pH-métrie, conductimétrie, potentiométrie à intensité nulle, indicateurs de fin de titrage.	Identifier et exploiter la réaction support du titrage (recenser les espèces présentes dans le milieu au cours du titrage, repérer l'équivalence, justifier qualitativement l'allure de la courbe ou le changement de couleur ou d'aspect observé). Proposer ou justifier le protocole d'un titrage à l'aide de données fournies ou à rechercher. Mettre en œuvre un protocole expérimental correspondant à un titrage direct ou indirect. Choisir et utiliser un indicateur de fin de titrage.
Méthodes d'exploitation des courbes expérimentales.	Exploiter une courbe de titrage pour déterminer la quantité de matière, masse ou concentration de l'espèce titrée. Exploiter une courbe de titrage pour déterminer une valeur expérimentale d'une constante thermodynamique d'équilibre. Utiliser un logiciel de simulation pour tracer des courbes de distribution et confronter la courbe de titrage simulée à la courbe expérimentale. Justifier la nécessité d'effectuer un titrage indirect. Distinguer équivalence et repérage de fin de titrage.
Suivi cinétique de transformations chimiques Suivi de l'évolution temporelle d'une grandeur physique. Limitation de l'évolution temporelle (trempe) d'un système par dilution, transformation chimique ou refroidissement. Régulation de la température.	Choisir une méthode de suivi prenant en compte la facilité de mise en œuvre, les propriétés des espèces étudiées, la durée de la transformation estimée ou fournie. Exploiter les résultats d'un suivi temporel de concentration pour déterminer les caractéristiques cinétiques d'une réaction. Proposer et mettre en œuvre des conditions expérimentales permettant la simplification de la loi de vitesse. Déterminer la valeur d'une énergie d'activation.

Contenus thématiques

L'organisation des deux semestres est la suivante :

Premier semestre PCSI

1. Transformations de la matière
   1.1. Description et évolution d'un système vers un état final lors d'une transformation chimique
   1.2. Évolution temporelle d'un système, siège d'une transformation chimique
2. Relations entre structure des entités chimiques, propriétés physiques et réactivité
   2.1. Structure des entités chimiques

Deuxième semestre PCSI option PC

Deuxième semestre PCSI option PSI

Premier Semestre PCSI

1. Transformations de la matière

L'objectif de cette partie est d'amener les étudiant·es à mobiliser de manière autonome les notions et modèles pour décrire, au niveau macroscopique, un système physico-chimique et son évolution. Il convient que les problématiques abordées, les illustrations et les applications prennent largement appui sur des transformations chimiques rencontrées dans la vie courante, au laboratoire, en milieu industriel ou dans le monde du vivant.

À travers les contenus et les capacités exigibles, sont développées des compétences qui pourront être, par la suite, valorisées, consolidées ou réinvesties, parmi lesquelles :
- décrire un système physico-chimique avec méthode et en utilisant un vocabulaire scientifique précis ;
- effectuer une distinction entre les mondes des objets et des phénomènes (systèmes physico-chimiques, transformations chimiques) et le monde des modèles (réaction chimique comme modèle d'une transformation, lois d'évolution temporelle comme modèle macroscopique de l'évolution) ;
- exploiter les outils de description ou d'analyse expérimentale des systèmes chimiques pour modéliser leur évolution ;
- proposer des approximations simplifiant l'exploitation quantitative de données expérimentales et en vérifier la pertinence ;
- confronter les prévisions d'un modèle avec des résultats expérimentaux ;
- traduire, en langage de programmation, les démarches mises en œuvre pour déterminer l'état final d'un système ou pour exploiter des résultats expérimentaux et les confronter à des modèles.

1.1. Description et évolution d'un système vers un état final lors d'une transformation chimique

Les concepts développés dans cette partie permettent d'envisager l'optimisation des synthèses ou des analyses, tout à la fois pour obtenir davantage de produit désiré, réduire des produits secondaires non désirés ou favoriser une réaction support d'une analyse.
L'étude quantitative de l'état final d'un système, siège d'une transformation chimique, est réalisée dans un premier temps à partir d'une modélisation par une seule réaction chimique symbolisée par une

équation de réaction à laquelle est associée une constante thermodynamique d'équilibre. Il s'agit de prévoir le sens d'évolution de systèmes homogènes ou hétérogènes et de déterminer leur composition dans l'état final.
L'utilisation d'un langage de programmation permet d'effectuer, dans un deuxième temps, des études quantitatives pour déterminer l'état final d'un système, siège d'une transformation chimique modélisée par deux réactions et de commencer à aborder les compétitions thermodynamiques.
Les compétences relatives à cette partie du programme sont ensuite mobilisées régulièrement au cours de l'année, plus particulièrement au second semestre lors des transformations en solution aqueuse, et en seconde année, notamment dans le cadre de la thermodynamique chimique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Système physico-chimique Espèces physico-chimiques.	Recenser les espèces physico-chimiques présentes dans un système.
Corps purs et mélanges : concentration en quantité de matière, fraction molaire, pression partielle. Variables intensives et extensives. Composition d'un système physico-chimique.	Décrire la composition d'un système à l'aide des grandeurs physiques pertinentes. Reconnaître le caractère extensif ou intensif d'une variable.
Transformation chimique d'un système Modélisation d'une transformation par une ou plusieurs réactions chimiques. Équation de réaction ; constante thermodynamique d'équilibre.	Écrire l'équation de la réaction (ou des réactions) qui modélise(nt) une transformation chimique donnée. **Déterminer une constante thermodynamique d'équilibre et tester l'influence de différents paramètres sur l'état d'équilibre d'un système.**
Évolution d'un système lors d'une transformation chimique modélisée par une seule réaction chimique : avancement, activité, quotient de réaction, critère d'évolution.	Décrire qualitativement et quantitativement un système chimique dans l'état initial ou dans un état d'avancement quelconque. Exprimer l'activité d'une espèce chimique pure ou dans un mélange dans le cas de solutions aqueuses très diluées ou de mélanges de gaz parfaits avec référence à l'état standard. Exprimer le quotient de réaction. Prévoir le sens de l'évolution spontanée d'un système chimique.
Composition chimique du système dans l'état final : état d'équilibre chimique, transformation totale.	Identifier un état d'équilibre chimique. Déterminer la composition chimique du système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. **Capacité numérique** : déterminer, à l'aide d'un langage de programmation, l'état final d'un système, siège d'une transformation, modélisée par une ou deux réactions à partir des conditions initiales et valeur(s) de la(es) constante(s) thermodynamique(s) d'équilibre.
Optimisation d'un procédé chimique : - par modification de la valeur de $K°$; - par modification de la valeur du quotient de réaction.	Identifier les paramètres d'influence d'un état d'équilibre et leur contrôle pour optimiser une synthèse ou minimiser la formation d'un produit secondaire indésirable.

1.2. Évolution temporelle d'un système, siège d'une transformation chimique

L'étude de l'évolution temporelle d'un système chimique permet, dans un premier temps, de dégager expérimentalement les facteurs cinétiques concentration et température et de les mettre en œuvre en stratégie de synthèse et d'analyse. Cette mise en évidence est prolongée par les premières modélisations macroscopiques d'évolution des concentrations avec des lois de vitesse d'ordre simple et d'influence de la température avec la loi d'Arrhenius.
Les déterminations d'ordre global ou apparent mettent en œuvre la méthode différentielle ou intégrale, et peuvent s'effectuer à l'aide de logiciels dédiés ou d'un langage de programmation, pour l'exploitation des mesures dans le cadre d'un réacteur fermé parfaitement agité.
La modélisation microscopique par le biais des mécanismes réactionnels est présentée lors des premières synthèses en chimie organique (paragraphe 2.3). Elle est approfondie ultérieurement avec une approche plus exhaustive des mécanismes et leur validation par confrontation des lois de vitesse issues du modèle et des résultats expérimentaux (en partie 3).

Notions et contenus	Capacités exigibles
Cinétique en réacteur fermé de composition uniforme Vitesses volumiques de consommation d'un réactif et de formation d'un produit. Vitesse de réaction pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique (supposée sans accumulation d'intermédiaires).	Relier la vitesse de réaction, dans les cas où elle est définie, à la vitesse volumique de consommation d'un réactif ou de formation d'un produit.
Lois de vitesse : réactions sans ordre, réactions avec ordre simple (0, 1, 2), ordre global, ordre apparent. Temps de demi-vie d'un réactif, temps de demi-réaction.	**Établir une loi de vitesse à partir du suivi temporel d'une grandeur physique.** Exprimer, pour une transformation modélisée par une seule réaction chimique, la loi de vitesse si la réaction chimique admet un ordre et déterminer la valeur de la constante de vitesse à une température donnée. Déterminer la vitesse de réaction à différentes dates en utilisant une méthode numérique ou graphique. Déterminer un ordre de réaction à l'aide de la méthode différentielle ou à l'aide des temps de demi-réaction. Confirmer la valeur d'un ordre par la méthode intégrale, en se limitant strictement à une décomposition d'ordre 0, 1 ou 2 d'un unique réactif, ou se ramenant à un tel cas par dégénérescence de l'ordre ou conditions initiales stœchiométriques. **Capacité numérique :** à l'aide d'un langage de programmation ou d'un logiciel dédié, et à partir de données expérimentales, tracer l'évolution temporelle d'une concentration, d'une vitesse volumique de formation ou de consommation, d'une vitesse de réaction et tester une loi de vitesse donnée.

Loi empirique d'Arrhenius ; énergie d'activation.	**Déterminer l'énergie d'activation d'une réaction chimique.** Déterminer la valeur de l'énergie d'activation d'une réaction chimique à partir de valeurs de la constante cinétique à différentes températures.
Facteurs concentration et température en stratégie de synthèse et d'analyse : dilution, chauffage, reflux, trempe.	Reconnaître, dans un protocole, des opérations visant à augmenter ou à diminuer une vitesse de réaction.

2. Relations entre structure des entités chimiques, propriétés physiques et réactivité

Décrivant la matière au niveau macroscopique par des espèces chimiques aux propriétés physiques et chimiques caractéristiques, les chimistes la modélisent au niveau microscopique par des entités chimiques dont les structures électroniques et géométriques permettent d'interpréter et de prévoir certaines de ces propriétés.

À travers les contenus et les capacités exigibles, sont développées des compétences qui pourront être, par la suite, valorisées, consolidées ou réinvesties, parmi lesquelles :

- utiliser le tableau périodique des éléments pour déterminer ou justifier des structures d'entités et des propriétés microscopiques (polarité, polarisabilité, amphiphilie, nucléophilie, électrophilie)
- s'approprier les outils de description des entités chimiques et leur complémentarité dans la description des interactions intermoléculaires ;
- relier structure et propriétés microscopiques aux grandeurs et comportements macroscopiques (cohésion, solubilité, miscibilité, températures de changement d'état, tensioactivité) ;
- appréhender la notion de solvant, de tensioactif, d'émulsion au niveau microscopique à travers les interactions intermoléculaires et au niveau macroscopique par leur utilisation au laboratoire, dans l'industrie et dans la vie courante ;
- maîtriser et utiliser différentes représentations schématiques d'une entité chimique ;
- pratiquer un raisonnement qualitatif argumenté pour expliquer le choix d'un mécanisme réactionnel en synthèse organique.

2.1. Structure des entités chimiques

L'étude de la constitution de la matière s'appuie sur le tableau périodique des éléments, outil essentiel des chimistes, dans l'objectif de développer progressivement les compétences relatives à l'utilisation des informations qu'il contient pour prévoir, dans cette partie, le nombre de liaisons d'un atome et la nature (polaire, ionique) des liaisons chimiques.

En première année, on se limite au modèle de Lewis de la liaison covalente localisée et délocalisée pour rendre compte des structures et propriétés des entités chimiques ; le modèle quantique de la liaison avec les orbitales atomiques et moléculaires est abordé uniquement en seconde année.
Le modèle de Lewis permet, pour les entités chimiques organiques, d'introduire les notions d'isomérie de configuration et de conformation. Les ordres de grandeur des énergies de liaison et de la barrière conformationnelle permettent de sensibiliser à la solidité et à la flexibilité des édifices moléculaires.
Sans donner lieu à une étude systématique, la nomenclature IUPAC s'enrichit au fur et à mesure des besoins pour représenter une entité chimique organique à partir de son nom, en tenant compte de la donnée d'éventuelles informations stéréochimiques et en utilisant un type de représentation donné.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Modèle de Lewis de la liaison covalente Liaison covalente localisée ; longueur et énergie de la liaison covalente. Schéma de Lewis d'une molécule ou d'un ion monoatomique ou polyatomique (étude limitée aux éléments des blocs s et p).	Citer l'ordre de grandeur de longueurs et d'énergies de liaison covalente. Déterminer, pour les éléments des blocs s et p, le nombre d'électrons de valence d'un atome à partir de la position de l'élément dans le tableau périodique. Citer les éléments des périodes 1 à 3 du tableau périodique (nom, symbole, numéro atomique). Établir un ou des schémas de Lewis pertinent(s) pour une molécule ou un ion.
Liaison covalente délocalisée : mésomérie.	Identifier et représenter les enchaînements donnant lieu à une délocalisation électronique. Mettre en évidence une éventuelle délocalisation électronique à partir de données expérimentales.
Géométrie et polarité des entités chimiques Structure géométrique d'une molécule ou d'un ion polyatomique. Modèle VSEPR. Représentation de Cram.	Associer qualitativement la géométrie d'une entité à la minimisation de son énergie. Prévoir et interpréter les structures de type AX_n avec $n \leq 4$ et AX_pE_q, avec $p+q = 3$ ou 4.
Électronégativité : liaison polarisée, moment dipolaire, molécule polaire.	Comparer les électronégativités de deux atomes à partir de données ou de leurs positions dans le tableau périodique. Prévoir la polarisation d'une liaison à partir des électronégativités comparées des deux atomes mis en jeu. Relier l'existence ou non d'un moment dipolaire permanent à la structure géométrique d'une molécule. Déterminer direction et sens du vecteur moment dipolaire d'une liaison ou d'une molécule.
Structure des entités chimiques organiques Isomérie de constitution. Stéréoisomérie de conformation en série aliphatique non cyclique ; ordre de grandeur de la barrière conformationnelle. Représentation de Newman. Représentation topologique.	Comparer la stabilité de plusieurs conformations. Interpréter la stabilité d'un conformère donné.
Stéréoisomérie de configuration : chiralité, énantiomérie, diastéréoisomérie descripteurs stéréochimiques R, S, Z, E.	Attribuer les descripteurs stéréochimiques aux centres stéréogènes. Déterminer la relation d'isomérie entre deux isomères. Représenter une entité chimique organique à partir de son nom, fourni en nomenclature systématique, en tenant compte de la donnée d'éventuelles informations stéréochimiques, en utilisant un type de représentation donné.

Activité optique, pouvoir rotatoire, loi de Biot.	Relier la valeur du pouvoir rotatoire à la composition d'un mélange de stéréoisomères. **Déterminer la composition d'un système chimique ou suivre une transformation chimique en utilisant l'activité optique.**
Séparation de diastéroisomères et d'énantiomères.	Citer des analogies et différences de propriétés entre des diastéréoisomères et des énantiomères. Reconnaitre des protocoles de séparation de stéréoisomères.

2.2. Relations entre structure des entités et propriétés physiques macroscopiques

L'étude des interactions entre entités a pour objectif d'interpréter, de prévoir ou de comparer certaines propriétés physiques : température de changement d'état, miscibilité, solubilité, formation de micelles, d'émulsions.
De nombreuses illustrations et applications dans la vie courante ou au niveau du laboratoire (choix de solvant pour les synthèses ou les extractions) ou dans le domaine du vivant (double couche et solubilisation des médicaments) peuvent être proposées.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Interactions entre entités Interactions de van der Waals, polarisabilité. Liaison hydrogène (interaction par pont hydrogène). Ordres de grandeur énergétiques des interactions entre entités.	Lier la polarisabilité d'un atome à sa position dans le tableau périodique. Lier qualitativement la valeur des énergies d'interactions intermoléculaires à la polarité et la polarisabilité des molécules.
Changements d'état Température de changement d'état de corps purs moléculaires.	Prévoir ou interpréter les températures de changement d'état de corps purs moléculaires par l'existence d'interactions de van der Waals ou de liaisons hydrogène.
Solubilité, miscibilité Grandeurs caractéristiques et propriétés de solvants moléculaires : moment dipolaire, permittivité relative, caractère protogène. Mise en solution d'une espèce chimique moléculaire ou ionique.	Associer une propriété d'un solvant moléculaire à une ou des grandeurs caractéristiques. Interpréter la miscibilité totale, partielle ou nulle de deux solvants. Interpréter la solubilité d'une espèce chimique moléculaire ou ionique.
Séparation d'espèces d'un mélange : extraction par solvant, dissolution, précipitation, lavage. Constante de partage, log P.	**Déterminer une constante de partage.** **Réaliser une extraction, un lavage et les interpréter en termes de solubilité, miscibilité, constante de partage, ou log P.**
Amphiphilie Espèces chimiques amphiphiles, micelles, structure schématique des membranes cellulaires.	Prévoir le caractère amphiphile d'une entité à partir de sa structure. Interpréter la structure d'une association d'entités amphiphiles (micelle, bicouche, membrane cellulaire). Comparer et interpréter, en lien avec la structure des entités, les propriétés physiques d'espèces chimiques amphiphiles (concentration micellaire critique, solubilité).

Émulsions.	Décrire la structure d'une émulsion en distinguant phase dispersée et phase continue. Interpréter les propriétés détergentes ou émulsifiantes des espèces chimiques amphiphiles.

2.3. Réactivité des espèces organiques et premières applications en synthèse

L'objectif de cette partie est d'aborder les premières synthèses organiques en interprétant les transformations chimiques associées à partir de la réactivité des espèces organiques mises en jeu, réactivité déduite de la structure et des propriétés des entités chimiques qui les composent ; pour ce qui concerne les propriétés acido-basiques, une table de pK_a sera systématiquement fournie.
Les premières modélisations, au niveau microscopique, des transformations chimiques par un mécanisme réactionnel sont établies sur des exemples simples faisant intervenir des entités nucléophiles et électrophiles, acides et basiques. Ces modélisations permettent de rendre compte de modifications de groupes caractéristiques (substitution, élimination, addition) et de chaines carbonées, ainsi que de propriétés cinétiques ou stéréochimiques.
Les modèles mécanistiques et le modèle du complexe activé sont introduits sur des exemples de transformations s'appuyant, dans un premier temps, sur les halogénoalcanes, mais dans le but d'une maîtrise permettant un réinvestissement à d'autres groupes caractéristiques.
L'approche mécanistique est privilégiée à l'approche fonctionnelle pour favoriser le raisonnement et la transférabilité dans des situations analogues et pour commencer à engager la réflexion sur les stratégies de synthèse.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Réactivité des espèces organiques et écriture des mécanismes réactionnels Conséquences de la structure sur la réactivité : nucléophile, électrophile.	Identifier les sites électrophiles et/ou nucléophiles d'une entité chimique.
Modélisation microscopique d'une transformation : mécanisme réactionnel, acte élémentaire, molécularité, complexe activé, intermédiaire réactionnel.	Distinguer l'équation chimique symbolisant une réaction chimique de l'équation traduisant un acte élémentaire. Distinguer un intermédiaire réactionnel d'un complexe activé. Tracer et commenter un profil énergétique correspondant à un acte élémentaire ou à plusieurs actes élémentaires successifs. Donner la loi de vitesse d'une réaction se déroulant en un seul acte élémentaire.
Interprétation microscopique de l'influence des facteurs cinétiques.	Interpréter l'influence des concentrations et de la température sur la vitesse d'un acte élémentaire, en termes de fréquence et d'efficacité des chocs entre entités.
Formalisme des flèches courbes.	Utiliser le formalisme des flèches courbes pour rendre compte d'un acte élémentaire et le relier aux caractères nucléophile et électrophile des entités.
Synthèse organique en laboratoire Déroulement expérimental d'une synthèse organique : étapes de transformation, de séparation, de purification et de caractérisation. Détermination du rendement.	**Mettre en œuvre un protocole expérimental sur un exemple simple et représentatif d'une synthèse organique en laboratoire. Justifier et réaliser les différentes étapes de cette synthèse.**

Modifications de groupe caractéristique : exemple des halogénoalcanes Substitution nucléophile aliphatique : mécanismes limites S_N2 et S_N1 ; propriétés cinétiques et stéréochimiques.	Justifier le choix d'un mécanisme limite S_N2 ou S_N1 par des facteurs structuraux des réactifs et par des résultats expérimentaux sur la stéréochimie des produits ou sur la loi de vitesse de la réaction. Prévoir ou analyser la stéréosélectivité ou la stéréospécificité éventuelle d'une substitution nucléophile. Interpréter des différences de réactivité en termes de polarisabilité. Utiliser le postulat de Hammond pour interpréter l'influence de la stabilité du carbocation sur la vitesse d'une S_N1.
β–élimination ; mécanisme limite E2, propriétés stéréochimiques, régiosélectivité.	Prévoir ou analyser la régiosélectivité, la stéréosélectivité et la stéréospécificité éventuelle d'une β–élimination sur un halogénoalcane acyclique. Interpréter la formation de produits indésirables par la compétition entre les réactions de substitution et d'élimination.
Construction du squelette carboné : synthèse et utilisation d'organomagnésiens mixtes Organomagnésiens mixtes : propriétés nucléophiles ; préparation à partir des espèces halogénées ; inversion de polarité (Umpolung) lors de l'insertion du magnésium ; intérêt des organométalliques dans la construction d'une chaîne carbonée. Addition nucléophile, sur l'exemple des réactions entre un organomagnésien mixte et un aldéhyde, une cétone ou le dioxyde de carbone : mécanisme.	Déterminer le produit formé lors de la réaction d'un organomagnésien mixte sur un aldéhyde, une cétone ou le dioxyde de carbone et inversement, prévoir les réactifs utilisés lors de la synthèse magnésienne d'un alcool ou d'un acide carboxylique. **Décrire et mettre en œuvre un protocole de préparation d'un organomagnésien mixte et de son utilisation pour créer une liaison carbone-carbone. Justifier les étapes et conditions expérimentales, y compris l'hydrolyse terminale.**

Second Semestre PCSI Option PC

3. Transformations de la matière : évolution d'un système et mécanisme réactionnel

La modélisation, au niveau microscopique, des transformations chimiques développe plus avant les mécanismes réactionnels et notamment les aspects cinétiques microscopiques et macroscopiques en introduisant les notions d'étape cinétiquement déterminante et d'approximation des états quasi-stationnaires pour des intermédiaires réactionnels. Des approches numériques sont privilégiées par rapport aux calculs analytiques pour illustrer ces notions, ainsi que celles de contrôles cinétique et thermodynamique.
Introduit expérimentalement, l'effet catalytique est modélisé, au niveau microscopique, par un nouveau mécanisme réactionnel concurrent présentant des étapes souvent plus nombreuses et plus rapides. L'étude de la catalyse enzymatique est illustrée par des exemples dans le domaine du vivant et du biomimétisme et permet de réinvestir les structures et interactions entre entités.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Modélisation microscopique d'une transformation chimique	
Modélisation d'une transformation par deux actes élémentaires opposés, état d'équilibre d'un système.	Relier la constante thermodynamique d'équilibre aux constantes de vitesse dans le cas d'une transformation modélisée par deux actes élémentaires opposés.
Modélisation d'une transformation par un mécanisme constitué par plusieurs actes élémentaires successifs ; étape cinétiquement déterminante, approximation de l'état quasi-stationnaire, équilibre rapidement établi, loi de vitesse associée.	**Capacité numérique** : établir un système d'équations différentielles et le résoudre numériquement afin de visualiser l'évolution temporelle des concentrations et de leurs dérivées dans le cas d'un mécanisme à deux actes élémentaires successifs. Mettre en évidence l'étape cinétiquement déterminante ou l'approximation de l'état quasi-stationnaire d'un intermédiaire réactionnel. Reconnaître, à partir d'informations fournies, l'étape cinétiquement déterminante d'un mécanisme ou les conditions d'utilisation de l'approximation de l'état quasi-stationnaire d'un intermédiaire réactionnel. Établir la loi de vitesse de consommation d'un réactif ou de formation d'un produit à partir d'un mécanisme réactionnel simple et d'informations fournies.
Contrôle cinétique, contrôle thermodynamique.	Reconnaître les paramètres qui favorisent la formation d'un produit dans le cas de deux réactions compétitives. **Capacité numérique** : établir un système d'équations différentielles et le résoudre numériquement, avec un langage de programmation, afin de visualiser l'évolution des concentrations au cours du temps pour mettre en évidence les situations de contrôle cinétique ou thermodynamique.
Catalyse Catalyse d'une transformation, intervention du catalyseur dans le mécanisme réactionnel, sélectivité.	Reconnaître un effet catalytique dans un mécanisme réactionnel ou sur un profil énergétique. Reconnaître un effet de sélectivité par action d'un

	catalyseur.
Catalyse enzymatique, site actif d'une enzyme, complexe enzyme-substrat.	Établir la loi de vitesse de consommation d'un réactif ou de formation d'un produit à partir d'un mécanisme de catalyse enzymatique fourni. Identifier, à partir d'informations structurales, les interactions mises en jeu entre le site actif d'une enzyme et son substrat et interpréter le rôle catalytique de l'enzyme.

4. Structures microscopiques et propriétés physiques des solides

Les modèles de description microscopique des solides sont présentés à partir de l'observation de différents solides cristallisés que le professeur est libre de choisir et de la prise en compte des propriétés macroscopiques de ces solides. L'introduction du modèle du cristal parfait se fait sur l'exemple de la maille cubique à faces centrées (CFC), seule maille dont la connaissance est exigible ; l'ensemble des notions associées à cette première étude est réinvesti pour étudier d'autres structures cristallines dont la constitution est alors fournie.
L'objectif principal de l'étude des cristaux métalliques, covalents et ioniques est d'aborder une nouvelle fois la notion de modèle : les allers-retours entre le niveau macroscopique (solides de différentes natures) et la modélisation microscopique (cristal parfait) permettent de montrer les limites du modèle du cristal parfait et de confronter les prédictions faites par ce modèle aux valeurs expérimentales mesurées sur le solide réel (distances internucléaires et interatomiques, masse volumique, etc.). Ce chapitre constitue une occasion de revenir sur les positions relatives des éléments dans le tableau périodique, en lien avec la nature des interactions assurant la cohésion des édifices présentés, ainsi que sur les interactions intermoléculaires et la notion de solubilisation pour les solides ioniques et moléculaires.
Une réflexion sur les modèles conduisant à la détermination des différents types de rayons à partir des méthodes expérimentales d'analyse des structures des solides peut être proposée.
À travers les contenus et les capacités exigibles, sont développées des compétences qui pourront être, par la suite, valorisées, consolidées ou réinvesties, parmi lesquelles :

- relier la position d'un élément dans le tableau périodique et la nature des interactions entre les entités correspondantes dans un solide ;
- effectuer des liens entre différents champs de connaissance ;
- appréhender la notion de limite d'un modèle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Modèle du cristal parfait Solides amorphes, cristallins, semi-cristallins, polycristallins ; variétés allotropiques. Description du modèle du cristal parfait ; population, coordinence, compacité, masse volumique.	**Illustrer l'influence des conditions expérimentales sur la formation de solides et de solides cristallins.** Décrire un cristal parfait comme un assemblage de mailles parallélépipédiques. Déterminer la population, la coordinence et la compacité pour une structure fournie. Déterminer la valeur de la masse volumique d'un matériau cristallisé selon une structure cristalline fournie.
Rayons métallique, covalent, de van der Waals ou ionique et évolution dans le tableau périodique.	Relier le rayon métallique, covalent, de van der Waals ou ionique, selon le cas, aux paramètres d'une maille donnée. Citer l'ordre de grandeur de ces rayons.

Modèles d'empilement compact de sphères identiques. Maille conventionnelle CFC et ses sites interstitiels.	**Utiliser un logiciel ou des modèles cristallins pour visualiser des mailles et des sites interstitiels et pour déterminer des paramètres géométriques.** Localiser les interstices tétraédriques et octaédriques entre les plans d'empilement. Localiser et dénombrer les sites tétraédriques et octaédriques d'une maille CFC et déterminer leur habitabilité.
Limites du modèle du cristal parfait.	Confronter des données expérimentales aux prévisions du modèle.
Métaux et alliages Cohésion et propriétés physiques des métaux.	 Positionner dans le tableau périodique et reconnaître métaux et non métaux. Relier les caractéristiques de la liaison métallique (ordre de grandeur énergétique, non directionalité) aux propriétés macroscopiques des métaux.
Alliages de substitution et d'insertion.	Citer des exemples d'alliage et leur intérêt par rapport à des métaux purs. Prévoir la possibilité de réaliser des alliages de substitution ou d'insertion selon les caractéristiques des atomes mis en jeu.
Solides covalents et moléculaires Cohésion et propriétés physiques des solides covalents et moléculaires.	 Identifier les liaisons covalentes, les interactions de van der Waals et les liaisons hydrogène dans un cristal de structure donnée. Relier les caractéristiques des liaisons covalentes, des interactions de van der Waals et des liaisons hydrogène (directionalité ou non, ordre de grandeur des énergies mises en jeu) et les propriétés macroscopiques des solides correspondants. Comparer les propriétés macroscopiques du diamant et du graphite et interpréter les différences en relation avec les structures microscopiques (structures cristallines fournies).
Solides ioniques Cohésion et propriétés physiques des solides ioniques. Rayon ionique.	 Relier les caractéristiques de l'interaction ionique dans le cadre du modèle du solide ionique parfait (ordre de grandeur de l'énergie d'interaction, non directionalité, charge localisée) avec les propriétés macroscopiques des solides ioniques. Comparer le rayon d'un atome et ceux de ses ions. Associer la tangence anion-cation et la non tangence anion-anion, dans une structure cubique de type AB fournie, à la valeur du paramètre de maille.

5. Transformations chimiques en solution aqueuse

Les transformations chimiques en solution aqueuse jouent un rôle essentiel en chimie, en biochimie, dans le domaine du vivant et dans les procédés industriels. Un nombre considérable de développements technologiques et d'analyses environnementales (traitement des eaux, méthodes d'analyse, extraction d'ions métalliques des minerais, générateurs électrochimiques, lutte contre la corrosion, etc.) repose sur des transformations modélisées par des réactions acide-base, de solubilisation-précipitation et d'oxydo-réduction en solution aqueuse dont la maîtrise est importante pour prévoir, interpréter et optimiser les

phénomènes mis en jeu.
L'objectif de cette partie est donc de présenter différents types de réactions susceptibles d'intervenir en solution aqueuse, d'en déduire des diagrammes de prédominance ou d'existence d'espèces chimiques, notamment des diagrammes potentiel-pH, et de les utiliser comme outil de prévision et d'interprétation des transformations chimiques quel que soit le milieu donné. Les conventions de tracé de ces diagrammes seront toujours précisées.
Les choix pédagogiques relatifs au contenu des séances de travail expérimental permettront de contextualiser ces enseignements. Les dosages par titrage sont étudiés exclusivement en travaux pratiques. L'analyse des conditions choisies ou la réflexion conduisant à une proposition de protocole expérimental pour atteindre un objectif donné constituent des mises en situation des enseignements évoqués précédemment. Ces séances de travail expérimental constituent une nouvelle occasion d'aborder qualité et précision de la mesure.
À travers les contenus et les capacités exigibles, sont développées des compétences qui pourront être par la suite valorisées, consolidées ou réinvesties, parmi lesquelles :
- modéliser ou simplifier un problème complexe ;
- utiliser différents outils graphiques, numériques, analytiques ;
- repérer les informations ou paramètres importants pour la résolution d'un problème.

5.1. Réactions acide-base et de précipitation

Ces différentes transformations en solution aqueuse sont abordées en montrant qu'elles constituent des illustrations de l'évolution des systèmes chimiques introduites au premier semestre, les étudiant·es étant amené·es à déterminer l'état final d'un système en transformation chimique modélisée par une seule réaction chimique. On montrera qu'il est ainsi possible d'analyser et de simplifier une situation complexe pour parvenir à la décrire rigoureusement et quantitativement, en l'occurrence dans le cas des solutions aqueuses, par une seule réaction. Il est cependant important de noter qu'on évite tout calcul inutile de concentration, en privilégiant l'utilisation des diagrammes pour valider le choix de la réaction mise en jeu. Dans ce cadre, aucune formule de calcul de pH n'est exigible.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Réactions acide-base - constante d'acidité K_a ; constante d'acidité des deux couples de l'eau à 298 K. - diagramme de prédominance, de distribution ; - exemples usuels d'acides et bases : nom, formule et caractère – faible ou fort – des acides sulfurique, nitrique, chlorhydrique, phosphorique, acétique, du dioxyde de carbone aqueux, de la soude, la potasse, l'ion hydrogénocarbonate, l'ion carbonate, l'ammoniac ; - solutions tampons. **Réactions de dissolution ou de précipitation** - réaction de dissolution, constante de solubilité K_s ; - solubilité et condition de précipitation ; - domaine d'existence ; - facteurs influençant la solubilité.	Reconnaître une réaction acide-base à partir de son équation. Écrire l'équation de la réaction modélisant une transformation en solution aqueuse en tenant compte des caractéristiques du milieu réactionnel (nature des espèces chimiques en présence, pH) et des observations expérimentales. Utiliser des tables pour extraire les données thermodynamiques pertinentes pour étudier un système en solution aqueuse. Déterminer la valeur de la constante thermodynamique d'équilibre pour une équation de réaction, combinaison linéaire d'équations dont les constantes thermodynamiques sont connues. Déterminer la composition chimique du système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. Prévoir l'état de saturation ou de non saturation d'une solution. Utiliser les diagrammes de prédominance ou d'existence pour prévoir les espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires. Retrouver les valeurs de constantes

	thermodynamiques d'équilibre par lecture de courbes de distribution et de diagrammes de prédominance (et réciproquement). Exploiter des courbes d'évolution de la solubilité d'un solide en fonction d'une variable. **Capacité numérique** : tracer, à l'aide d'un langage de programmation, le diagramme de distribution des espèces d'un ou plusieurs couple(s) acide-base, ou d'espèces impliquées dans une réaction de précipitation. **Mettre en œuvre une réaction acide-base et une réaction de précipitation pour réaliser une analyse qualitative ou quantitative en solution aqueuse.** **Illustrer un procédé de retraitement ou de recyclage ou de séparation en solution aqueuse.**

5.2. Réactions d'oxydo-réduction

L'analyse de transformations mettant en jeu des oxydants et réducteurs usuels et des piles permettent d'aborder les différents concepts associés aux phénomènes d'oxydo-réduction en solution aqueuse. La relation de Nernst (admise en première année) ainsi que la relation entre la constante thermodynamique d'équilibre d'une réaction d'oxydo-réduction et les potentiels standard permettent de prévoir l'évolution des systèmes et le caractère favorisé des transformations.
Afin de pouvoir étudier l'influence du milieu sur les espèces oxydantes ou réductrices présentes, les acquis sur les réactions acido-basiques et de précipitation en solution aqueuse sont réinvestis.
Enfin, les diagrammes potentiel-pH sont présentés puis superposés pour prévoir ou interpréter thermodynamiquement des transformations chimiques, la confrontation avec la réalité amenant à aborder éventuellement des blocages cinétiques en lien avec l'évolution temporelle des systèmes étudiée au premier semestre.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Oxydants et réducteurs, réactions d'oxydo-réduction Nombre d'oxydation. Exemples d'oxydants et de réducteurs minéraux usuels : nom et formule des ions thiosulfate, permanganate, hypochlorite, du dichlore, du peroxyde d'hydrogène, du dioxygène, du dihydrogène, des métaux.	Lier la position d'un élément dans le tableau périodique et le caractère oxydant ou réducteur du corps simple correspondant. Prévoir les nombres d'oxydation extrêmes d'un élément à partir de sa position dans le tableau périodique. Identifier l'oxydant et le réducteur d'un couple.
Pile, tension à vide, potentiel d'électrode, potentiel standard, formule de Nernst, électrodes de référence.	Décrire le fonctionnement d'une pile à partir d'une mesure de tension à vide ou à partir des potentiels d'électrode. Déterminer la capacité électrique d'une pile. **Réaliser une pile et étudier son fonctionnement.**
Diagrammes de prédominance ou d'existence. Aspect thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction. Dismutation et médiamutation.	Utiliser les diagrammes de prédominance ou d'existence pour prévoir les espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires. Prévoir qualitativement ou quantitativement le caractère thermodynamiquement favorisé ou défavorisé d'une réaction d'oxydo-réduction à partir des potentiels standard des couples.

	Mettre en œuvre une réaction d'oxydo-réduction pour réaliser une analyse quantitative en solution aqueuse.
Diagramme potentiel-pH Principe de construction, lecture et utilisation d'un diagramme potentiel-pH. Diagramme potentiel-pH de l'eau.	 Associer les différents domaines d'un diagramme potentiel-pH fourni à des espèces chimiques données. Déterminer, par le calcul, la valeur de la pente d'une frontière d'un diagramme potentiel-pH. Justifier la position d'une frontière verticale dans un diagramme potentiel-pH. Prévoir le caractère thermodynamiquement favorisé ou non d'une transformation par superposition de diagrammes potentiel-pH. Discuter de la stabilité des espèces dans l'eau. Prévoir une éventuelle dismutation ou médiamutation en fonction du pH du milieu. Confronter les prévisions à des données expérimentales et interpréter d'éventuels écarts en termes cinétiques. **Mettre en œuvre des réactions d'oxydo-réduction en s'appuyant sur l'utilisation d'un diagramme potentiel-pH.**

6. Réactivité, transformations en chimie organique et stratégie de synthèse

Les objectifs de cette deuxième partie de programme en chimie organique sont doubles :
- d'une part, réinvestir ou compléter les connaissances et compétences autour des interconversions entre groupes caractéristiques, notamment par des réactions d'oxydo-réduction et de modifications de chaines ;
- d'autre part, enrichir les apports concernant la synthèse d'espèces chimiques organiques en introduisant les notions de protection de groupes caractéristiques et d'activation *in situ* (protonation) ou par synthèse préalable d'une espèce plus réactive.

L'ensemble permet d'amener les étudiant·es à pouvoir conduire une véritable réflexion sur la stratégie de synthèse à travers l'analyse de la réactivité comparée des espèces chimiques et à interpréter la nature et l'ordre des étapes mises en œuvre dans le cas d'une synthèse multi-étapes. Pour ce qui concerne l'élaboration d'une synthèse multi-étapes par les étudiant·es eux-mêmes, elle peut se faire en autonomie à l'aide d'une banque de réactions (réactiothèque) fournie ou à l'aide des réactions qui figurent explicitement au programme. Les équations des réactions indiquées dans la colonne de gauche (substitutions nucléophiles, $\beta-$éliminations, additions nucléophiles) doivent être connues et seuls les mécanismes explicitement inscrits sont exigibles et doivent pouvoir être écrits sans information supplémentaire.

Si la construction du programme privilégie ici une approche liée à stratégie de synthèse, elle n'entrave évidemment pas la liberté pédagogique des enseignant·es dans le choix de leur présentation et de leur progression.

À travers les contenus et les capacités exigibles sont développées des compétences qui pourront être par la suite valorisées, consolidées ou réinvesties, parmi lesquelles :
- analyser des problèmes de complexité croissante ;
- identifier dans une situation complexe la partie utile au raisonnement ;
- proposer une stratégie d'adaptation ou de contournement pour résoudre un problème.

6.1. Techniques spectroscopiques de caractérisation

La spectroscopie d'absorption UV-visible a déjà été mise en œuvre au cours du premier semestre pour suivre l'évolution d'un système chimique. Elle est enrichie par la spectroscopie IR utilisée pour identifier des liaisons ou groupes caractéristiques présents dans une entité analysée. Les absorptions de ces différents rayonnements électromagnétiques sont associées à la nature des transitions entre niveaux d'énergie dans l'entité et aux caractéristiques des liaisons.
À propos de la spectroscopie de RMN du proton, aucun développement sur son principe n'est attendu, seule l'analyse des spectres de RMN ^{1}H est à effectuer pour confirmer la structure d'entités données ou pour identifier des produits de réactions.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Spectroscopies d'absorption UV-visible et infrarouge Nature des transitions associées aux spectroscopies UV-visible et infrarouge, domaine du spectre des ondes électromagnétiques correspondant. Transmittance, absorbance.	Relier la longueur d'onde du rayonnement absorbé à l'énergie de la transition associée. Relier la fréquence du rayonnement IR absorbé aux caractéristiques de la liaison dans le cadre du modèle classique de l'oscillateur harmonique. Identifier, à partir du spectre infrarouge et de tables de nombres d'onde de vibration, une liaison ou un groupe caractéristique dans une molécule organique.
Spectroscopie de résonance magnétique nucléaire du proton Notions de déplacement chimique, de constante de couplage, d'intégration. Couplages du premier ordre A_mX_p et $A_mM_pX_q$.	Interpréter ou prévoir l'allure d'un massif à partir de l'étude des couplages. Confirmer la structure d'une entité à partir de données spectroscopiques infrarouge et/ou de résonance magnétique nucléaire du proton, les tables de nombres d'onde caractéristiques ou de déplacements chimiques étant fournies. Déterminer la structure d'une entité à partir de données spectroscopiques et du contexte de formation de l'espèce chimique dans une synthèse organique. Valider la sélectivité d'une transformation à partir de données spectroscopiques. Déterminer à partir des intégrations les proportions de deux constituants d'un mélange.

6.2. Réactions d'oxydo-réduction en chimie organique

En synthèse organique, aucun oxydant ou réducteur n'est à connaître mis à part le tétrahydroborate de sodium. Pour autant, il est attendu que les exemples étudiés portent sur des transformations réelles pour lesquelles seront fournies les conditions expérimentales associées, ce afin de développer une bonne culture chimique chez les étudiant·es.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Niveau d'oxydation des espèces organiques Les groupes caractéristiques et leur niveau d'oxydation.	Identifier, le cas échéant, une conversion d'espèce organique comme un processus d'oxydation ou de réduction et associer les demi-équations électroniques correspondantes.
Un exemple d'interconversion entre groupes caractéristiques : du groupe hydroxyalkyle au groupe carbonyle et	Déterminer le ou les produits d'oxydation d'un

inversement Oxydation des alcools selon leur classe ; principe de l'oxydation contrôlée des alcools primaires.	alcool selon sa classe. Identifier le produit d'oxydation d'un alcool primaire à l'aide de données expérimentales ou spectroscopiques.
Réduction du groupe carbonyle des aldéhydes et cétones en alcools par action du tétrahydroborate de sodium : mécanisme réactionnel en modélisant l'ion tétrahydroborate comme un ion hydrure.	Analyser à l'aide de données expérimentales la chimiosélectivité de réducteurs dans le cadre d'une stratégie de synthèse.

6.3. Activation de groupes caractéristiques

Notions et contenus	Capacités exigibles
Activation nucléophile des alcools et phénols Formation d'alcoolates par réaction acide-base ou d'oxydo-réduction.	Comparer la nucléophilie d'alcools de différentes classes à l'aide d'arguments stériques. Comparer la nucléophilie d'un alcool et de sa base conjuguée. Choisir une base pour déprotoner un alcool ou un phénol à partir d'une échelle de pK_a.
Synthèse d'éther-oxyde par la méthode de Williamson ; mécanisme réactionnel.	Proposer une voie de synthèse d'un éther-oxyde dissymétrique. Interpréter la formation de produits indésirables par la compétition entre les réactions de substitution et d'élimination.
Activation électrophile des alcools Activation des alcools *in situ* par protonation : - déshydratation acido-catalysée d'un alcool tertiaire ; régiosélectivité et stéréosélectivité éventuelles, mécanisme limite E1 ; compétition substitution-élimination dans le cas des alcools secondaires et tertiaires ; - conversion d'un alcool en halogénoalcane par action d'une solution concentrée d'halogénure d'hydrogène, mécanismes limites. Formation et réactivité d'esters sulfoniques : - conversion d'un alcool en ester sulfonique ; - formation d'alcène par élimination sur un ester sulfonique, mécanisme ; - formation d'espèces chimiques par substitution nucléophile sur un ester sulfonique ; mécanisme.	Comparer les réactivités des liaisons carbone-hétéroatome dans le cas des halogénoalcanes, des alcools, des esters sulfoniques et des ions alkyloxonium. Prévoir les produits pouvant se former lors de la déshydratation d'un alcool, indiquer le ou les produits majoritaires. Commenter dans une synthèse multi-étapes le choix d'une activation *in situ* par protonation ou par passage par un tosylate ou un mésylate d'alkyle.
Activation électrophile du groupe carbonyle Acétalisation des aldéhydes et des cétones : conditions expérimentales (APTS, appareil de Dean-Stark), mécanisme limite de l'acétalisation en milieu acide.	Expliquer qualitativement l'augmentation de l'électrophilie du groupe carbonyle par protonation.
Hémiacétalisation acido-catalysée du glucose, mécanisme limite.	Discuter la régiosélectivité de la réaction d'hémiacétalisation du glucose. Interpréter l'isomérisation du glucopyranose par le caractère renversable de l'hémiacétalisation.

6.4. Protection de groupes caractéristiques et stratégie de synthèse

Notions et contenus	Capacités exigibles
Protection-déprotection Protection-déprotection du groupe carbonyle des aldéhydes et cétones par un diol ; conditions expérimentales, mécanisme de l'hydrolyse acide. Protection-déprotection du groupe hydroxyle : utilisation d'une banque de réactions fournie.	Justifier la nécessité de protéger un groupe caractéristique dans une synthèse multi-étapes. Identifier les étapes de protection et de déprotection d'un groupe carbonyle, d'un groupe hydroxyle ou d'un diol dans une synthèse multi-étapes. Proposer ou justifier, à partir d'une banque de réactions fournie, une méthode adaptée de protection du groupe hydroxyle. Analyser une synthèse multi-étapes en termes de stratégie de synthèse : ordre des étapes, protection de groupes caractéristiques.
Approche élémentaire de l'analyse rétrosynthétique Schéma rétrosynthétique.	Proposer, à partir d'un schéma rétrosynthétique simple donné, une voie de synthèse d'une espèce cible. Concevoir une stratégie de synthèse pour une molécule simple. Choisir une stratégie de synthèse minimisant les impacts environnementaux.

Second Semestre PCSI Option PSI

3. Structures microscopiques et propriétés physiques des solides

Les modèles de description microscopique des solides sont présentés à partir de l'observation de différents solides cristallisés que le professeur est libre de choisir et de la prise en compte de propriétés macroscopiques de ces solides. L'introduction du modèle du cristal parfait se fait sur l'exemple de la maille cubique à faces centrées (CFC), seule maille dont la connaissance est exigible ; l'ensemble des notions associées à cette première étude est réinvesti pour étudier d'autres structures cristallines dont la constitution est alors fournie.

L'objectif principal de l'étude des cristaux métalliques, covalents et ioniques est d'aborder une nouvelle fois la notion de modèle : les allers-retours entre le niveau macroscopique (solides de différentes natures) et la modélisation microscopique (cristal parfait) permettent de montrer les limites du modèle du cristal parfait et de confronter les prédictions faites par ce modèle aux valeurs expérimentales mesurées sur le solide réel (distances internucléaires et interatomiques, masse volumique, etc.). Ce chapitre constitue une occasion de revenir sur les positions relatives des éléments dans le tableau périodique, en lien avec la nature des interactions assurant la cohésion des édifices présentés, ainsi que sur les interactions intermoléculaires et la notion de solubilisation pour les solides ioniques et moléculaires.

Une réflexion sur les modèles conduisant à la détermination des différents types de rayons à partir des méthodes expérimentales d'analyse des structures des solides peut être proposée.

À travers les contenus et les capacités exigibles, sont développées des compétences qui pourront être, par la suite, valorisées, consolidées ou réinvesties, parmi lesquelles :

- relier la position d'un élément dans le tableau périodique et la nature des interactions entre les entités correspondantes dans un solide ;
- effectuer des liens entre différents champs de connaissance ;
- appréhender la notion de limite d'un modèle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Modèle du cristal parfait Solides amorphes, cristallins, semi-cristallins, polycristallins ; variétés allotropiques. Description du modèle du cristal parfait ; population, coordinence, compacité, masse volumique.	**Illustrer l'influence des conditions expérimentales sur la formation de solides et de solides cristallins.** Décrire un cristal parfait comme un assemblage de mailles parallélépipédiques. Déterminer la population, la coordinence et la compacité pour une structure fournie. Déterminer la valeur de la masse volumique d'un matériau cristallisé selon une structure cristalline fournie.
Rayons métallique, covalent, de van der Waals ou ionique et évolution dans le tableau périodique.	Relier le rayon métallique, covalent, de van der Waals ou ionique, selon le cas, aux paramètres d'une maille donnée. Citer l'ordre de grandeur de ces rayons.
Modèles d'empilement compact de sphères identiques. Maille conventionnelle CFC et ses sites interstitiels.	**Utiliser un logiciel ou des modèles cristallins pour visualiser des mailles et des sites interstitiels et pour déterminer des paramètres géométriques.** Localiser les interstices tétraédriques et octaédriques entre les plans d'empilement. Localiser et dénombrer les sites tétraédriques et octaédriques d'une maille CFC et déterminer leur habitabilité.

Limites du modèle du cristal parfait.	Confronter des données expérimentales aux prévisions du modèle.
Métaux Cohésion et propriétés physiques des métaux.	Positionner dans le tableau périodique et reconnaître métaux et non métaux. Relier les caractéristiques de la liaison métallique (ordre de grandeur énergétique, non directionalité) aux propriétés macroscopiques des métaux.
Solides covalents et moléculaires Cohésion et propriétés physiques des solides covalents et moléculaires.	Relier les caractéristiques des liaisons covalentes, des interactions de van der Waals et des liaisons hydrogène (directionalité ou non, ordre de grandeur des énergies mises en jeu) et les propriétés macroscopiques des solides correspondants.
Solides ioniques Cohésion et propriétés physiques des solides ioniques.	Relier les caractéristiques de l'interaction ionique dans le cadre du modèle du solide ionique parfait (ordre de grandeur de l'énergie d'interaction, non directionalité, charge localisée) avec les propriétés macroscopiques des solides ioniques.

4. Transformations chimiques en solution aqueuse

Les transformations chimiques en solution aqueuse jouent un rôle essentiel en chimie, en biochimie, dans le domaine du vivant et dans les procédés industriels. Un nombre considérable de développements technologiques et d'analyses environnementales (traitement des eaux, méthodes d'analyse, extraction d'ions métalliques des minerais, générateurs électrochimiques, lutte contre la corrosion, etc.) repose sur des transformations modélisées par des réactions acide-base, de solubilisation-précipitation et d'oxydo-réduction en solution aqueuse dont la maîtrise est importante pour prévoir, interpréter et optimiser les phénomènes mis en jeu.
L'objectif de cette partie est donc de présenter différents types de réactions susceptibles d'intervenir en solution aqueuse, d'en déduire des diagrammes de prédominance ou d'existence d'espèces chimiques, notamment des diagrammes potentiel-pH, et de les utiliser comme outil de prévision et d'interprétation des transformations chimiques quel que soit le milieu donné. Les conventions de tracé de ces diagrammes seront toujours précisées.
Les choix pédagogiques relatifs au contenu des séances de travail expérimental permettront de contextualiser ces enseignements. Les dosages par titrage sont étudiés exclusivement en travaux pratiques. L'analyse des conditions choisies ou la réflexion conduisant à une proposition de protocole expérimental pour atteindre un objectif donné constituent des mises en situation des enseignements évoqués précédemment. Ces séances de travail expérimental constituent une nouvelle occasion d'aborder qualité et précision de la mesure.
À travers les contenus et les capacités exigibles, sont développées des compétences qui pourront être par la suite valorisées, consolidées ou réinvesties, parmi lesquelles :

- modéliser ou simplifier un problème complexe ;
- utiliser différents outils graphiques, numériques, analytiques ;
- repérer les informations ou paramètres importants pour la résolution d'un problème.

4.1. Réactions acide-base et de précipitation

Ces différentes transformations en solution aqueuse sont abordées en montrant qu'elles constituent des illustrations de l'évolution des systèmes chimiques introduites au premier semestre, les étudiant·es étant amené·es à déterminer l'état final d'un système en transformation chimique modélisée par une seule réaction chimique. On montrera qu'il est ainsi possible d'analyser et de simplifier une situation complexe pour parvenir à la décrire rigoureusement et quantitativement, en l'occurrence dans le cas des solutions aqueuses, par une seule réaction. Il est cependant important de noter qu'on évite tout calcul inutile de concentration, en privilégiant l'utilisation des diagrammes pour valider le choix de la réaction mise en jeu. Dans ce cadre, aucune formule de calcul de pH n'est exigible.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Réactions acide-base - constante d'acidité K_a ; constante d'acidité des deux couples de l'eau à 298 K ; - diagramme de prédominance, de distribution ; - exemples usuels d'acides et bases : nom, formule et caractère – faible ou fort – des acides sulfurique, nitrique, chlorhydrique, phosphorique, acétique, du dioxyde de carbone aqueux, de la soude, la potasse, l'ion hydrogénocarbonate, l'ion carbonate, l'ammoniac ; - solutions tampons. **Réactions de dissolution ou de précipitation** - réaction de dissolution, constante de solubilité K_s ; - solubilité et condition de précipitation ; - domaine d'existence ; - facteurs influençant la solubilité.	Reconnaître une réaction acide-base à partir de son équation. Écrire l'équation de la réaction modélisant une transformation en solution aqueuse en tenant compte des caractéristiques du milieu réactionnel (nature des espèces chimiques en présence, pH) et des observations expérimentales. Utiliser des tables pour extraire les données thermodynamiques pertinentes pour étudier un système en solution aqueuse. Déterminer la valeur de la constante thermodynamique d'équilibre pour une équation de réaction, combinaison linéaire d'équations dont les constantes thermodynamiques d'équilibre sont connues. Déterminer la composition chimique du système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. Prévoir l'état de saturation ou de non saturation d'une solution. Utiliser les diagrammes de prédominance ou d'existence pour prévoir les espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires. Retrouver les valeurs de constantes thermodynamiques d'équilibre par lecture de courbes de distribution et de diagrammes de prédominance (et réciproquement). Exploiter des courbes d'évolution de la solubilité d'un solide en fonction d'une variable. **Capacité numérique** : tracer, à l'aide d'un langage de programmation, le diagramme de distribution des espèces d'un ou plusieurs couple(s) acide-base, ou d'espèces impliquées dans une réaction de précipitation. **Mettre en œuvre une réaction acide-base et une réaction de précipitation pour réaliser une analyse qualitative ou quantitative en solution aqueuse. Illustrer un procédé de retraitement ou de recyclage ou de séparation en solution aqueuse.**

4.2. Réactions d'oxydo-réduction

L'analyse de transformations mettant en jeu des oxydants et réducteurs usuels et des piles permettent d'aborder les différents concepts associés aux phénomènes d'oxydo-réduction en solution aqueuse. La relation de Nernst (admise en première année) ainsi que la relation entre la constante thermodynamique d'équilibre d'une réaction d'oxydo-réduction et les potentiels standard permettent de prévoir l'évolution des systèmes et le caractère favorisé des transformations.

Afin de pouvoir étudier l'influence du milieu sur les espèces oxydantes ou réductrices présentes, les acquis sur les réactions acido-basiques et de précipitation en solution aqueuse sont réinvestis.
Enfin, les diagrammes potentiel-pH sont présentés puis superposés pour prévoir ou interpréter thermodynamiquement des transformations chimiques, la confrontation avec la réalité amenant à aborder éventuellement des blocages cinétiques en lien avec l'évolution temporelle des systèmes étudiée au premier semestre.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Oxydants et réducteurs, réactions d'oxydo-réduction Nombre d'oxydation. Exemples d'oxydants et de réducteurs minéraux usuels : nom et formule des ions thiosulfate, permanganate, hypochlorite, du dichlore, du peroxyde d'hydrogène, du dioxygène, du dihydrogène, des métaux.	Lier la position d'un élément dans le tableau périodique et le caractère oxydant ou réducteur du corps simple correspondant. Prévoir les nombres d'oxydation extrêmes d'un élément à partir de sa position dans le tableau périodique. Identifier l'oxydant et le réducteur d'un couple.
Pile, tension à vide, potentiel d'électrode, potentiel standard, formule de Nernst, électrodes de référence.	Décrire le fonctionnement d'une pile à partir d'une mesure de tension à vide ou à partir des potentiels d'électrode. Déterminer la capacité électrique d'une pile. **Réaliser une pile et étudier son fonctionnement.**
Diagrammes de prédominance ou d'existence. Aspect thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction. Dismutation et médiamutation.	Utiliser les diagrammes de prédominance ou d'existence pour prévoir les espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires. Prévoir qualitativement ou quantitativement le caractère thermodynamiquement favorisé ou défavorisé d'une réaction d'oxydo-réduction à partir des potentiels standard des couples. **Mettre en œuvre une réaction d'oxydo-réduction pour réaliser une analyse quantitative en solution aqueuse.**
Diagramme potentiel-pH Principe de construction, lecture et utilisation d'un diagramme potentiel-pH. Diagramme potentiel-pH de l'eau.	Associer les différents domaines d'un diagramme potentiel-pH fourni à des espèces chimiques données. Déterminer, par le calcul, la valeur de la pente d'une frontière d'un diagramme potentiel-pH. Justifier la position d'une frontière verticale dans un diagramme potentiel-pH. Prévoir le caractère thermodynamiquement favorisé ou non d'une transformation par superposition de diagrammes potentiel-pH. Discuter de la stabilité des espèces dans l'eau. Prévoir une éventuelle dismutation ou médiamutation en fonction du pH du milieu. Confronter les prévisions à des données expérimentales et interpréter d'éventuels écarts en termes cinétiques. **Mettre en œuvre des réactions d'oxydo-réduction en s'appuyant sur l'utilisation d'un diagramme potentiel-pH.**

Annexes

Annexe 1 : liste de matériel

Cette liste regroupe le matériel que les étudiant·es doivent savoir utiliser avec, le cas échéant, l'aide d'une notice simplifiée fournie sous forme de version papier ou numérique. Une utilisation de matériel hors de cette liste lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'une introduction guidée suffisamment détaillée.

- Verrerie classique de chimie analytique : burettes, pipettes jaugées et graduées, fioles jaugées, erlenmeyers, béchers, etc.
- Verrerie classique de chimie organique, rodée ou non rodée : ballons, ampoule de coulée (isobare ou non), réfrigérant, dispositifs de chauffage ou de refroidissement (bain-marie, bain froid, chauffe-ballon, agitateur magnétique chauffant, etc.), dispositifs d'agitation, ampoule à décanter, matériel de filtration sous pression atmosphérique et sous pression réduite, appareil de Dean-Stark.
- Évaporateur rotatif
- Matériel de chromatographie sur couche mince
- Lampe UV
- Banc de Kofler
- Réfractomètre
- Spectrophotomètre UV-visible
- pH-mètre et électrodes de mesure
- Voltmètre et électrodes
- Conductimètre et cellule de mesure
- Polarimètre
- Thermomètre
- Balance de précision

Annexe 2 : outils mathématiques

L'utilisation d'outils mathématiques est indispensable en chimie.
La capacité à mettre en œuvre de manière autonome certains de ces outils mathématiques dans le cadre des activités relevant de la chimie fait partie des compétences exigibles à la fin de la première année de PCSI. Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que le niveau de maîtrise attendu en fin de première année ; il sera complété dans le programme de seconde année. Les outils figurant dans le tableau n'ont pas tous vocation à être mis en œuvre en chimie.
Cependant les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils numériques (calculatrices, logiciels de calcul numérique ou formel).

Outils mathématiques	Capacités exigibles
1. Équations algébriques	
Système linéaire de n équations à p inconnues.	Identifier les variables (inconnues) nécessaires à la modélisation du problème sous forme d'un système d'équations linéaires. Donner l'expression formelle des solutions dans le seul cas n = p = 2. Utiliser des outils numériques ou de calcul formel dans les autres cas.
Équation non linéaire.	Représenter graphiquement une équation de la forme f(x) = g(x). Interpréter graphiquement la ou les solutions. Dans le cas général, résoudre à l'aide d'un outil numérique ou de calcul formel.
2. Équations différentielles	
Équations différentielles linéaires à coefficients	Identifier l'ordre.

constants. Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants : $y' + ay = f(x)$.	Mettre l'équation sous forme canonique. Trouver la solution générale de l'équation sans second membre : « équation homogène».
Autres équations différentielles d'ordre 1.	Intégrer numériquement avec un outil fourni. Séparer les variables d'une équation du premier ordre à variables séparables. Faire le lien entre les conditions initiales et la représentation graphique de la solution correspondante.
3. Fonctions	
Fonctions usuelles.	Exponentielle, logarithmes népérien et décimal, cosinus, sinus, tangente, puissance réelle.
Dérivée. Notation dx/dt. Développements limités.	Utiliser la formule de Taylor à l'ordre un ou deux ; interpréter graphiquement. Connaître et utiliser les développements limités à l'ordre 1 des fonctions $(1 + x)^{\alpha}$, e^x, $\ln(1 + x)$ et $\sin(x)$, et à l'ordre 2 de la fonction $\cos(x)$.
Primitive et intégrale.	Interpréter l'intégrale comme une somme de contributions infinitésimales, en lien avec la méthode des rectangles en mathématiques.
Représentation graphique d'une fonction.	Utiliser un grapheur pour tracer une courbe d'équation $y = f(x)$ donnée. Déterminer un comportement asymptotique ; rechercher un extremum local. Utiliser des échelles logarithmiques ; identifier une loi de puissance à une droite en échelle log-log.
4. Géométrie	
Vecteurs et système de coordonnées.	Exprimer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée d'un espace de dimension inférieure ou égale à 3. Utiliser les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
Projection d'un vecteur et produit scalaire.	Interpréter géométriquement le produit scalaire et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée. Utiliser la bilinéarité et le caractère symétrique du produit scalaire.
Transformations géométriques.	Utiliser les symétries par rapport à un plan, à un point, les translations et les rotations de l'espace.
Courbes planes.	Reconnaître l'équation cartésienne d'une droite, d'un cercle, d'une branche d'hyperbole, d'une parabole.
Longueurs, aires et volumes classiques.	Connaître les expressions du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'une sphère, du volume d'une boule, du volume d'un cylindre, du volume d'un parallélépipède.
Barycentre d'un système de points.	Connaître la définition du barycentre. Utiliser son associativité. Exploiter les symétries pour prévoir la position du barycentre d'un système homogène.
5. Trigonométrie	
Angle orienté.	Définir une convention d'orientation des angles d'un plan (euclidien) et lire des angles orientés.
Fonctions cosinus, sinus et tangente.	Utiliser le cercle trigonométrique et l'interprétation

	géométrique des fonctions cosinus, sinus et tangente comme aide-mémoire : relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, relations entre fonctions trigonométriques et toutes relations du type $\cos(\pi \pm x)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)$, parités, périodicité, valeurs des fonctions pour les angles usuels. Connaître les formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus ; utiliser un formulaire dans les autres cas.

Annexe 3 : outils numériques

La prise en compte de capacités de codage en langage Python incluant l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques dans la formation des étudiant·es vise à une meilleure appréhension des principes mis en œuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée et à mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la physique-chimie. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la physique-chimie comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.
Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que les capacités exigibles en fin de première année. Il sera complété dans le programme de seconde année.

Outils numériques	Capacités exigibles
1. Outils graphiques	
Représentation graphique d'un nuage de points.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **matplotlib** pour représenter un nuage de points et rendre le graphe exploitable (présence d'une légende, choix des échelles…).
Représentation graphique d'une fonction.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **matplotlib** pour tracer la courbe représentative d'une fonction et rendre le graphe exploitable (présence d'une légende, choix des échelles…).
2. Équations algébriques	
Résolution d'une équation algébrique ou d'une équation transcendante : méthode dichotomique, méthode de Newton.	Déterminer, en s'appuyant sur une représentation graphique, un intervalle adapté à la recherche numérique d'une racine par la méthode dichotomique ou par la méthode de Newton. Mettre en œuvre la méthode dichotomique ou la méthode de Newton afin de résoudre une équation avec une précision donnée. Utiliser les fonctions **bisect** ou **newton** de la bibliothèque **scipy.optimize** (leurs spécifications étant fournies).
Systèmes linéaires de n équations indépendantes à n inconnues.	Définir les matrices A et B adaptées à la représentation matricielle AX = B du système à résoudre. Utiliser la fonction **solve** de la bibliothèque **numpy.linalg** (sa spécification étant fournie).
3. Intégration – Dérivation	
Calcul approché du nombre dérivé d'une fonction en un point.	Utiliser un schéma numérique centré ou décentré pour déterminer une valeur approchée du nombre dérivé d'une fonction en un point.
4. Équations différentielles	

Équations différentielles d'ordre 1.	Mettre en œuvre la méthode d'Euler explicite afin de résoudre une équation différentielle d'ordre 1 ou un système d'équations différentielles.
5. Statistiques	
Régression linéaire.	Utiliser la fonction **polyfit** de la bibliothèque numpy (sa spécification étant fournie) pour exploiter des données. Utiliser la fonction **random.normal** de la bibliothèque numpy (sa spécification étant fournie) pour simuler un processus aléatoire.

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voies Physique, chimie et sciences de l’ingénieur (PCSI) et Physique et sciences de l’ingénieur (PSI)

Annexe 4
Programmes de sciences industrielles de l’ingénieur

PROGRAMME DE SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR DANS LA FILIÈRE PCSI-PSI

1. Objectifs de formation

1.1. Finalité

Le programme de sciences industrielles de l'ingénieur de la filière PCSI-PSI s'inscrit dans un parcours de formation initiale pour accéder au titre d'ingénieur. Il trouve ses racines dans le choix de spécialités scientifiques au cycle terminal du lycée. L'objectif de ce programme est de proposer des contenus d'enseignements qui permettent de développer progressivement les compétences nécessaires à l'intégration dans une grande école et à l'exercice des métiers d'ingénieurs. Ce programme est ambitieux quant au développement de compétences scientifiques et technologiques qui soutiennent l'expertise du futur ingénieur. Il l'est aussi pour le développement de compétences transversales nécessaires pour communiquer, travailler en équipe, exercer un sens critique et des responsabilités de manière éthique et déontologique. En cohérence avec les objectifs du cycle initial de la formation aux métiers de l'ingénierie, ce programme contribue à l'approche pédagogique par les STEM (*Science, Technology, Engineering and Mathematics*).

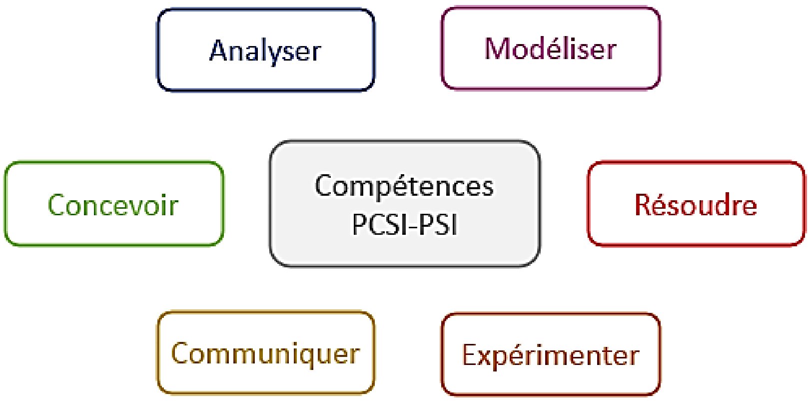
1.2. Objectifs généraux

Les ingénieurs doivent être en capacité de résoudre de façon innovante des problèmes inédits afin de répondre aux besoins des personnes et d'apporter un progrès dans leur qualité de vie. Ils participent aux processus de développement des systèmes à chaque étape de leur cycle de vie, de la caractérisation du besoin jusqu'au recyclage, en respectant les contraintes de développement durable et d'écoconception.

Cette capacité des ingénieurs à proposer des solutions innovantes est plus que jamais indispensable au développement d'une industrie capable de faire face aux grands enjeux sociétaux, économiques et environnementaux. Ces enjeux sont notamment ceux de la transition énergétique, la préservation de la qualité de l'environnement, la progression des technologies du numérique, la mutation des métropoles et des territoires, l'évolution des besoins alimentaires et des exigences en matière de santé pour des humains toujours plus nombreux sur notre planète. Dans un contexte de concurrence mondialisée, la capacité d'innovation des ingénieurs est nécessaire à l'industrie de notre pays qui doit demeurer compétitive et souveraine.

Les objectifs généraux du programme de PCSI-PSI visent à développer les compétences clés dans le large domaine des sciences industrielles de l'ingénieur qui sont nécessaires à l'exercice du métier d'ingénieur. Celles-ci sont consolidées et complétées par la formation poursuivie jusqu'à l'obtention du titre d'ingénieur.

L'enseignement en PCSI-PSI se donne également pour objectif d'apporter aux étudiants des méthodes et des outils qui leur permettront de s'adapter aux évolutions permanentes des sciences et des technologies et de communiquer avec l'ensemble des acteurs associés à l'exercice des métiers d'ingénieurs et scientifiques.

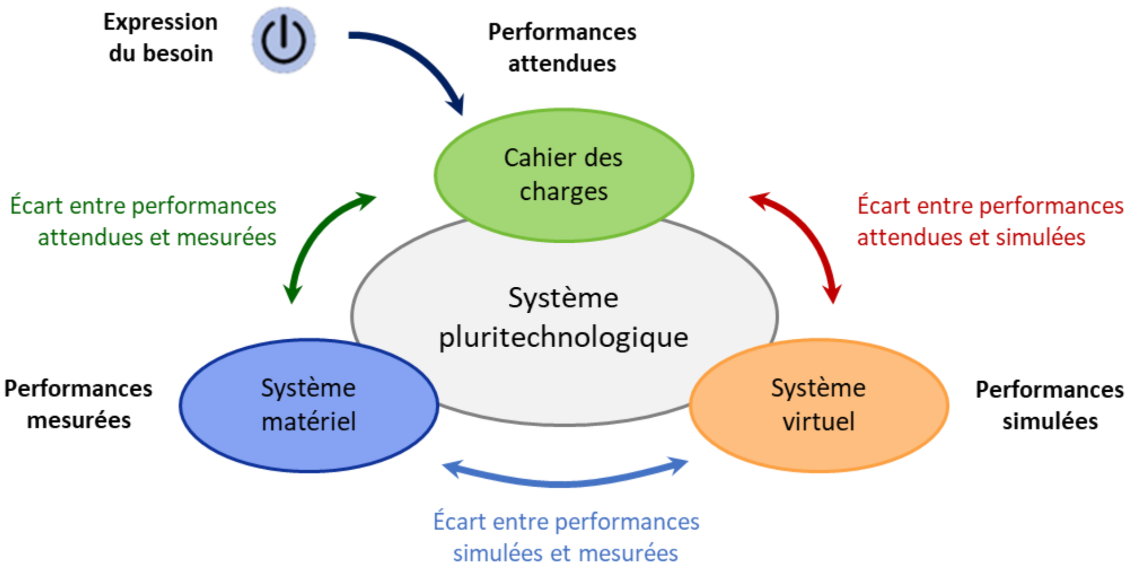


Les compétences de l'ingénieur développées en PCSI-PSI

1.3. La démarche des enseignements en PCSI-PSI

L'approche pédagogique et didactique des enseignements en PCSI-PSI s'organise autour de systèmes pluritechnologiques. Chaque système est défini à partir de besoins fonctionnels et d'exigences, de modèles numériques et d'un système matériel. Un système sera étudié dans sa globalité à partir de ces trois approches imbriquées :

- la réalité du besoin ou exigences fonctionnelles. Elle se décline dans le cahier des charges défini avec un client ;
- la réalité virtuelle d'un système. Elle se traduit dans l'élaboration d'un modèle permettant de simuler son comportement afin d'en prévoir et d'en évaluer les performances ;
- la réalité matérielle d'un système. Les performances du système matériel sont mesurées par expérimentation.



La démarche pédagogique et didactique en sciences industrielles de l'ingénieur

Les objets et les systèmes, dans leur complexité, mobilisent plusieurs formes d'énergie et sont communicants. Ils sont pluritechnologiques.

La démarche en sciences industrielles de l'ingénieur en PCSI-PSI vise à :

- s'approprier les trois réalités du système pluritechnologique (le cahier des charges, le système virtuel et le système matériel) ;
- comparer les performances issues de ces trois réalités ;
- optimiser le système virtuel et le système matériel afin de faire converger leurs performances vers celles attendues au cahier des charges.

Les contenus du programme de PCSI-PSI permettent aux étudiants d'investir complètement la démarche de l'ingénieur en s'intéressant à toutes les représentations des systèmes. Pour cela les enseignements en PCSI-PSI installent progressivement l'ensemble des connaissances et des compétences nécessaires à la maitrise des différentes représentations d'un même objet ou système, à la comparaison des différentes performances, à l'optimisation des systèmes dans leurs réalités numérique et matérielle, afin de répondre aux attentes du client.

À partir de l'analyse du cahier des charges, des solutions innovantes sont conçues et modélisées de façon numérique. Ces modèles numériques permettent la simulation du comportement des systèmes pluritechnologiques afin d'obtenir des performances simulées. La comparaison de ces performances avec celles attendues au cahier des charges permet de valider tout ou partie de la conception et de l'optimiser. Une démarche expérimentale menée sur des systèmes existants vient enrichir les compétences des étudiants au service de la démarche de l'ingénieur.

1.4. Usage de la liberté pédagogique

Le programme définit les obligations faites aux professeurs des contenus à enseigner, les mêmes pour tous les étudiants, garantes de l'équité d'une formation offrant à chacun les mêmes chances de réussite. Les finalités et objectifs généraux de la formation en sciences industrielles de l'ingénieur laissent aux enseignants le choix pédagogique de l'organisation des enseignements et de ses méthodes. La nature des enseignements en sciences industrielles de l'ingénieur suppose la mise en œuvre d'une didactique naturellement liée à la discipline qui impose une réflexion sur le développement des compétences, la transmission des connaissances et leur ordonnancement dans la programmation des apprentissages. Les supports d'enseignement sont choisis afin d'être représentatifs des solutions innovantes pour répondre aux besoins actuels. Les solutions contemporaines sont mises en perspective avec l'histoire des sociétés, des sciences et des techniques, avec les préoccupations de respect de l'environnement et des ressources naturelles, de façon à construire les bases d'une culture d'ingénieur éthique et responsable.

2. Programme

Le programme est organisé en six compétences générales déclinées en compétences attendues qui pourront être évaluées en fin de cycle.

Partant de ces indications de fin de cycle, le programme détaille les compétences développées, précise les connaissances associées et fournit un indicateur de positionnement temporel dans le cycle.

Les compétences développées et les connaissances associées sont positionnées dans les semestres, cela signifie :

- qu'elles doivent être acquises en fin du semestre précisé ;
- qu'elles ont pu être introduites au cours des semestres précédents ;
- qu'elles peuvent être mobilisées aux semestres suivants.

Les compétences générales et compétences attendues sont détaillées ci-dessous.

A – Analyser
- A1 – Analyser le besoin et les exigences
- A2 – Définir les frontières de l'analyse
- A3 – Analyser l'organisation fonctionnelle et structurelle
- A4 – Analyser les performances et les écarts

B – Modéliser
- B1 – Choisir les grandeurs physiques et les caractériser
- B2 – Proposer un modèle de connaissance et de comportement
- B3 – Valider un modèle

C – Résoudre
- C1 – Proposer une démarche de résolution
- C2 – Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique
- C3 – Mettre en œuvre une démarche de résolution numérique

D – Expérimenter
- D1 – Mettre en œuvre un système
- D2 – Proposer et justifier un protocole expérimental
- D3 – Mettre en œuvre un protocole expérimental

E – Communiquer
- E1 – Rechercher et traiter des informations
- E2 – Produire et échanger de l'information

F – Concevoir
- F1 – Concevoir l'architecture d'un système innovant
- F2 – Proposer et choisir des solutions techniques

Les liens avec l'enseignement d'informatique du tronc commun sont identifiés par le symbole $\leftrightarrows I$.

A – Analyser

A1 – Analyser le besoin et les exigences

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Décrire le besoin et les exigences.	Ingénierie Système et diagrammes associés. Cahier des charges.	S1
Commentaires *La connaissance de la syntaxe d'un langage d'Ingénierie Système n'est pas exigible. La structure des diagrammes d'Ingénierie Système (SysML) est fournie. Ils peuvent être proposés à lire ou à compléter.*		

Traduire un besoin fonctionnel en exigences.	Impact environnemental. Analyse du cycle de vie (extraction, fabrication, utilisation, fin de vie, recyclage et transport). Critères et niveaux.	S1
Définir les domaines d'application et les critères technico-économiques et environnementaux.		
Qualifier et quantifier les exigences.		
Évaluer l'impact environnemental et sociétal.		
Commentaire *Il s'agit de prendre en compte les exigences liées au développement durable et sensibiliser aux aspects sociétaux.*		

A2 – Définir les frontières de l'analyse

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Isoler un système et justifier l'isolement.	Frontière de l'étude. Milieu extérieur.	S2
Définir les éléments influents du milieu extérieur.		
Identifier la nature des flux échangés traversant la frontière d'étude.	Flux de matière, d'énergie et d'information (définition, nature et codage).	S2

A3 – Analyser l'organisation fonctionnelle et structurelle

<table>
<tr><th>Compétences développées</th><th>Connaissances associées</th><th>Semestre</th></tr>
<tr><td>Associer les fonctions aux constituants.</td><td rowspan="4">Architecture fonctionnelle et structurelle.
Diagramme de définition de blocs.
Diagramme de bloc interne.
Chaines fonctionnelles (chaine d'information et chaine de puissance).
Fonctions acquérir, traiter et communiquer.
Fonctions alimenter, moduler, convertir, transmettre et agir.
Systèmes asservis et séquentiels.</td><td>S1</td></tr>
<tr><td>Justifier le choix des constituants dédiés aux fonctions d’un système.</td><td>S4</td></tr>
<tr><td>Identifier et décrire les chaines fonctionnelles du système.</td><td>S1</td></tr>
<tr><td>Identifier et décrire les liens entre les chaines fonctionnelles.</td><td>S1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Commentaires
La description des chaines fonctionnelles de différents systèmes permet de construire une culture technologique.
Les chaines fonctionnelles, diagrammes de définition de blocs et diagrammes de bloc interne peuvent être à lire ou à compléter avec les éléments syntaxiques fournis.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Caractériser un constituant de la chaine de puissance.</td><td>Alimentation d'énergie.
Association de préactionneurs et d’actionneurs :
– caractéristiques ;
– réversibilité ;
– domaines d'application.
Transmetteurs de puissance :
– caractéristiques ;
– réversibilité ;
– domaines d'application.</td><td>S3</td></tr>
<tr><td>Caractériser un constituant de la chaine d’information.</td><td>Capteurs :
– fonctions ;
– nature des grandeurs physiques d’entrées et de sorties ;
– nature du signal et support de l’information.</td><td>S2</td></tr>
<tr><td>Analyser un algorithme. ⇆ I</td><td>Définition et appel d'une fonction.
Variables (type et portée).
Structures algorithmiques (boucles et tests).</td><td>S1</td></tr>
</table>

Analyser les principes d'intelligence artificielle. $\leftrightarrows I$	Régression et classification, apprentissages supervisé et non supervisé. Phases d'apprentissage et d'inférence. Modèle linéaire monovariable ou multivariable. Réseaux de neurones (couches d'entrée, cachées et de sortie, neurones, biais, poids et fonction d'activation).	S3
Interpréter tout ou partie de l'évolution temporelle d'un système séquentiel.	Diagramme d'états. État, transition, événement, condition de garde, activité et action.	S2
Commentaires *La connaissance de la syntaxe d'un langage d'Ingénierie Système n'est pas exigible. La structure des diagrammes d'Ingénierie Système (SysML) est fournie. Ils peuvent être proposés à lire ou à compléter.* *L'évolution temporelle des états et des variables d'un diagramme d'états est représentée sous la forme d'un chronogramme.*		

Identifier la structure d'un système asservi.	Grandeurs d'entrée et de sortie. Capteur, chaine directe, chaine de retour, commande, comparateur, consigne, correcteur et perturbation. Poursuite et régulation.	S1

A4 – Analyser les performances et les écarts

Compétences développées	**Connaissances associées**	**Semestre**
Extraire un indicateur de performance pertinent à partir du cahier des charges ou de résultats issus de l'expérimentation ou de la simulation.	Ordre de grandeur. Homogénéité des résultats. Matrice de confusion (tableau de contingence), sensibilité et spécificité d'un test.	S4
Caractériser les écarts entre les performances.		
Interpréter et vérifier la cohérence des résultats obtenus expérimentalement, analytiquement ou numériquement. $\leftrightarrows I$		
Rechercher et proposer des causes aux écarts constatés.		

B – Modéliser

B1 – Choisir les grandeurs physiques et les caractériser

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Identifier les performances à prévoir ou à évaluer.	Grandeurs flux, grandeurs effort.	S4
Identifier les grandeurs d'entrée et de sortie d'un modèle.		
Identifier les paramètres d'un modèle.		
Identifier et justifier les hypothèses nécessaires à la modélisation.		

B2 – Proposer un modèle de connaissance et de comportement

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Choisir un modèle adapté aux performances à prévoir ou à évaluer.	Phénomènes physiques. Domaine de validité. Solide indéformable.	S4
Compléter un modèle multiphysique.	Paramètres d'un modèle. Grandeurs flux et effort. Sources parfaites.	S3
Associer un modèle aux composants des chaines fonctionnelles.		
Commentaires *Un logiciel de modélisation multiphysique permettant d'assembler des composants technologiques issus d'une bibliothèque est privilégié pour la modélisation des systèmes pluritechnologiques. Les modèles mis en œuvre couvrent différents domaines (électrique, mécanique, thermique, hydraulique et pneumatique).*		

Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert.	Systèmes linéaires continus et invariants : – causalité ; – modélisation par équations différentielles ; – transformées de Laplace ; – fonction de transfert ; – forme canonique ; – gain, ordre, classe, pôles et zéros.	S1
Commentaires *L'utilisation des transformées de Laplace ne nécessite aucun prérequis. Leur présentation se limite à leurs énoncés et aux propriétés du calcul symbolique strictement nécessaires. Les théorèmes de la valeur finale, de la valeur initiale et du retard sont donnés sans démonstration.*		

Modéliser le signal d'entrée.	Signaux canoniques d'entrée : – impulsion ; – échelon ; – rampe ; – signaux périodiques.	S1
Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle. ⇆ I	Premier ordre, deuxième ordre, dérivateur, intégrateur, gain et retard. Paramètres caractéristiques. Allures des réponses indicielle et fréquentielle. Diagramme de Bode.	S2
Modéliser un système par schéma-blocs.	Schéma-blocs organique d'un système. Élaboration, manipulation et réduction de schéma-blocs. Fonctions de transfert : – chaîne directe et chaîne de retour ; – boucle ouverte et boucle fermée.	S1
Simplifier un modèle.	Linéarisation d'un modèle autour d'un point de fonctionnement. Pôles dominants et réduction de l'ordre du modèle : – principe ; – justification ; – limites.	S3

Modéliser un correcteur numérique. ⇆ *I*	Caractérisation des signaux à temps discret (échantillonnage et quantification). Modélisation par équations aux différences (équations de récurrence) d'un correcteur numérique (proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase).	S4
Commentaires *L'augmentation de la période d'échantillonnage permet de mettre en évidence les limites du modèle continu.* *Les transformées en z ne sont pas au programme.*		

Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.	Solide indéformable : – définition ; – repère ; – équivalence solide/repère ; – volume et masse ; – centre d'inertie ; – matrice d'inertie.	S3
Commentaire *Les calculs intégraux des éléments d'inertie (matrice et centre d'inertie) ne donnent pas lieu à évaluation.*		

<table>
<tr><td>Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques.</td><td rowspan="2">Liaisons :
– liaisons parfaites ;
– degrés de liberté ;
– classe d'équivalence cinématique ;
– géométrie des contacts entre deux solides ;
– liaisons normalisées entre solides, caractéristiques géométriques et repères d'expression privilégiés ;
– paramètres géométriques linéaires et angulaires ;
– symboles normalisés.
Graphe de liaisons.
Schéma cinématique.</td><td rowspan="2">S1</td></tr>
<tr><td>Proposer un modèle cinématique à partir d'un système réel ou d'une maquette numérique.</td></tr>
</table>

Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.	Vecteur position. Mouvements simple (translation et rotation) et composé. Trajectoire d'un point. Définition du vecteur vitesse et du vecteur taux de rotation. Définition du vecteur accélération. Composition des mouvements. Définition du contact ponctuel entre deux solides (roulement et glissement). Torseur cinématique (champ des vecteurs vitesse).	S2
Modéliser une action mécanique.	Modèle local (densités linéique, surfacique et volumique d'effort). Actions à distance et de contact. Modèle global. Passage d'un modèle local au modèle global. Frottements sec (lois de Coulomb) et visqueux. Torseur des actions mécaniques transmissibles. Torseur d'une action mécanique extérieure. Torseurs couple et glisseur.	S2
Simplifier un modèle de mécanisme.	Associations de liaisons en série et en parallèle. Liaisons équivalentes (approches cinématique et statique). Conditions et limites de la modélisation plane.	S2
Modifier un modèle pour le rendre isostatique.	Mobilité du modèle d'un mécanisme. Hyperstatisme du modèle. Substitution de liaisons.	S3
Décrire le comportement d'un système séquentiel.	Diagramme d'états.	S2
Commentaire *La description graphique permet de s'affranchir d'un langage de programmation spécifique.*		

B3 – Valider un modèle

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.	Critères de performances.	S2
Préciser les limites de validité d'un modèle.	Point de fonctionnement. Non-linéarités (courbure, hystérésis, saturation et seuil) et retard pur.	S4
Modifier les paramètres et enrichir le modèle pour minimiser l'écart entre les résultats analytiques et/ou numériques et les résultats expérimentaux.		S4

C – Résoudre

C1 – Proposer une démarche de résolution

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.	Critères du cahier des charges : – stabilité (marges de stabilité, amortissement et dépassement relatif) ; – précision (erreur/écart statique et erreur de trainage) ; – rapidité (temps de réponse à 5 %, bande passante et retard de trainage).	S2
Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.	Compensation de pôles, réglage de marges, amortissement, rapidité et bande passante. Application aux correcteurs de type proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase.	S3
Choisir une démarche de résolution d'un problème d'ingénierie numérique ou d'intelligence artificielle. ⇆ *I*	Décomposition d'un problème complexe en sous problèmes simples. Choix des algorithmes (réseaux de neurones, *k* plus proches voisins et régression linéaire multiple).	S3
Proposer une démarche permettant d'obtenir une loi entrée-sortie géométrique. ⇆ *I*	Fermetures géométriques.	S1

Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.	Graphe de structure. Choix des isolements. Choix des équations à écrire pour appliquer le principe fondamental de la statique ou le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen. Théorème de l'énergie cinétique.	S3

C2 – Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique

Compétences développées	**Connaissances associées**	**Semestre**
Déterminer la réponse temporelle. ⇆ *I*	Expressions des solutions des équations différentielles pour les systèmes d'ordre 1 et 2 soumis à une entrée échelon. Allures des solutions des équations différentielles d'ordre 1 et 2 pour les entrées de type impulsion, échelon, rampe et sinus (en régime permanent).	S1
Commentaire *La résolution d'équations différentielles et les transformées inverses de Laplace ne sont pas au programme.*		

Déterminer la réponse fréquentielle. ⇆ *I*	Allures des diagrammes réel et asymptotique de Bode.	S2
Déterminer les performances d'un système asservi.	Stabilité d'un système asservi : – définition ; – amortissement ; – position des pôles dans le plan complexe ; – marges de stabilité. Rapidité d'un système : – temps de réponse à 5 % ; – bande passante. Précision d'un système asservi : – théorème de la valeur finale ; – écart/erreur statique (consigne ou perturbation) ; – erreur de trainage vis-à-vis de la consigne ; – lien entre la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte et l'écart statique.	S2

Commentaire
Les critères de Routh et de Nyquist, ainsi que les diagrammes de Black-Nichols et de Nyquist, ne sont pas au programme.

<table>
<tr><td>Mettre en œuvre une démarche de réglage d’un correcteur.</td><td>Correcteurs proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase.</td><td>S4</td></tr>
<tr><td>Caractériser le mouvement d’un repère par rapport à un autre repère.</td><td>Trajectoire d’un point.
Mouvements de translation et de rotation.
Mouvement composé.</td><td>S1</td></tr>
<tr><td>Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques. ⇆ I</td><td>Loi entrée-sortie géométrique.
Loi entrée-sortie cinématique.
Transmetteurs de puissance (vis-écrou, roue et vis sans fin, trains d’engrenages simples, trains épicycloïdaux, pignon-crémaillère et poulies-courroie).</td><td>S2</td></tr>
<tr><td>Déterminer les actions mécaniques en statique.</td><td>Référentiel galiléen.
Principe fondamental de la statique.
Principe des actions réciproques.</td><td>S2</td></tr>
<tr><td>Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.</td><td rowspan="2">Torseurs cinétique et dynamique d’un solide ou d’un ensemble de solides, par rapport à un référentiel galiléen.
Principe fondamental de la dynamique en référentiel galiléen.
Énergie cinétique.
Inertie et masse équivalentes.
Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ou à un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport au repère galiléen.
Puissance intérieure à un ensemble de solides.
Théorème de l'énergie cinétique.
Rendement en régime permanent.</td><td rowspan="2">S3</td></tr>
<tr><td>Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.</td></tr>
</table>

C3 – Mettre en œuvre une démarche de résolution numérique

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Mener une simulation numérique. ⇆ *I*	Choix des grandeurs physiques. Choix du solveur et de ses paramètres (pas de discrétisation et durée de la simulation). Choix des paramètres de classification. Influence des paramètres du modèle sur les performances.	S4
Résoudre numériquement une équation ou un système d'équations. ⇆ *I*	Réécriture des équations d'un problème. Résolution de problèmes du type $f(x) = 0$ (méthodes de dichotomie et de Newton). Résolution d'un système linéaire du type $A{\cdot}X = B$. Résolution d'équations différentielles (schéma d'Euler explicite). Intégration et dérivation numérique (schémas arrière et avant).	S3
Commentaires *La « réécriture des équations » signifie :* *– remettre en forme des équations pour leurs traitements par une bibliothèque ;* *– mettre sous forme matricielle un problème (problème de Cauchy et système linéaire).* *Les méthodes numériques sont introduites au fur et à mesure, en fonction des besoins de la formation. Pour la résolution d'un système d'équations du type A·X = B, l'utilisation d'une bibliothèque préimplémentée est privilégiée.* *Les aspects théoriques liés aux méthodes numériques ne sont pas exigibles (stabilité, convergence, conditionnement de matrices…).*		

Résoudre un problème en utilisant une solution d'intelligence artificielle. ⇆ *I*	Apprentissage supervisé. Choix des données d'apprentissage. Mise en œuvre des algorithmes (réseaux de neurones, *k* plus proches voisins et régression linéaire multiple). Phases d'apprentissage et d'inférence.	S3
Commentaire *Des bibliothèques préimplémentées sont utilisées.*		

D – Expérimenter

D1 – Mettre en œuvre un système

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Mettre en œuvre un système en suivant un protocole.		S1
Repérer les constituants réalisant les principales fonctions des chaines fonctionnelles.	Fonctions acquérir, traiter et communiquer. Fonctions alimenter, moduler, convertir, transmettre et agir.	S1
Identifier les grandeurs physiques d'effort et de flux.		S2

D2 – Proposer et justifier un protocole expérimental

<table>
<tr><th>Compétences développées</th><th>Connaissances associées</th><th>Semestre</th></tr>
<tr><td>Choisir le protocole en fonction de l'objectif visé.</td><td></td><td>S4</td></tr>
<tr><td>Choisir les configurations matérielles et logicielles du système en fonction de l'objectif visé par l'expérimentation.</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">S2</td></tr>
<tr><td>Choisir les réglages du système en fonction de l'objectif visé par l'expérimentation.</td></tr>
<tr><td>Choisir la grandeur physique à mesurer ou justifier son choix.</td></tr>
<tr><td>Choisir les entrées à imposer et les sorties pour identifier un modèle de comportement.</td></tr>
<tr><td>Justifier le choix d'un capteur ou d'un appareil de mesure vis-à-vis de la grandeur physique à mesurer.</td><td></td><td>S3</td></tr>
</table>

D3 – Mettre en œuvre un protocole expérimental

Compétences développées	**Connaissances associées**	**Semestre**
Régler les paramètres de fonctionnement d'un système.		S1
Mettre en œuvre un appareil de mesure adapté à la caractéristique de la grandeur à mesurer.		S3
Effectuer des traitements à partir de données. ⇆ *I*	Traitement de fichiers de données. Moyenne et écart-type. Moyenne glissante et filtres numériques passe-bas du premier et du second ordre.	S3
Identifier les erreurs de mesure.	Incertitudes, résolution, quantification, échantillonnage, justesse, fidélité, linéarité et sensibilité.	S2
Identifier les erreurs de méthode.		
Commentaires *L'incertitude renvoie à la technologie des appareils de mesure et des capteurs. Il n'est pas souhaité de longs développements théoriques et calculs associés.*		

E – Communiquer

E1 – Rechercher et traiter des informations

Compétences développées	**Connaissances associées**	**Semestre**
Rechercher des informations.	Outils de recherche. Mots-clefs.	S2
Distinguer les différents types de documents et de données en fonction de leurs usages.		S2
Vérifier la pertinence des informations (obtention, véracité, fiabilité et précision de l'information).		
Extraire les informations utiles d'un dossier technique.		S2

Lire et décoder un document technique.	Diagrammes SysML. Schémas cinématique, électrique, hydraulique et pneumatique.	S3
Commentaire *Les normes de représentation des schémas pneumatiques, hydrauliques et du langage SysML sont fournies.*		

Trier les informations selon des critères.		S2
Effectuer une synthèse des informations disponibles dans un dossier technique.		

E2 – Produire et échanger de l'information

Compétences développées	**Connaissances associées**	**Semestre**
Choisir un outil de communication adapté à l'interlocuteur.		S2
Faire preuve d'écoute et confronter des points de vue.		
Présenter les étapes de son travail.		
Présenter de manière argumentée une synthèse des résultats.		
Produire des documents techniques adaptés à l'objectif de la communication. ⇆ *I*	Diagrammes SysML. Chaine fonctionnelle. Schéma-blocs. Schéma cinématique. Graphe de structure. Spécifications d'algorithmes.	S3
Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.	Grandeurs utilisées : – unités du système international ; – homogénéité des grandeurs.	S4
Commentaire *L'écriture des diagrammes SysML se limite à leur complétion et à leur modification.*		

F – Concevoir

F1 – Concevoir l'architecture d'un système innovant

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Proposer une architecture fonctionnelle et organique.		S4
Commentaires *Cette proposition peut se faire sous forme d'association de blocs.* *Il s'agit d'allouer des composants à la satisfaction d'exigences fonctionnelles et éventuellement de décrire les interfaces entre ces composants.* *L'activité de projet est une modalité pédagogique à privilégier pour développer cette compétence.*		

F2 – Proposer et choisir des solutions techniques

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Modifier la commande pour faire évoluer le comportement du système. ⇆ *I*	Modification d'un programme : – système séquentiel ; – structures algorithmiques. Choix et paramètres d'un correcteur.	S4

Programmes de la classe préparatoire scientifique Physique, technologie et sciences de l'ingénieur (PTSI) et au programme de sciences industrielles de l'ingénieur de la classe Physique et technologie (PT)

NOR : ESRS2035781A
arrêté du 5-1-2021 - JO du 7-2-2021
MESRI - DGESIP - A1-2

Vu Code de l'éducation, notamment articles D. 612-19 à D. 612-29 ; arrêtés du 10-2-1995 modifiés ; arrêté du 3-7-1995 modifié ; arrêté du 20-6-1996 modifié ; avis du CSE du 10-12-2020 ; avis du Cneser du 15-12-2020

Article 1 - Les programmes de première année de mathématiques, de physique et de chimie de la classe préparatoire scientifique Physique, technologie et sciences de l'ingénieur (PTSI), figurant respectivement aux annexes I, II et III de l'arrêté du 3 juillet 1995 susvisé, sont remplacés par ceux figurant respectivement aux annexes 1 et 2 du présent arrêté.

Article 2 - Les programmes de première et seconde années de sciences industrielles de l'ingénieur des classes préparatoires scientifiques Physique, technologie et sciences de l'ingénieur (PTSI) et Physique et technologie (PT), figurant respectivement à l'annexe IV de l'arrêté du 3 juillet 1995 susvisé et à l'annexe IV de l'arrêté du 20 juin 1996 susvisé, sont remplacés par ceux figurant à l'annexe 3 du présent arrêté.

Article 3 - Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie.

Article 4 - Les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021-2022 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023 pour les classes de seconde année.
Dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie, les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022 pour les classes de seconde année.

Article 5 - Le présent arrêté sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait le 5 janvier 2021

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
Édouard Geffray

Pour le ministre des Outre-mer et par délégation,
La directrice générale des outre-mer,
Sophie Brocas

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Pour la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle,
Le chef de service, adjoint de la directrice générale,
Brice Lannaud

Annexes

↳ *Annexes 1 à 3*

- Annexe 1 : programmes de mathématiques
- Annexe 2 : programme de physique-chimie

- Annexe 3 : programmes de sciences industrielles de l'ingénieur

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Physique, technologie et sciences de l'ingénieur (PTSI)

Annexe 1
Programme de mathématiques

Classe préparatoire PTSI
Programme de mathématiques

Table des matières

Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires scientifiques MPSI, PCSI, PTSI, MP2I, MP, PC, PSI, PT, MPI sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.

Objectifs de formation

En classe préparatoire scientifique, les mathématiques constituent conjointement une discipline scientifique à part entière, développant des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques, et une discipline fournissant des connaissances et des méthodes nécessaires aux autres disciplines scientifiques.
La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels :

- fournir un solide bagage de connaissances, de concepts et de méthodes ;
- exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé ;
- développer l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur ;
- promouvoir la réflexion personnelle des étudiantes et étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples ; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires scientifiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :

- **chercher**, mettre en œuvre des stratégies : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner**, argumenter : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer**, utiliser le langage symbolique : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

Chercher
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions

entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension-même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et illustrent certains résultats d'analyse.
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

Architecture et contenu du programme

L'année est découpée en deux semestres. Les contenus du programme peuvent se répartir en quatre champs : algèbre, analyse, géométrie et probabilités. L'algèbre et l'analyse occupent le plus grand volume sur les deux semestres, tandis que les probabilités sont introduites au second semestre. Si la géométrie n'apparaît explicitement que dans la section « Géométrie du plan et de l'espace », son importance va au-delà comme outil de représentation des objets du programme. Ainsi, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour l'étude des nombres complexes, l'algèbre linéaire, les espaces euclidiens, les fonctions d'une variable réelle. Les notions de géométrie affine et euclidienne étudiées au lycée sont reprises dans un cadre plus général.
L'étude de chaque domaine permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation et d'établir des liens avec les autres disciplines.

Outre l'étude des nombres complexes, le programme d'algèbre comprend deux volets. Le premier est l'étude des polynômes à une indéterminée. Le second, nettement plus volumineux, est consacré aux notions de base de l'algèbre linéaire, pour laquelle un équilibre est réalisé entre les points de vue géométrique et numérique. Il importe de souligner le caractère général des méthodes linéaires, notamment à travers leurs interventions en analyse et en géométrie.

Le programme d'analyse est centré autour des concepts fondamentaux de fonction et de suite. Les interactions entre les aspects discret et continu sont mises en valeur. Le programme d'analyse combine l'étude de problèmes qualitatifs et quantitatifs, il développe conjointement l'étude du comportement global de suite ou de fonction avec celle de leur comportement local ou asymptotique. À ce titre, les méthodes de l'analyse asymptotique font l'objet d'une section spécifique, qui est exploité ultérieurement dans l'étude des séries. Pour l'étude des solutions des équations, le programme allie les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact et les méthodes d'approximation. Enfin, les fonctions de deux variables préparent au programme de deuxième année.

La section de géométrie prolonge l'étude du plan et de l'espace faite au lycée, en y ajoutant notamment produit vectoriel et produit mixte. Elle permet d'illustrer géométriquement la théorie des systèmes linéaires et de renforcer l'intuition géométrique en lien avec l'étude des espaces vectoriels abstraits.

L'enseignement des probabilités se place dans le cadre des univers finis. Il a vocation à interagir avec le reste du programme. La notion de variable aléatoire permet d'aborder des situations réelles nécessitant une modélisation probabiliste. L'accent mis sur cette notion permet de travailler rapidement avec des événements construits en termes de variables aléatoires.

La pratique de calculs simples permet aux étudiants de s'approprier de manière effective les notions du programme. Le choix a donc été fait d'introduire très tôt un module substantiel visant à consolider les pratiques de calcul (dérivation des fonctions, calcul de primitives, résolution de certains types d'équations différentielles). Les théories sous-jacentes sont étudiées ultérieurement, ce qui doit en faciliter l'assimilation.
Les étudiants doivent savoir mettre en œuvre directement (c'est-à-dire sans recourir à un instrument de calcul), sur des exemples simples, un certain nombre de méthodes de calcul, mais aussi connaître leur cadre d'application et la forme des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

En cohérence avec l'introduction d'un enseignement d'algorithmique au lycée, le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels). Il identifie un certain nombre d'algorithmes qui doivent être connus et pratiqués par les étudiants. Ceux-ci doivent également savoir utiliser les fonctionnalités graphiques des calculatrices et des logiciels.

Le volume global du programme a été conçu pour libérer des temps dédiés à une mise en activité effective des étudiants, quel que soit le contexte proposé (cours, travaux dirigés).

Organisation du texte

Le programme définit les objectifs de l'enseignement et décrit les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; il précise aussi certains points de terminologie et certaines notations. Il fixe clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.
À l'intérieur de chaque semestre, le programme est décliné en sections. Chaque section comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. À l'intérieur de chaque semestre, le professeur conduit en toute liberté, dans le respect de la cohérence de la formation globale, l'organisation de son enseignement et le choix de ses méthodes. En particulier, la chronologie retenue dans la présentation des différentes sections de chaque semestre ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression. Cependant, la progression retenue au cours du premier semestre doit respecter les objectifs de l'enseignement dispensé au cours de cette période. Ces objectifs sont détaillés dans le bandeau qui suit le titre « Premier semestre ».

Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différentes sections ;
- celles qui sont indiquées dans les bandeaux ou dans la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit en particulier des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme.

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

Afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les autres disciplines scientifiques.

Premier semestre

Le premier semestre vise deux objectifs majeurs.

- Aménager un passage progressif de la classe de terminale à l'enseignement supérieur, en commençant par renforcer et approfondir les connaissances des bacheliers. À ce titre, trois sections jouent un rôle particulier.
  - La section « Raisonnement et vocabulaire ensembliste » regroupe des notions dont la plupart ont été mises en place au lycée. Il s'agit de les consolider et de les structurer afin qu'elles soient maîtrisées par les étudiants à la fin du premier semestre. Cette section n'a pas vocation à être enseignée d'un seul tenant ni en tout début de semestre.
  - Les sections « Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie » et « Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral » sont axées sur les techniques de calcul. La seconde est fondée sur des théorèmes admis à ce stade, mais démontrés plus loin dans le programme. Cette présentation en deux temps, destinée à faciliter les apprentissages, peut être modulée par le professeur.
- Susciter la curiosité et l'intérêt des étudiants en leur présentant un spectre suffisamment large de problématiques et de champs nouveaux.
  - La section « Nombres complexes » permet l'étude algébrique et géométrique de ces nombres. Elle aborde des applications à la trigonométrie ainsi qu'une première approche des équations algébriques.
  - Les sections « Nombres réels et suites numériques » et « Limites, continuité, dérivabilité » fondent l'analyse réelle sur des bases solides.
  - La section « Calcul matriciel et systèmes linéaires » fournit le vocabulaire et les techniques de résolution des systèmes linéaires, et prépare l'algèbre linéaire du second semestre.

Le professeur organise l'enseignement de la manière qui lui semble la plus profitable, en gardant à l'esprit le fait que la maîtrise rapide des techniques de calcul est un impératif, notamment en vue de l'enseignement de physique-chimie.
Les ensembles de nombres usuels $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sont supposés connus. Toute construction est hors programme.

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Cette section regroupe les différents points de vocabulaire, notations, outils et raisonnements nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique. Ces notions doivent être introduites de manière progressive. Leur acquisition est un objectif pour la fin du premier semestre.

Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Toute étude systématique de la logique, de la théorie des ensembles ou de l'arithmétique est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Rudiments de logique	
Quantificateurs.	L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviation est exclu.
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par disjonction des cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.	Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.
Raisonnement par récurrence (simple, double, forte).	Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.
b) Ensembles	
Ensemble, appartenance. Ensemble vide.	
Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et A^c pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathscr{P}(E)$.
Recouvrement disjoint, partition.	

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Ensembles de nombres usuels	
Entiers naturels, divisibilité dans $\mathbb{N}$, diviseurs, multiples.	
Théorème de la division euclidienne.	
PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul.	Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{N}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
PPCM.	
Algorithme d'Euclide.	
Nombre premier.	
L'ensemble des nombres premiers est infini.	
Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.	La démonstration est hors programme. Application au calcul du PGCD et du PPCM.
Entiers relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.	La construction des ensembles de nombres usuels, en particulier celle de $\mathbb{R}$, est hors programme.
d) Applications	
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathscr{F}(E,F)$ et F^E.
Famille d'éléments d'un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f\|_A$.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition.	
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	Notation f^{-1}. Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.

Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie

Cette section « boîte à outils » complète l'enseignement du lycée sur un certain nombre de points importants pour la suite :

- *calculs de sommes et de produits, dont la formule du binôme ;*
- *résolution de petits systèmes linéaires par l'algorithme du pivot ;*
- *manipulation d'inégalités et résolution d'inéquations ;*
- *utilisation du cercle trigonométrique, manipulation des lignes et fonctions trigonométriques.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Sommes et produits	
Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.	Notations $\sum_{i\in I} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i\in I} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Cas où I est vide.
Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.	Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.
Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$.	
Factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$.	
Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.	Exemples de sommes triangulaires.
Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux. Formule du binôme dans $\mathbb{R}$.	Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k<0$ et $k>n$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot	
Système linéaire à coefficients réels de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues. Algorithme du pivot et mise en évidence des opérations élémentaires.	Interprétation géométrique : intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$, de plans dans $\mathbb{R}^3$. Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \neq 0)$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
c) Inégalités	
Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations. Intervalles de $\mathbb{R}$.	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.
Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $\lvert x-a\rvert \leqslant b$.
Dans $\mathbb{R}$, parties majorées, minorées, bornées. Majorant, minorant ; maximum, minimum.	
Partie entière d'un nombre réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$.
d) Trigonométrie	
Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.	
Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.	Notation $a \equiv b\ [2\pi]$.
Cosinus et sinus de $\pi \pm x$, de $\frac{\pi}{2} \pm x$. Cosinus et sinus des angles usuels.	Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.
Formules d'addition $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$. Cas particulier des formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.	On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a)\sin(b)$.
Fonctions circulaires cosinus et sinus.	On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.
Pour $x \in \mathbb{R}$, inégalité $\lvert\sin(x)\rvert \leqslant \lvert x\rvert$.	
Fonction tangente.	Notation tan. Dérivée, variations, représentation graphique.
Tangente de $\pi \pm x$. Tangente des angles usuels. Formule d'addition $\tan(a \pm b)$.	Interprétation sur le cercle trigonométrique.

Nombres complexes

L'objectif de cette section, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

- *l'étude algébrique de l'ensemble $\mathbb{C}$ et la notion d'équation algébrique ;*
- *l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;*
- *l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Conjugaison et module	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module. Relation $\|z\|^2 = z\overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $\|z-z'\|$, cercles et disques.
c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$.	Notation $\mathbb{U}$.
Exponentielle d'une somme.	
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q), \sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
d) Forme trigonométrique	
Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ $(r > 0)$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t-\varphi)$.	
e) Équations algébriques	
Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z-a$.	
Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Somme et produit des racines.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
f) Racines n-ièmes	
Description des racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.
g) Exponentielle complexe	
Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\mathrm{Re}(z)}e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.	Notations $\exp(z)$, e^z. Module et arguments de e^z.
h) Interprétation géométrique des nombres complexes	
Interprétation géométrique des module et arguments de $\dfrac{c-a}{b-a}$.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.
Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az$ et $z \mapsto z+b$ pour $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Interprétation géométrique de la conjugaison.	Il s'agit d'introduire certaines transformations du plan : translations, homothéties, rotations. L'étude générale des similitudes est hors programme.

Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

Le point de vue adopté dans cette section est pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre les techniques de base de l'analyse. La mise en place rigoureuse des notions abordées fait l'objet de sections ultérieures.

Les objectifs de formation sont les suivants :

- *l'introduction de fonctions pour établir des inégalités et résoudre des problèmes d'optimisation ;*
- *la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu ;*
- *le calcul de dérivées et de primitives ;*
- *la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable ;*
- *l'application des deux points précédents aux équations différentielles.*

Le cours sur les équations différentielles est illustré par des exemples issus des autres disciplines scientifiques.

A - Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.
Somme, produit, composée.	
Monotonie (large et stricte).	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si et seulement si $\lvert f\rvert$ est majorée.
b) Dérivation	
Dérivée d'une fonction.	Notations $f'(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade. Exemples simples de calculs de dérivées partielles.
Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.	Résultats admis à ce stade.
Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.	Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.
Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.	La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	
Dérivées d'ordre supérieur.	
c) Fonctions usuelles	
Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.	
Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.	
Inégalités $\exp(x) \geqslant 1+x$, $\ln(1+x) \leqslant x$.	
Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.	Dérivée, variations, représentation graphique.

Contenus	Capacités & Commentaires
Fonctions hyperboliques sh, ch.	Dérivée, variations, représentation graphique. La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

d) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes. Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient. Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.	La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire. Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.

B - Primitives et équations différentielles linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Intégration par parties, changement de variable.	Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
b) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ensemble des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée. Méthode de la variation de la constante. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.	Équation homogène associée.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Principe de superposition.	
Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

Nombres réels et suites numériques

L'objectif de cette section est de donner une base solide à l'étude des suites réelles, notamment les suites définies par une relation de récurrence.

Dans l'étude des suites, on distingue nettement les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).

Contenus	Capacités & commentaires
a) Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$.	Notations $\sup X$, $\inf X$.
Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).	On convient que $\sup X = +\infty$ si X est non majorée.
Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.	
b) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\left(\lvert u_n\rvert\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	
c) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $u_n \longrightarrow \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente.	
Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Passage à la limite d'une inégalité large.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Utilisation d'une majoration de la forme $\lvert u_n - \ell\rvert \leqslant v_n$, où (v_n) converge vers 0.
d) Suites monotones	
Théorème de la limite monotone.	
Théorème des suites adjacentes.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Approximations décimales d'un réel.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès. Tout réel est limite d'une suite de rationnels.
e) Suites extraites	
Suite extraite.	Tout développement théorique sur les suites extraites est hors programme.
Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ. Le théorème de Bolzano-Weierstrass est hors programme.
f) Suites complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
g) Suites particulières	
Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.	Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.
Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.	
Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.	Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de (u_n), on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de $f(x) - x$, et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f.

Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité, dérivabilité

Dans cette section, on démontre les théorèmes de base relatifs aux fonctions réelles de variable réelle. Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et, sauf dans les paragraphes A-d) et B-e), sont à valeurs réelles. On dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré en a si a est réel, avec un intervalle $]A, +\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty, A[$ si $a = -\infty$.

L'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ est l'occasion d'introduire la notion de vitesse de convergence. Sur des exemples, on met en évidence divers comportements (convergence lente, géométrique, quadratique) en explicitant le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision donnée. On pourra en particulier présenter la méthode de Newton. De même, l'étude de la dérivabilité donne un prétexte pour présenter la notion de discrétisation, à travers la méthode d'Euler.

A - Limites et continuité

Le paragraphe a) consiste largement en des adaptations au cas continu de notions déjà étudiées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de disposer d'outils efficaces (développements limités).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Limite d'une fonction en un point	
Étant donné a fini ou infini appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.	
Si f possède une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Image d'une suite de limite a par une fonction admettant une limite en a.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
Passage à la limite d'une inégalité large.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	
Théorème de la limite monotone.	La démonstration n'est pas exigible.
b) Continuité en un point	
Continuité, prolongement par continuité en un point.	La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
Continuité à gauche, à droite.	
Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
c) Continuité sur un intervalle	
Continuité sur un intervalle.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Principe de démonstration par dichotomie.
Image d'un intervalle par une fonction continue.	
Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.	
Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.
Image d'un segment par une fonction continue.	
Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.	La démonstration n'est pas exigible.
d) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.

B - Dérivabilité

Contenus	Capacités & commentaires
a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite.	Définition par le taux d'accroissement. Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas $$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+h\varepsilon(h),\text{ où }\varepsilon(h)\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0.$$ Interprétation géométrique : tangente. Interprétation cinématique : vitesse instantanée.
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une fonction réciproque.
b) Extremum local et point critique	
Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.
c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable sur un intervalle I et si $\|f'\|$ est majorée par K, alors pour tous x, y de I, $\quad \|f(y)-f(x)\| \leqslant K\|y-x\|$. Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.	Interprétations géométrique et cinématique. Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$.
Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I\setminus\{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x)=\ell\in\mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a)=\ell$. Extension au cas où $\ell=\pm\infty$.	La fonction f' est alors continue en a.
d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$	
Pour $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.
e) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathscr{C}^1$.	On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Le but de cette section est de présenter une initiation au calcul matriciel. Ainsi, on prépare l'étude géométrique de l'algèbre linéaire menée au second semestre, on revient sur l'étude des systèmes linéaires.
Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Opérations sur les matrices	
Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation $A^\top$.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	
b) Opérations élémentaires	
Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.	
c) Systèmes linéaires	
Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.	
Système compatible.	Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.
Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.	On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.
d) Ensemble des matrices carrées	
Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n.
Matrices symétriques, antisymétriques.	Notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Inverse d'une transposée.	
Inverse d'un produit de matrices inversibles.	
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.	
Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.	Toute technicité est exclue.
Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.	Cas particulier des matrices diagonales.

Deuxième semestre

Le deuxième semestre s'organise autour de plusieurs objectifs majeurs.

- Présenter les objets classiques de la géométrie du plan et de l'espace.
- Introduire les notions fondamentales relatives à l'algèbre linéaire.
- Prolonger les sections d'analyse du premier semestre par l'étude de l'analyse asymptotique et de l'intégration des fonctions continues sur un segment.
- Consolider et enrichir les notions relatives aux variables aléatoires sur un univers fini introduites au lycée.
- Amorcer l'étude des séries numériques dans un cadre restreint.

Le professeur a la liberté d'organiser l'enseignement du semestre de la manière qui lui semble la mieux adaptée. Il est cependant fortement préconisé de traiter la section « Analyse asymptotique » en début de semestre pour disposer rapidement d'outils efficaces.

Le programme d'algèbre linéaire est divisé en deux sections. La première étudie les objets géométriques : espaces, sous-espaces, applications linéaires; la seconde fait le lien avec le calcul matriciel. Cette séparation n'est qu'une commodité de rédaction et le professeur peut organiser l'ensemble comme il le souhaite.

Analyse asymptotique

L'objectif de cette section est d'introduire les techniques asymptotiques fondamentales, dans les cadres continu et discret. Les fonctions et les suites y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant. On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison.

Les développements limités sont les principaux outils du calcul asymptotique. Afin d'en disposer au plus tôt, on traitera en premier lieu les fonctions. Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir mener à bien rapidement des calculs asymptotiques simples. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels.

Cette section permet de revenir sur la problématique de la vitesse de convergence introduite au premier semestre lors de l'étude des fonctions de variable réelle.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Relations de comparaison : cas des fonctions	
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$. Lien entre ces relations.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$, $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. La relation $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ est définie à partir du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas localement. Pour la relation $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, on donne les deux formes $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs. Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \to 0$. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées de $\ln^\beta(x)$, x^α, $e^{\gamma x}$ en $+\infty$, de $\ln^\beta(x)$, x^α en 0.
Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O. Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles f, g, h vérifient $f \leqslant g \leqslant h$ et si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Développements limités	
Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.	Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a.
Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.	
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.
Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathscr{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$. Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan.	
Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.	Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.
Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.	
c) Relations de comparaison : cas des suites	
Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.

Géométrie du plan et de l'espace

À l'issue de la terminale, les étudiants connaissent le plan géométrique euclidien et l'espace géométrique euclidien de dimension 3 en tant qu'ensembles de points, la façon d'associer à deux points A et B le vecteur $\overrightarrow{AB}$, ainsi que les propriétés opératoires usuelles. À ce titre, on pourra utiliser la notation $B = A + \vec{u}$, équivalente à $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
Cette section permet d'illustrer géométriquement la théorie des systèmes linéaires et de renforcer l'intuition géométrique en lien avec l'étude des espaces vectoriels abstraits. Il convient d'avoir recours à de nombreuses figures en dimension 2 et en dimension 3.

A - Géométrie du plan

Contenus	Capacités & commentaires
a) Modes de repérage	
Coordonnées cartésiennes. Coordonnées polaires d'un point du plan supposé muni d'un repère orthonormé (ou orthonormal).	
b) Produit scalaire	
Norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$. Définition géométrique du produit scalaire : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ sinon.	Interprétation de la norme en termes de distance. Interprétation en termes de projection orthogonale.
Bilinéarité, symétrie.	La démonstration n'est pas exigible.

Contenus	Capacités & Commentaires
Expression dans une base orthonormée. Identité remarquable $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$. Caractérisation de l'orthogonalité de deux vecteurs.	Formule de polarisation associée.

c) Produit mixte dans le plan orienté

Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors $$[\vec{u},\vec{v}]=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)$$ et $[\vec{u},\vec{v}]=0$ sinon. Bilinéarité, antisymétrie. Expression dans une base orthonormée directe. Caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs.	Interprétation en terme d'aire orientée d'un parallélogramme. La notion d'orientation du plan est admise. La démonstration n'est pas exigible.

d) Droites

Paramétrage et équation cartésienne d'une droite définie par un point et un vecteur directeur, par deux points distincts, par un point et un vecteur normal. Projeté orthogonal d'un point sur une droite.	Notation $A+\mathrm{Vect}(\vec{u})$. Lignes de niveau de $M\mapsto\vec{u}.\overrightarrow{AM}$ et de $M\mapsto[\vec{u},\overrightarrow{AM}]$. Application à des problèmes de régionnement du plan. Application à des calculs de distances.

e) Cercles

Équation cartésienne et paramétrage d'un cercle en repère orthonormé.	Caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$ par l'équation $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$. Exemples de problèmes d'intersection.

B- Géométrie de l'espace

Contenus	Capacités & commentaires

a) Modes de repérage

Coordonnées cartésiennes. Coordonnées cylindriques.	

b) Produit scalaire

Norme euclidienne dans $\mathbb{R}^3$. Définition géométrique du produit scalaire. Bilinéarité, symétrie, expression dans une base orthonormée.	Les démonstrations sont hors programme.

c) Produit vectoriel dans l'espace orienté

Définition géométrique du produit vectoriel de deux vecteurs : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, alors le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{n}$ orthogonal au plan $\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$, de norme $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\,\lvert\sin(\vec{u},\vec{v})\rvert$, tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{n})$ soit une base directe ; sinon le produit vectoriel est le vecteur nul. Bilinéarité, antisymétrie, expression dans une base orthonormée directe. Condition de colinéarité de deux vecteurs.	Notation $\vec{u}\wedge\vec{v}$. La notion d'orientation de l'espace, reposant sur les conventions physiques usuelles, est admise. Interprétation de $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$ comme aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les démonstrations sont hors programme.

d) Produit mixte dans l'espace orienté

Définition du produit mixte de trois vecteurs : $$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}.$$	Interprétation de $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ comme volume orienté du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
Trilinéarité, antisymétrie, expression dans une base orthonormée directe.	Les démonstrations sont hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
Condition de coplanarité de trois vecteurs.	
e) Plans et droites	
Différents modes de définition d'un plan : par un point et deux vecteurs non colinéaires, un point et un vecteur normal, trois points non alignés.	Notation $A+\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$.
Représentation paramétrique et équation cartésienne.	Application à des problèmes de régionnement de l'espace. Exemples de problèmes d'intersections de plusieurs plans.
Différents modes de définition d'une droite : par un point et un vecteur directeur, par deux points distincts, comme intersection de deux plans. Représentation paramétrique et système d'équations cartésiennes.	
Projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan.	Application à des calculs de distances. Exemples de problèmes d'intersection.
f) Sphères	
Équation cartésienne d'une sphère en repère orthonormé.	Exemples de problèmes d'intersection.

Polynômes

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de base des polynômes et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.

On présente la décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles, uniquement dans des situations simples. L'objectif est de présenter aux étudiants un outil qui leur permette de mener à bien des calculs d'intégration, de dérivation, de somme, etc.

Le programme se limite aux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ensemble des polynômes à une indéterminée	
Ensemble $\mathbb{K}[X]$. Combinaison linéaire et produit de polynômes, formule du binôme.	La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme.
Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Degré d'une somme, d'un produit. Composition.	Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n. Le produit de deux polynômes non nuls est non nul.
b) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples.	
Théorème de la division euclidienne.	Algorithme de la division euclidienne.
c) Fonctions polynomiales et racines	
Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.	Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ». Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale.
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Multiplicité d'une racine. Polynôme scindé.	Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.
Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients.	Les fonctions symétriques élémentaires sont hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Dérivation	
Dérivée formelle d'un polynôme.	Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	
e) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$	
Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.	La démonstration est hors programme. Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.	Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.
f) Décomposition en éléments simples de certaines fonctions rationnelles	
Expression de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles à pôles simples.	La démonstration est hors programme. Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie. Application au calcul de primitives, de dérivées k-ièmes.

Espaces vectoriels et applications linéaires

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire ;*
- *reconnaître les problèmes linéaires et les traduire à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire ;*
- *définir la notion de dimension, qui décrit le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire ; on insistera sur les méthodes de calcul de dimension et on fera apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentation : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires.*

En petite dimension, l'intuition géométrique permet d'interpréter les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension au cas général : on en tirera parti par de nombreuses figures.

$\mathbb{K}$ *désigne* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Tout développement théorique sur les espaces de dimension infinie est hors programme.*

A - Espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel. Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant les x_i contient $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Familles finies de vecteurs	
Famille génératrice.	
Famille libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$.
d) Somme de deux sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

B - Espaces de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\dots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\dots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n)$.
c) Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.	
Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.	
Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.	
Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	

C - Applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Application linéaire. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	Notation $\operatorname{Im} u$.
Noyau d'une application linéaire.	Notation $\operatorname{Ker} u$. Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$.	
Application linéaire de rang fini.	Notation $\operatorname{rg}(u)$.
Le rang de $v \circ u$ est majoré par $\min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.	
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties.	Notations id_E, id.
Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition.	Notation u^k pour $u \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \operatorname{id}$.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\operatorname{GL}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme. Notation u^k pour $u \in \operatorname{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
c) Détermination d'une application linéaire lorsque E est de dimension finie	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.	
Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.	
Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie.	La démonstration peut être traitée plus tard, à l'aide de la dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	
d) Théorème du rang	
Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$.	
Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $n = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg}(u)$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
e) Équations linéaires	
Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $a \in F$. L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit de la forme $x_0 + \operatorname{Ker} u$.	Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques.

Matrices et déterminants

Les objectifs de cette section sont les suivants :
- *présenter les liens entre applications linéaires et matrices, de manière à exploiter les changements de registres (géométrique, numérique, formel) ;*
- *étudier l'effet d'un changement de bases sur la représentation matricielle d'une application linéaire et d'un vecteur ;*
- ★ *introduire la notion de déterminant d'une matrice carrée et en établir les principales propriétés.*★

A - Matrices et applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.	Exemple : matrice d'une rotation vectorielle du plan, d'une homothétie.
Isomorphisme de $\mathscr{L}(E, F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.	Application au calcul de la dimension de $\mathscr{L}(E, F)$.
Matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires.	
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes. Matrice de la réciproque d'un isomorphisme.
b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	On identifie ici $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n.	Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Lien entre les diverses notions de rang.
Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application : calcul du rang.
Invariance du rang par transposition.	Ce résultat est admis.
c) Changements de bases	
Matrice de passage d'une base à une autre. Inversibilité et inverse d'une matrice de passage. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur. Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.

Contenus	Capacités & Commentaires
Matrices semblables.	Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.

d) Systèmes linéaires

Contenus	Capacités & Commentaires
Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.	
Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A.	
Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

★ B - Déterminants

Le déterminant est présenté dans sa version matricielle. L'interprétation géométrique en terme d'aire et de volume algébrique est faite via le produit mixte défini dans la section « Géométrie du plan et de l'espace ». Les capacités attendues sont la connaissance et l'utilisation des propriétés du déterminant permettant un calcul simple via des opérations élémentaires. Tout excès de technicité est exclu et l'outil informatique est utilisé dès que le calcul s'avère trop lourd. Le vocabulaire des formes multilinéaires alternées, le groupe symétrique et les formules de Cramer sont hors programme.

a) Déterminant d'une matrice carrée

Contenus	Capacités & commentaires
Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes : *i.* f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ; *ii.* f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable ; *iii.* $f(I_n) = 1$.	La démonstration de ce théorème pour $n \geqslant 4$ et la notion générale de forme multilinéaire sont hors programme. Pour $n \in \{2, 3\}$, on fait le lien avec le produit mixte de deux ou trois vecteurs. On notera $\det(A)$ le nombre $f(A)$ pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Propriétés du déterminant

Contenus	Capacités & commentaires
Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.	
Expression de $\det(\lambda A)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	
Effet sur un déterminant des opérations élémentaires en colonnes.	Les étudiants doivent savoir calculer un déterminant par opérations élémentaires sur les colonnes.
Déterminant d'une matrice triangulaire.	
Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.	
Déterminant d'un produit de matrices carrées.	La démonstration est hors programme.
Déterminant de l'inverse.	
Déterminant de la transposée.	La démonstration est hors programme. Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes.
Développement par rapport à une colonne ou une ligne du déterminant d'une matrice.	La démonstration n'est pas exigible. La notion de comatrice est hors programme.

c) Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme

Contenus	Capacités & commentaires
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases.	La formule de changement de base pour un déterminant est hors programme.
Déterminant d'un endomorphisme. Caractérisation des automorphismes.	Traduction sur le déterminant d'un endomorphisme des propriétés relatives au déterminant d'une matrice. ★

Intégration

Cette section a pour principal objectif de définir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment et d'en établir les propriétés principales. Elle offre l'occasion de revenir sur les techniques de calcul intégral, mais aussi de traiter des exercices d'esprit plus théorique.

Les méthodes de calcul approché d'intégrales donnent l'occasion de revenir sur la problématique de l'approximation. On pourra ainsi comparer les performances de la méthode des rectangles et de celle des trapèzes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions en escalier	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier.	Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
b) Intégrale d'une fonction continue sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Interprétation géométrique de l'intégrale. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale : $\left\|\int_{[a,b]} f\right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|$.	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.	
Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.	Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.
c) Sommes de Riemann	
Pour f continue sur le segment $[a,b]$, $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$	Interprétation géométrique. La démonstration pourra être proposée dans le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$.
d) Lien entre intégrale et primitive	
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.	
e) Inégalité de Taylor-Lagrange	
Inégalité de Taylor-Lagrange.	La formule de Taylor avec reste intégral n'est pas exigible. L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et l'inégalité de Taylor-Lagrange (globale).
f) Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{C}$. Linéarité, majoration du module de l'intégrale. Inégalité de Taylor-Lagrange.	Définition au moyen des parties réelle et imaginaire.

Dénombrement

Cette section est introduite essentiellement en vue de son utilisation en probabilités ; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique.

Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :
- *parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;*
- *l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\|A\|$, $\mathrm{Card}(A)$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	
Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.	La formule du crible est hors programme.
Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Probabilités

Cette section, qui a vocation à interagir avec l'ensemble du programme, a pour objectif de donner aux étudiants une bonne pratique des variables aléatoires dans le cadre fini. Pour enrichir la pratique de la modélisation probabiliste développée au lycée, on met en évidence qu'une situation probabiliste finie peut être décrite par un n-uplet de variables aléatoires, l'univers étant vu dans cette optique comme une source suffisante d'aléa. L'objectif de cette présentation est de pouvoir travailler le plus tôt possible avec des événements construits en termes de variables aléatoires. La construction d'un univers fini susceptible de porter un n-uplet de variables aléatoires peut être présentée, mais ne constitue pas un objectif du programme.
Les exemples et activités proposés sont de nature plus conceptuelle qu'au lycée. On pourra faire travailler les étudiants sur des marches aléatoires ou des chaînes de Markov en temps fini, des graphes aléatoires, des inégalités de concentration…
Le programme de probabilités de première année s'achève sur une approche non asymptotique de la loi faible des grands nombres qui justifie l'approche fréquentiste des probabilités.

A - Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Univers, événements, variables aléatoires	
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).
Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.	Notations $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$.

b) Espaces probabilisés finis

Probabilité sur un univers fini.	Espace probabilisé fini (Ω, P). Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leqslant x)$.
Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1.	Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.
Probabilité uniforme.	
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.

c) Probabilités conditionnelles

Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.	
L'application P_B est une probabilité.	
Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A\|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.

d) Loi d'une variable aléatoire

Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans E.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x\in E}$. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.
Variable aléatoire $f(X)$.	Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E.	Notation $X \sim \mathscr{U}(E)$.
Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathscr{B}(p)$. Interprétation comme succès d'une expérience.
Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.
Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X = x, Y = y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.

e) Événements indépendants

Les événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.

f) Variables aléatoires indépendantes

Les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers Ω sont indépendantes si pour tout $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathscr{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de (X,Y) est donnée par $P\big((X,Y) = (x,y)\big) = P(X = x)P(Y = y)$.
Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1+\cdots+X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.	Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes ayant chacune la probabilité p de succès.
Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.	La démonstration est hors programme. Extension au cas de plus de deux coalitions.

B - Espérance et variance

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espérance d'une variable aléatoire réelle	
Espérance $\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ d'une variable aléatoire X.	L'espérance est un indicateur de position. Formule $\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$. Variable aléatoire centrée.
Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.	
Espérance d'une variable constante, de Bernoulli, binomiale.	Exemple : $\mathrm{E}(\mathbb{1}_A) = P(A)$.
Formule de transfert : $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$.	On souligne que la formule de transfert s'applique en particulier aux couples et aux n-uplets.
Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.	Extension au cas de n variables aléatoires indépendantes.
b) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance	
Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle.	Variance et écart type sont des indicateurs de dispersion. Variable aléatoire réduite.
Relation $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$. Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.	
Covariance de deux variables aléatoires.	Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.
Relation $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes.	
Variance d'une somme, cas de variables décorrélées.	On retrouve la variance d'une variable binomiale.
c) Inégalités probabilistes	
Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	Application à l'obtention d'inégalités de concentration. Application à une moyenne de variables indépendantes de même loi, interprétation fréquentiste.

Séries numériques

Cette section a pour but de prolonger l'étude des suites et de permettre d'appliquer les techniques d'analyse asymptotique pour étudier les séries numériques.

★ *La notion de suite sommable est introduite mais n'appelle aucun développement théorique.*★

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Convergence et divergence	
Sommes partielles d'une série numérique. Convergence, divergence, somme.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Reste d'une série convergente.	
Lien suite-série.	La suite (u_n) et la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.	
Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.	
b) Séries à termes positifs ou nuls	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	
Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.	Application à l'étude de sommes partielles.
Séries de Riemann.	
★ c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes, suites sommables	
Convergence absolue de la série numérique $\sum u_n$, encore appelée sommabilité de la suite (u_n).	Notation $\sum_{n=0}^{+\infty} \lvert u_n \rvert < +\infty$. Le critère de Cauchy et la notion de semi-convergence sont hors programme.
Une série numérique absolument convergente est convergente.	Somme d'une suite sommable.
Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.	

★

★ Fonctions de deux variables

Le but de cette section, dont le contenu sera entièrement repris dans un cadre plus général en seconde année, est de familiariser les étudiants avec les calculs sur les dérivées partielles, notamment avec la « règle de la chaîne », et de développer une vision géométrique des fonctions de deux variables. Le point de vue est donc essentiellement pratique. Toute extension et tout développement théorique supplémentaire sont hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonctions continues	
Boules de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne canonique. Ouverts. Continuité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Représentation graphique d'une fonction de deux variables par une surface. La notion de continuité est introduite uniquement en vue du calcul différentiel. L'étude de la continuité d'une fonction n'est pas un objectif du programme.
b) Dérivées partielles	
Dérivées partielles en un point d'une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$. L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité.
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert.	Définition par la continuité des dérivées partielles. La notion de fonction différentiable est hors programme.
Développement limité à l'ordre 1 au point (x_0,y_0) d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$: $$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k+o(\\|(h,k)\\|).$$	Démonstration hors programme. On met en évidence l'idée de l'approximation linéaire de $f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$ et l'interprétation de $$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$ comme équation du plan tangent en (x_0,y_0) à la surface d'équation $z=f(x,y)$.
Gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Expression du développement limité à l'aide du gradient.	Notation $\nabla f(x_0,y_0)$. Le gradient de f en (x_0,y_0) définit la direction dans laquelle f croît le plus vite.
c) Dérivées partielles et composées	
Dérivée selon un vecteur. Règle de la chaîne : les fonctions considérées étant de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction $t\longmapsto f(x(t),y(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(x(t),y(t))\big)=\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t)$$	Expression à l'aide du gradient $\nabla f(x_0,y_0)\cdot u$. Interprétation comme dérivée de f le long d'un arc γ donné par $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ et expression à l'aide du gradient $$(f\circ\gamma)'(t)=\nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t).$$ où $\gamma'(t)$ est défini par $(x'(t),y'(t))$. Le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f.
Sous les hypothèses appropriées, dérivées partielles de $(u,v)\longmapsto f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$.	
d) Extremums	
Maximum et minimum, local ou global d'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$. Point critique. Tout extremum local d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est un point critique.	Exemples d'étude de points critiques. ★

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Physique, technologie et sciences de l'ingénieur (PTSI)

Annexe 2
Programme de physique-chimie

Programme de physique-chimie de la voie PTSI

Préambule

Objectifs de formation

Le programme de physique-chimie de la classe de PTSI est conçu comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités scientifiques préparant les étudiants à la deuxième année de classe préparatoire et, au-delà, à un cursus d'ingénieur, de chercheur ou d'enseignant. Il s'agit de renforcer chez l'étudiant les compétences déjà travaillées au lycée inhérentes à la pratique de la démarche scientifique : observer et s'approprier, analyser et modéliser, réaliser et valider, et enfin communiquer et valoriser ses résultats.

L'acquisition de ce socle par les étudiants constitue un objectif prioritaire pour l'enseignant.
Parce que la physique et la chimie sont avant tout des sciences expérimentales qui développent la curiosité, la créativité et l'analyse critique, l'expérience est au cœur de son enseignement, que ce soit en cours ou lors des séances de travaux pratiques. Les activités expérimentales habituent les étudiants à se confronter au réel, comme ils auront à le faire dans l'exercice de leur métier.

De même, l'introduction de capacités numériques dans le programme prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation. Elles offrent aux étudiants la possibilité d'effectuer une modélisation avancée du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires.

La démarche de modélisation occupe également une place centrale dans le programme pour former les étudiants à établir, de manière autonome, un lien fait d'allers-retours entre le « monde » des objets, des expériences, des faits, et celui des modèles et des théories. L'enseignant doit rechercher un point d'équilibre entre des approches complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative. La construction d'un modèle passe aussi par l'utilisation maîtrisée des mathématiques dont un des fondateurs de la physique expérimentale, Galilée, énonçait déjà qu'elles sont le langage dans lequel est écrit le monde.

Enfin, l'autonomie et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à exercer les étudiants à mobiliser de façon complémentaire connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Organisation du programme

Le programme est organisé en deux parties.

Dans la première partie, intitulée **« Formation expérimentale »,** sont décrits les objectifs de formation sur le thème « Mesures et incertitudes » ainsi que les méthodes et les capacités expérimentales que les étudiants doivent maîtriser à la fin de l'année scolaire. Leur mise en œuvre doit notamment s'appuyer sur des problématiques concrètes identifiées en gras dans la seconde partie du programme intitulée « **Contenus thématiques** ». Elles doivent être programmées par l'enseignant de façon à assurer un apprentissage progressif de l'ensemble des capacités attendues.

La seconde partie, intitulée « **Contenus thématiques »** est structurée autour de quatre thèmes : « ondes et signaux », « mouvements et interactions », « l'énergie : conversions et transferts » et « constitution et transformations de la matière ». La présentation en deux colonnes (« notions et

contenus » et « capacités exigibles ») met en valeur les éléments clefs constituant le socle de connaissances et de capacités dont l'assimilation par tous les étudiants est requise. La progression dans les contenus disciplinaires est organisée en deux semestres. Pour faciliter la progressivité des acquisitions, au premier semestre les grandeurs physiques introduites sont essentiellement des grandeurs scalaires dépendant du temps et éventuellement d'une variable d'espace.
Certains items de cette seconde partie**, identifiés en caractères gras**, se prêtent particulièrement à une approche expérimentale. Ils doivent être abordés en priorité lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant doivent être privilégiées. La présence de capacités numériques explicitées atteste par ailleurs de la volonté de renforcer ce volet de la formation des étudiants.

Trois annexes sont consacrées d'une part au matériel nécessaire à la mise en œuvre des programmes, d'autre part aux outils mathématiques et aux outils numériques que les étudiants doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de physique-chimie à la fin de l'année de la classe de PTSI.

Ce programme précise les objectifs de formation à atteindre pour tous les étudiants. Il n'impose en aucun cas une progression pour chacun des deux semestres ; celle-ci relève de la liberté pédagogique de l'enseignant.

Les compétences travaillées dans le cadre de la démarche scientifique

L'ensemble des activités proposées en classe préparatoire aux grandes écoles – activités expérimentales, résolutions de problèmes, TIPE, etc. – permet de travailler les compétences de la démarche scientifique qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences. L'ordre de présentation de ces compétences ne préjuge pas d'un ordre de mobilisation de ces dernières lors d'une activité.

Les compétences doivent être acquises à l'issue de la formation en CPGE. Elles nécessitent d'être régulièrement mobilisées par les étudiants et sont évaluées en s'appuyant, par exemple, sur l'utilisation de grilles d'évaluation.

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier	- Rechercher, extraire et organiser l'information en lien avec la situation étudiée. - Identifier la complémentarité d'informations présentées sous des formes différentes (texte, graphe, tableau, etc.). - Énoncer ou dégager une problématique scientifique. - Représenter la situation par un schéma modèle. - Identifier les grandeurs pertinentes, leur attribuer un symbole. - Relier le problème à une situation modèle connue. - Acquérir de nouvelles connaissances en autonomie.
Analyser/ Raisonner	- Formuler des hypothèses. - Décomposer un problème en plusieurs problèmes plus simples. - Proposer une stratégie pour répondre à une problématique. - Choisir, concevoir, justifier un protocole, un dispositif expérimental, un modèle ou des lois physiques. - Évaluer des ordres de grandeur. - Identifier les idées essentielles d'un document et leurs articulations.

	- Relier qualitativement ou quantitativement différents éléments d'un ou de documents.
Réaliser	- Mettre en œuvre les étapes d'une démarche, un protocole, un modèle. - Extraire une information d'un texte, d'un graphe, d'un tableau, d'un schéma, d'une photo. - Schématiser un dispositif, une expérience, une méthode de mesure. - Utiliser le matériel et les produits de manière adaptée en respectant des règles de sécurité. - Effectuer des représentations graphiques à partir de données. - Mener des calculs analytiques ou à l'aide d'un langage de programmation, effectuer des applications numériques. - Conduire une analyse dimensionnelle.
Valider	- Exploiter des observations, des mesures en estimant les incertitudes. - Confronter les résultats d'un modèle à des résultats expérimentaux, à des données figurant dans un document, à ses connaissances. - Confirmer ou infirmer une hypothèse, une information. - Analyser les résultats de manière critique. - Repérer les points faibles d'une argumentation (contradiction, partialité, incomplétude, etc.). - Proposer des améliorations de la démarche ou du modèle.
Communiquer	- À l'écrit comme à l'oral : o présenter les étapes de sa démarche de manière synthétique, organisée et cohérente. o rédiger une synthèse, une analyse, une argumentation. o utiliser un vocabulaire scientifique précis et choisir des modes de représentation adaptés (schémas, graphes, cartes mentales, etc.). - Écouter, confronter son point de vue.

Le niveau de maîtrise de ces compétences dépend de **l'autonomie et de l'initiative** requises dans les activités proposées aux étudiants sur les notions et capacités exigibles du programme.
La mise en œuvre des programmes doit aussi être l'occasion d'aborder avec les étudiants des questions liées à l'histoire de l'évolution des idées, des modèles et des théories en physique-chimie, à des questions liées à la recherche scientifique actuelle et à des enjeux citoyens comme la responsabilité individuelle et collective, la **sécurité** pour soi et pour autrui, l'**environnement** et le **développement durable** ou encore le **réchauffement climatique**.

Repères pour l'enseignement

Dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant organise son enseignement en respectant trois grands principes directeurs :

- privilégier la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances, des capacités et des compétences est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Les supports pédagogiques utilisés doivent notamment favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie des étudiants. L'investigation expérimentale et la résolution de problèmes favorisent cette mise en activité ;
- recourir à la mise en contexte des contenus scientifiques : le questionnement scientifique peut être introduit à partir de phénomènes naturels, de procédés industriels ou d'objets

technologiques. Le recours à des approches documentaires est un moyen pertinent pour diversifier les supports d'accès à l'information scientifique et technologique et ainsi former l'étudiant à mieux en appréhender la complexité et à apprendre par lui-même. Lorsque le thème traité s'y prête, l'enseignant peut le mettre en perspective avec l'histoire des sciences et des techniques, avec des questions d'actualité ou des débats d'idées ;
- contribuer à la nécessaire mise en cohérence des enseignements scientifiques ; la progression en physique-chimie doit être articulée avec celles mises en œuvre dans les autres disciplines scientifiques : mathématiques, informatique, sciences industrielles de l'ingénieur.

Concernant l'évaluation, qui vise à mesurer le degré de maîtrise du socle ainsi défini et le niveau d'autonomie et d'initiative des étudiants, l'enseignant veille soigneusement à identifier les compétences et les capacités mobilisées dans les activités proposées afin d'en élargir le plus possible le spectre.

Enfin, le professeur veille aussi à développer chez les étudiants des compétences transversales et préprofessionnelles relatives aux capacités suivantes :
- identifier les différents champs professionnels et les parcours pour y accéder ;
- valoriser ses compétences scientifiques et techniques en lien avec son projet de poursuite d'études ou professionnel.

Formation expérimentale

Cette partie est spécifiquement dédiée à la mise en œuvre de la formation expérimentale des étudiants lors des séances de travaux pratiques.

Dans un premier temps, elle précise les connaissances et savoir-faire qui doivent être acquis dans le domaine de la mesure et de l'évaluation des incertitudes. Elle présente ensuite de façon détaillée l'ensemble des capacités expérimentales qui doivent être acquises en autonomie par les étudiants à l'issue de leur première année de CPGE. Enfin, elle aborde la question de la prévention du risque au laboratoire de physique-chimie.

Une liste de matériel, que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice succincte, figure dans l'annexe 1 du présent programme.

1. Mesures et incertitudes

Les notions et capacités identifiées ci-dessous couvrent les deux années de formation en classe préparatoire aux grandes écoles ; leur pleine maîtrise est donc un objectif de fin de seconde année.
L'accent est mis sur la variabilité de la mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type. La comparaison entre deux valeurs mesurées d'une même grandeur physique est conduite au moyen de l'écart normalisé, l'objectif principal étant de développer l'esprit critique des étudiants en s'appuyant sur un critère quantitatif. Le même esprit prévaut dans l'analyse des résultats d'une régression linéaire qui ne saurait s'appuyer sur l'exploitation non raisonnée du coefficient de corrélation (R^2).
Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
Incertitudes-types composées.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

2. Mesures et capacités expérimentales

Cette partie présente l'ensemble des capacités expérimentales que les étudiants doivent acquérir au cours de l'année durant les séances de travaux pratiques. Une séance de travaux pratiques s'articule autour d'une problématique, que les thèmes – repérés en gras dans la colonne « capacités exigibles » de la partie « **Contenus thématiques** » du programme – peuvent servir à définir. Le travail de ces capacités et leur consolidation se poursuit en seconde année.

Dans le tableau ci-dessous, les différentes capacités à acquérir sont groupées par domaines thématiques ou transversaux. Cela ne signifie pas qu'une activité expérimentale se limite à un seul domaine. La capacité à former une image de bonne qualité, par exemple, peut être mobilisée au cours d'une expérience de mécanique ou de thermodynamique, cette transversalité de la formation devant être un moyen, entre d'autres, de favoriser l'autonomie et la prise d'initiative.

Nature et méthodes	Capacités exigibles
1. Mesures de longueurs et d'angles Longueurs : sur un banc d'optique.	Mettre en œuvre une mesure de longueur par déplacement d'un viseur entre deux positions.
Longueurs : à partir d'une photo ou d'une vidéo.	Évaluer, par comparaison à un étalon, une longueur (ou les coordonnées d'une position) sur une image numérique et en estimer la précision.
Angles : avec un goniomètre.	Utiliser un viseur à frontale fixe, une lunette autocollimatrice. Utiliser des vis micrométriques et un réticule.
Longueurs d'onde.	Étudier un spectre à l'aide d'un spectromètre à fibre optique. Mesurer une longueur d'onde optique à l'aide d'un goniomètre à réseau. Mesurer une longueur d'onde acoustique à l'aide d'un support gradué et d'un oscilloscope bicourbe.
2. Mesures de temps et de fréquences Fréquence ou période : mesure au fréquencemètre numérique, à l'oscilloscope ou *via* une carte d'acquisition.	Mettre en œuvre une méthode de mesure de fréquence ou de période.
Analyse spectrale.	Choisir de façon cohérente la fréquence d'échantillonnage et la durée totale d'acquisition. Effectuer l'analyse spectrale d'un signal périodique à l'aide d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition.
Décalage temporel/déphasage à l'aide d'un oscilloscope numérique.	Reconnaître une avance ou un retard de phase. Passer d'un décalage temporel à un déphasage et inversement. Repérer précisément le passage par un déphasage de 0 ou π en mode XY.

3. Électricité Mesurer une tension : - mesure directe au voltmètre numérique ou à l'oscilloscope numérique. Mesurer l'intensité d'un courant : - mesure directe à l'ampèremètre numérique ; - mesure indirecte à l'oscilloscope aux bornes d'une résistance adaptée. Mesurer une résistance ou une impédance : - mesure directe à l'ohmmètre/capacimètre ; - mesure indirecte à l'oscilloscope ou au voltmètre sur un diviseur de tension.	Capacités communes à l'ensemble des mesures électriques : - expliquer le lien entre résolution, calibre, nombre de points de mesure ; - préciser la perturbation induite par l'appareil de mesure sur le montage et ses limites (bande passante, résistance d'entrée) ; - définir la nature de la mesure effectuée (valeur efficace, valeur moyenne, amplitude, valeur crête à crête, etc.).
Produire un signal électrique analogique périodique simple à l'aide d'un GBF.	Obtenir un signal de valeur moyenne, de forme, d'amplitude et de fréquence données.
Agir sur un signal électrique à l'aide des fonctions simples suivantes : - isolation, amplification, filtrage ; - sommation, intégration.	Gérer, dans un circuit électronique, les contraintes liées à la liaison entre les masses. Mettre en œuvre les fonctions de base de l'électronique réalisées par des blocs dont la structure ne fait pas l'objet d'une étude spécifique. Associer ces fonctions de base pour réaliser une fonction complexe en gérant les contraintes liées aux impédances d'entrée et/ou de sortie des blocs.
4. Optique Former une image.	Éclairer un objet de manière adaptée. Choisir une ou plusieurs lentilles en fonction des contraintes expérimentales, et choisir leur focale de façon raisonnée. Optimiser la qualité d'une image (alignement, limitation des aberrations, etc.). Estimer une valeur approchée d'une distance focale.
Créer ou repérer une direction de référence.	Régler et mettre en œuvre une lunette autocollimatrice et un collimateur.
Analyser une image numérique.	Acquérir (webcam, appareil photo numérique, etc.) l'image d'un phénomène physique sous forme numérique, et l'exploiter à l'aide d'un logiciel pour conduire l'étude d'un phénomène.
5. Mécanique Mesurer une masse, un moment d'inertie.	Utiliser une balance de précision. Repérer la position d'un centre de masse et mesurer un moment d'inertie à partir d'une période.

Visualiser et décomposer un mouvement.	Mettre en œuvre une méthode de stroboscopie. Enregistrer un phénomène à l'aide d'une caméra numérique et repérer la trajectoire à l'aide d'un logiciel dédié, en déduire la vitesse et l'accélération.
Mesurer une accélération.	Mettre en œuvre un accéléromètre, par exemple avec l'aide d'un microcontrôleur.
Quantifier une action.	Utiliser un dynamomètre.
6. Thermodynamique Mesurer une pression.	 Mettre en œuvre un capteur, en identifiant son caractère différentiel ou absolu.
Mesurer une température.	Mettre en œuvre un capteur de température, par exemple avec l'aide d'un microcontrôleur. Mettre en œuvre un capteur infrarouge. Choisir le capteur en fonction de ses caractéristiques (linéarité, sensibilité, gamme de fonctionnement, temps de réponse), et du type de mesures à effectuer.
Effectuer des bilans d'énergie.	Mettre en œuvre une technique de calorimétrie.
7. Mesures de grandeurs en chimie Mesurer un volume, une masse, un pH, une conductance et une conductivité, une absorbance.	 Sélectionner et utiliser le matériel adapté à la précision requise. Distinguer les instruments de verrerie In et Ex. Préparer une solution de concentration en masse ou en quantité de matière donnée à partir d'un solide, d'un liquide, d'une solution de composition connue avec le matériel approprié. Utiliser les méthodes et le matériel adéquats pour transférer l'intégralité du solide ou du liquide pesé. Utiliser les appareils de mesure (masse, pH, conductance) en s'aidant d'une notice. Étalonner une chaîne de mesure si nécessaire.

8. Analyses qualitatives et quantitatives Effectuer des tests qualitatifs**.**	Proposer ou mettre en œuvre, à partir d'informations fournies, des tests qualitatifs préalables à l'élaboration d'un protocole.
Réaliser des dosages par étalonnage.	Déterminer une concentration en exploitant la mesure de grandeurs physiques caractéristiques de l'espèce ou en construisant et en utilisant une courbe d'étalonnage. Déterminer une concentration ou une quantité de matière par spectrophotométrie UV-Visible.
Réaliser des dosages par titrage. Titrages directs, indirects. Équivalence. Titrages simples, successifs, simultanés. Méthodes expérimentales de suivi d'un titrage : pH-métrie, conductimétrie, indicateurs colorés de fin de titrage.	Identifier et exploiter la réaction support du titrage (recenser les espèces présentes dans le milieu au cours du titrage, repérer l'équivalence, justifier qualitativement l'allure de la courbe ou le changement de couleur observé). Proposer ou justifier le protocole d'un titrage à l'aide de données fournies ou à rechercher. Mettre en œuvre un protocole expérimental correspondant à un titrage direct ou indirect. Choisir et utiliser un indicateur coloré de fin de titrage.
Exploiter des courbes expérimentales de titrage.	Exploiter une courbe de titrage pour déterminer la concentration en espèce titrée. Utiliser un logiciel de simulation pour déterminer des courbes de distribution et confronter la courbe de titrage simulée à la courbe expérimentale. Distinguer l'équivalence et le repérage du virage d'un indicateur coloré de fin de titrage.
Mettre en œuvre des suivis cinétiques de transformations chimiques. Suivi en continu de l'évolution temporelle d'une grandeur physique.	Exploiter les résultats d'un suivi temporel de concentration pour déterminer les caractéristiques cinétiques d'une réaction. Proposer et mettre en œuvre des conditions expérimentales permettant la simplification de la loi de vitesse. Déterminer la valeur d'une énergie d'activation.

3. Prévention du risque au laboratoire de physique-chimie

Les étudiants doivent prendre conscience du risque lié à la manipulation et au rejet des produits chimiques. L'apprentissage et le respect des règles de sécurité chimique, électrique, optique et celles liées à la pression et à la température leur permettent de prévenir et de minimiser ce risque. Futurs ingénieurs, chercheurs, enseignants, ils doivent être sensibilisés au respect de la législation et à l'impact de leur activité sur l'environnement.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Prévention des risques au laboratoire	Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire.

	Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.
- **Risque chimique** Règles de sécurité au laboratoire. Classes et catégories de danger. Pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques. Mentions de danger (H) et conseils de prudence (P). Fiches de sécurité.	Relever les indications sur le risque associé au prélèvement, au mélange et au stockage des produits chimiques et adopter une attitude responsable lors de leur utilisation.
- **Risque électrique**	Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation d'appareils électriques.
- **Risque optique**	Utiliser les sources laser et les diodes électroluminescentes de manière adaptée.
- **Risques liés à la pression et à la température**	Adopter une attitude responsable lors de manipulations de corps chauds ou de dispositifs engageant des hautes ou des basses pressions.
4. Prévention de l'impact environnemental Traitement et rejet des espèces chimiques.	Adapter le mode d'élimination d'une espèce chimique ou d'un mélange en fonction des informations recueillies sur la toxicité ou les risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.

Contenus thématiques

L'organisation des semestres est la suivante.

Premier semestre

Thème 1 : ondes et signaux (1)

1.1. Formation des images
1.2. Signaux électriques dans l'ARQS
1.3. Circuit linéaire du premier ordre
1.4. Oscillateurs libres et forcés
1.5. Filtrage linéaire
1.6. Propagation d'un signal

Thème 2 : mouvements et interactions (1)

2.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point
2.2. Lois de Newton
2.3. Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

Thème 4 : constitution et transformations de la matière (1)

4.1. Transformations de la matière
- 4.1.1. Description d'un système et de son évolution vers un état final
- 4.1.2. Évolution temporelle d'un système chimique

4.2. Relations entre la structure des entités chimiques et les propriétés physiques macroscopiques
4.2.1 Structure des entités chimiques
4.2.2. Relations structure des entités - propriétés physiques macroscopiques

Deuxième semestre

Thème 2 : mouvements et interactions (2)
2.4. Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétostatique, uniformes et stationnaires
2.5. Moment cinétique
2.6. Mouvements dans un champ de force centrale conservatif
2.7. Mouvement d'un solide

Thème 3 : l'énergie : conversions et transferts
3.1. Descriptions microscopique et macroscopique d'un système à l'équilibre
3.2. Énergie échangée par un système au cours d'une transformation
3.3. Premier principe. Bilans d'énergie
3.4. Deuxième principe. Bilans d'entropie
3.5. Machines thermiques

Thème 1 : ondes et signaux (2)
1.7. Induction et forces de Laplace
1.7.1. Champ magnétique
1.7.2. Actions d'un champ magnétique
1.7.3. Lois de l'induction
1.7.4. Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps
1.7.5. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

Thème 4 : constitution et transformations de la matière (2)
4.3. Structure et propriétés physiques des solides
4.4. Transformations chimiques en solution aqueuse
4.4.1. Réactions acide-base et de précipitation
4.4.2. Réactions d'oxydo-réduction

A. Premier semestre

Thème 1 : ondes et signaux (1)

La partie **1.1. « Formation des images »** traite de la formation des images et propose une ouverture sur la notion de guidage de la lumière par une fibre optique. Cette partie est l'occasion d'interroger le concept de modèle en physique et d'en identifier les limites de validité. Elle permet également d'aborder de nombreuses applications technologiques ; certaines sont précisées par le programme, d'autres sont laissées à l'appréciation des enseignants (lunette, microscope, optique d'un smartphone, etc.). L'approche expérimentale doit être privilégiée dans ce domaine de la physique qui s'y prête particulièrement bien.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.1. Formation des images	
Sources lumineuses Modèle de la source ponctuelle monochromatique. Spectre.	Caractériser une source lumineuse par son spectre. Relier la longueur d'onde dans le vide et la couleur.
Modèle de l'optique géométrique Modèle de l'optique géométrique. Notion de rayon lumineux. Indice d'un milieu transparent.	Définir le modèle de l'optique géométrique. Indiquer les limites du modèle de l'optique géométrique.
Réflexion, réfraction. Lois de Snell-Descartes.	Établir la condition de réflexion totale.
Conditions de l'approximation de Gauss et applications Stigmatisme. Miroir plan.	Construire l'image d'un objet par un miroir plan.
Conditions de l'approximation de Gauss.	Énoncer les conditions de l'approximation de Gauss et ses conséquences. Relier le stigmatisme approché aux caractéristiques d'un détecteur.
Lentilles minces dans l'approximation de Gauss.	Définir les propriétés du centre optique, des foyers principaux et secondaires, de la distance focale, de la vergence. Construire l'image d'un objet situé à distance finie ou infinie à l'aide de rayons lumineux, identifier sa nature réelle ou virtuelle. Exploiter les formules de conjugaison et de grandissement transversal de Descartes et de Newton. Établir et utiliser la condition de formation de l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergente.
Modèles de quelques dispositifs optiques L'œil. Punctum proximum, punctum remotum.	Modéliser l'œil comme l'association d'une lentille de vergence variable et d'un capteur plan fixe. Citer les ordres de grandeur de la limite de résolution angulaire et de la plage d'accommodation.
L'appareil photographique.	Modéliser l'appareil photographique comme l'association d'une lentille et d'un capteur. Construire géométriquement la profondeur de champ pour un réglage donné. **Étudier l'influence de la focale, de la durée d'exposition, du diaphragme sur la formation de l'image.**
La fibre optique à saut d'indice.	Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre à saut d'indice.

La partie **1.2.** « **Signaux électriques dans l'ARQS** » pose les bases nécessaires à l'étude des circuits dans l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS). Si le programme se concentre sur l'étude des dipôles R, L et C, il est possible, lors des travaux pratiques, de faire appel à des composants intégrés ou non linéaires (filtres à capacité commutée, échantillonneur-bloqueur, diodes, photorésistances, etc.) dès lors qu'aucune connaissance préalable n'est nécessaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.2. Signaux électriques dans l'ARQS	
Charge électrique, intensité du courant. Potentiel, référence de potentiel, tension. Puissance.	Justifier que l'utilisation de grandeurs électriques continues est compatible avec la quantification de la charge électrique. Exprimer l'intensité du courant électrique en termes de débit de charge. Exprimer la condition d'application de l'ARQS en fonction de la taille du circuit et de la fréquence. Relier la loi des nœuds au postulat de la conservation de la charge. Utiliser la loi des mailles. Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur. Citer les ordres de grandeur des intensités et des tensions dans différents domaines d'application.
Dipôles : résistances, condensateurs, bobines, sources décrites par un modèle linéaire.	Utiliser les relations entre l'intensité et la tension. Citer des ordres de grandeurs des composants R, L, C. Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance. Exprimer l'énergie stockée dans un condensateur ou une bobine. Modéliser une source en utilisant la représentation de Thévenin.
Association de deux résistances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux résistances par une résistance équivalente. Établir et exploiter les relations des diviseurs de tension ou de courant.
Résistance de sortie, résistance d'entrée.	**Évaluer une résistance d'entrée ou de sortie à l'aide d'une notice ou d'un appareil afin d'appréhender les conséquences de leurs valeurs sur le fonctionnement d'un circuit.** **Étudier l'influence des résistances d'entrée ou de sortie sur le signal délivré par un GBF, sur la mesure effectuée par un oscilloscope ou un multimètre.**

Les deux parties **1.3.** « **Circuit linéaire du premier ordre** » et **1.4.** « **Oscillateurs libres et forcés** » abordent l'étude des circuits linéaires du premier et du second ordre en régime libre puis forcé. Il s'agit avant tout de comprendre les principes des méthodes mises en œuvre et leur exploitation pour étudier le comportement d'un signal traversant un système linéaire. Le choix a été fait de présenter simultanément les oscillateurs électriques et mécaniques de manière à mettre l'accent sur les analogies formelles et comportementales.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.3. Circuit linéaire du premier ordre	
Régime libre, réponse à un échelon de tension.	Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension. Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine. Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles. Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. **Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un circuit linéaire du premier ordre et analyser ses caractéristiques. Confronter les résultats expérimentaux aux expressions théoriques.** <u>Capacité numérique</u> : mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.4. Oscillateurs libres et forces	
Oscillateur harmonique. Exemples du circuit LC et de l'oscillateur mécanique.	Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales. Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation. Réaliser un bilan énergétique.
Circuit RLC série et oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux.	Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.

	Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité. Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité. **Mettre en évidence la similitude des comportements des oscillateurs mécanique et électronique.** **Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un système linéaire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.**
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.
Impédances complexes.	Établir et citer l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.
Association de deux impédances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale. Résonance.	Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé. Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité. Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental visant à caractériser un phénomène de résonance.**

L'objectif principal de la partie **1.5.** « **Filtrage linéaire** » n'est pas de former les étudiants aux aspects techniques des calculs des fonctions de transfert et des tracés de diagrammes de Bode mais de mettre l'accent sur l'interprétation des propriétés du signal de sortie connaissant celles du signal d'entrée et d'appréhender le rôle central de la linéarité des systèmes utilisés.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.5. Filtrage linéaire	
Signaux périodiques.	Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales. Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal. Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal. Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.

Fonction de transfert harmonique. Diagramme de Bode.	Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1. Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique. Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'utilité des fonctions de transfert pour un système linéaire à un ou plusieurs étages.**
Modèles de filtres passifs : passe-bas et passe-haut d'ordre 1, passe-bas et passe-bande d'ordre 2.	Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges. Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyenneur, intégrateur, ou dérivateur. Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée. Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.). **Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale.** **Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.** <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.

Dans la partie **1.6.** consacrée à la « **Propagation d'un signal** », il est recommandé de s'appuyer sur une approche expérimentale ou sur des logiciels de simulation pour permettre aux étudiants de faire le lien entre l'observation de signaux qui se propagent et la traduction mathématique de cette propagation, sans qu'aucune référence ne soit faite à une équation d'onde. L'étude de la somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence et du phénomène d'interférences associé permet de mettre en évidence le rôle essentiel joué par le déphasage entre les deux signaux dans le signal résultant. L'étude des interférences lumineuses est l'occasion d'introduire la notion de différence de chemin optique et de la relier au déphasage.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.6. Propagation d'un signal	
Exemples de signaux. Signal sinusoïdal.	Identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux acoustiques, électriques, électromagnétiques.
Propagation d'un signal dans un milieu illimité, non dispersif et transparent Onde progressive dans le cas d'une propagation unidimensionnelle non dispersive. Célérité, retard temporel.	Écrire les signaux sous la forme f(x-ct) ou g(x+ct). Écrire les signaux sous la forme f(t-x/c) ou g(t+x/c). Prévoir, dans le cas d'une onde progressive, l'évolution temporelle à position fixée et l'évolution spatiale à différents instants.
Modèle de l'onde progressive sinusoïdale unidimensionnelle. Vitesse de phase, déphasage, double périodicité spatiale et temporelle.	Citer quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines acoustique, mécanique et électromagnétique. Établir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la vitesse de phase. Relier le déphasage entre les signaux perçus en deux points distincts au retard dû à la propagation. **Mesurer la vitesse de phase, la longueur d'onde et le déphasage dû à la propagation d'un phénomène ondulatoire.**
Milieux dispersifs ou non dispersifs.	Définir un milieu dispersif. Citer des exemples de situations de propagation dispersive et non dispersive.
Phénomène d'interférences Interférences entre deux ondes acoustiques ou mécaniques de même fréquence.	Exprimer les conditions d'interférences constructives ou destructives. Déterminer l'amplitude de l'onde résultante en un point en fonction du déphasage.
Interférences entre deux ondes lumineuses de même fréquence. Exemple du dispositif des trous d'Young éclairé par une source monochromatique. Différence de chemin optique. Conditions d'interférences constructives ou destructives. Formule de Fresnel.	Relier le déphasage entre les deux ondes à la différence de chemin optique. Établir l'expression littérale de la différence de chemin optique entre les deux ondes. Exploiter la formule de Fresnel fournie pour décrire la répartition d'intensité lumineuse. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental pour visualiser et caractériser le phénomène d'interférences de deux ondes.**

Thème 2 : mouvements et interactions (1)

La partie **2.1** « **Description et paramétrage du mouvement d'un point »** vise notamment à mettre en place les principaux systèmes de coordonnées : cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques. Le but est de permettre aux étudiants de disposer d'outils efficaces pour décrire une grande variété de mouvements de points. Pour atteindre cet objectif, il convient de les familiariser progressivement avec les projections et dérivations de vecteurs ainsi qu'avec l'algébrisation des grandeurs dans un contexte relevant de la physique. Enfin, cette partie est l'occasion de procéder à des analyses qualitatives des comportements cinématiques de systèmes réels assimilés à un point, notamment sur les exemples simples des mouvements rectilignes et circulaires.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point	
Repérage dans l'espace et dans le temps Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.	Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
Cinématique du point Description du mouvement d'un point. Vecteurs position, vitesse et accélération. Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.	Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques. Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.
	Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.
Mouvement à vecteur accélération constant.	Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
Mouvement circulaire uniforme et non uniforme.	Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.
Repérage d'un point dont la trajectoire est connue. Vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour une trajectoire plane.	Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle.
	Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs vitesse et accélération.

Dans la partie **2.2**. intitulée « **Lois de Newton »**, on cherche d'abord à renforcer les compétences des étudiants relatives à la mise en équations d'un problème, qu'il s'agisse des étapes de bilans de forces ou de projection de la deuxième loi de Newton sur la base choisie. On cherche par ailleurs, sur l'exemple de quelques mouvements simples, à renforcer les compétences d'analyse qualitative d'une équation différentielle : stabilité des solutions, positions d'équilibre, type d'évolution, durée ou période typique d'évolution, etc. Cette pratique s'articule avec l'utilisation d'un langage de programmation pour résoudre des équations différentielles. Enfin, il s'agit aussi de confronter les étudiants aux limites de validité de certains modèles de forces, et ainsi de donner toute leur importance aux étapes de modélisation et de validation d'un modèle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.2. Lois de Newton	
Quantité de mouvement Masse d'un système. Conservation de la masse pour système fermé.	Exploiter la conservation de la masse pour un système fermé.
Quantité de mouvement d'un point et d'un système de points. Lien avec la vitesse du centre de masse d'un système fermé.	Établir l'expression de la quantité de mouvement pour un système de deux points sous la forme : **p**=m**v**(G).
Première loi de Newton : principe d'inertie. Référentiels galiléens.	Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.
Notion de force. Troisième loi de Newton.	Établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.
Deuxième loi de Newton.	Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre de masse d'un système fermé dans un référentiel galiléen. **Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant d'étudier une loi de force par exemple à l'aide d'un microcontrôleur.**
Force de gravitation. Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète. Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme.	Etudier le mouvement d'un système modélisé par un point matériel dans un champ de pesanteur uniforme en l'absence de frottement.
Modèles d'une force de frottement fluide. Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute.	Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique. Écrire une équation adimensionnée. **Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure de frottements fluides.**
Tension d'un fil. Pendule simple.	Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.

La partie **2.3. « Approche énergétique du mouvement d'un point matériel** » vise à construire une démarche alternative et complémentaire pour l'étude d'une situation relevant de la mécanique – et plus généralement de la physique – fondée sur la conservation de certaines grandeurs – ici, l'énergie mécanique. Cette approche est l'occasion d'illustrer la capacité prédictive des analyses graphiques et numériques, par exemple pour pouvoir décrire un comportement à partir d'une représentation graphique de l'énergie potentielle dans le cas d'un mouvement conservatif.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.3. Approche énergétique du mouvement d'un point matériel	

Puissance, travail et énergie cinétique Puissance et travail d'une force dans un référentiel.	Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.
Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen, dans le cas d'un système modélisé par un point matériel.	Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.
Champ de force conservative et énergie potentielle Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle. Gradient.	Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique. Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie. Déduire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.
Énergie mécanique Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif.	Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.
Mouvement conservatif à une dimension.	Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
Positions d'équilibre. Stabilité.	Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.
Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.	Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre. <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non-linéaire et faire apparaître l'effet des termes non-linéaires.

Thème 4 : constitution et transformations de la matière (1)

4.1. Transformations de la matière

L'objectif de cette partie est d'amener les étudiants à mobiliser de manière autonome les notions et modèles pour décrire, au niveau macroscopique, un système physico-chimique et son évolution. Il convient que les problématiques abordées, les illustrations et les applications prennent largement appui sur des transformations chimiques rencontrées dans la vie courante, au laboratoire, en milieu industriel ou dans le monde du vivant.

Les concepts développés dans la partie **4.1.1. « Description d'un système et de son évolution vers un état final »** permettent d'envisager l'optimisation des transformations ou des analyses. L'étude quantitative de l'état final d'un système, siège d'une transformation chimique, est réalisée à partir d'une modélisation par une seule réaction chimique symbolisée par une équation de réaction à laquelle est associée une constante thermodynamique d'équilibre. Il s'agit de prévoir le sens d'évolution de systèmes homogènes ou hétérogènes et de déterminer leur composition dans l'état final.
Les compétences relatives à cette partie du programme sont ensuite réinvesties au cours de l'année, plus particulièrement au second semestre lors des transformations en solution aqueuse, et en seconde année, notamment dans le cadre de la thermodynamique chimique.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
4.1.1. Description d'un système et de son évolution vers un état final	
Système physico-chimique Espèces physico-chimiques.	Recenser les espèces physico-chimiques présentes dans un système.
Corps purs et mélanges : concentration en quantité de matière, fraction molaire, pression partielle. Composition d'un système physico-chimique	Décrire la composition d'un système à l'aide des grandeurs physiques pertinentes.
Variables intensives et extensives.	Identifier le caractère extensif ou intensif d'une variable.
Transformation chimique d'un système Modélisation d'une transformation par une ou plusieurs réactions chimiques.	Écrire l'équation de la réaction (ou des réactions) qui modélise(nt) une transformation chimique donnée.
Équation de réaction ; constante thermodynamique d'équilibre.	**Déterminer une constante d'équilibre**.
Évolution d'un système lors d'une transformation chimique modélisée par une seule réaction chimique : avancement, activité, quotient réactionnel, critère d'évolution.	Décrire qualitativement et quantitativement un système chimique dans l'état initial ou dans un état d'avancement quelconque. Exprimer l'activité d'une espèce chimique pure ou dans un mélange dans le cas de solutions aqueuses très diluées ou de mélanges de gaz parfaits avec référence à l'état standard. Exprimer le quotient réactionnel. Prévoir le sens de l'évolution spontanée d'un système chimique.
Composition chimique du système dans l'état final : état d'équilibre chimique, transformation totale.	Identifier un état d'équilibre chimique. Déterminer la composition chimique du système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique ou de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. Capacité numérique : déterminer, à l'aide d'un langage de programmation, l'état final d'un système, siège d'une transformation, modélisée par une réaction à partir des conditions initiales et valeur de la constante d'équilibre.

La partie **4.1.2**. « **Évolution temporelle d'un système chimique** » permet de dégager expérimentalement les facteurs cinétiques concentration et température. Cette mise en évidence est prolongée par les premières modélisations macroscopiques d'évolution des concentrations avec des lois

de vitesse d'ordre simple et d'influence de la température avec la loi d'Arrhenius.
Les déterminations d'ordre global ou apparent mettent en œuvre la méthode différentielle ou intégrale, et peuvent s'effectuer à l'aide de logiciels dédiés ou de programmes élaborés en langage de programmation, pour l'exploitation des mesures expérimentales dans le cadre d'un réacteur fermé parfaitement agité.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
4.1.2. Évolution temporelle d'un système chimique	
Cinétique en réacteur fermé de composition uniforme Vitesses de consommation d'un réactif et de formation d'un produit. Vitesse de réaction pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique supposée sans accumulation d'intermédiaires.	Relier la vitesse de réaction, dans les cas où elle est définie, à la vitesse de consommation d'un réactif ou de formation d'un produit.
Lois de vitesse : réactions sans ordre, réactions avec ordre simple (0, 1, 2), ordre global, ordre apparent. Temps de demi-vie d'un réactif, temps de demi-réaction.	Exprimer la loi de vitesse si la réaction chimique admet un ordre et déterminer la valeur de la constante cinétique à une température donnée. Déterminer la vitesse de réaction à différentes dates en utilisant une méthode numérique ou graphique. Déterminer un ordre de réaction à l'aide de la méthode différentielle ou à l'aide des temps de demi-réaction. Confirmer la valeur d'un ordre par la méthode intégrale, en se limitant strictement à une décomposition d'ordre 0, 1 ou 2 d'un unique réactif, ou se ramenant à un tel cas par dégénérescence de l'ordre ou conditions initiales stœchiométriques. **Établir une loi de vitesse à partir du suivi temporel d'une grandeur physique.**
Loi d'Arrhenius ; énergie d'activation.	Déterminer la valeur de l'énergie d'activation d'une réaction chimique à partir de valeurs de la constante cinétique à différentes températures. **Déterminer l'énergie d'activation d'une réaction chimique.**

4.2. Relations entre la structure des entités chimiques et les propriétés physiques macroscopiques
Décrivant la matière au niveau macroscopique par des espèces chimiques aux propriétés physiques et chimiques caractéristiques, le chimiste la modélise au niveau microscopique par des entités chimiques dont les structures électroniques et géométriques permettent d'interpréter et de prévoir ces propriétés.

La partie **4.2.1 « Structure des entités chimiques »** aborde l'étude de la constitution de la matière au niveau microscopique en s'appuyant sur le tableau périodique des éléments, outil essentiel du chimiste, dans l'objectif de développer progressivement les compétences relatives à l'utilisation des informations qu'il contient pour prévoir, dans cette partie, le nombre de liaisons d'un atome et la nature (polaire, ionique) des liaisons chimiques.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.2.1 Structure des entités chimiques	
Modèle de la liaison covalente Liaison covalente localisée. Schéma de Lewis d'une molécule ou d'un ion monoatomique ou d'un ion polyatomique pour les éléments des blocs s et p.	Citer les ordres de grandeur de longueurs et d'énergies de liaisons covalentes. Déterminer, pour les éléments des blocs s et p, le nombre d'électrons de valence d'un atome à partir de la position de l'élément dans le tableau périodique. Établir un schéma de Lewis pertinent pour une molécule ou un ion. Identifier les écarts à la règle de l'octet.
Géométrie et polarité des entités chimiques Électronégativité : liaison polarisée, moment dipolaire, molécule polaire.	Associer qualitativement la géométrie d'une entité à une minimisation de son énergie. Comparer les électronégativités de deux atomes à partir de données ou de leurs positions dans le tableau périodique. Prévoir la polarisation d'une liaison à partir des électronégativités comparées des deux atomes mis en jeu. Relier l'existence ou non d'un moment dipolaire permanent à la structure géométrique donnée d'une molécule. Déterminer direction et sens du vecteur moment dipolaire d'une liaison ou d'une molécule de géométrie donnée.

La partie 4.2.2. « **Relations structure des entités - propriétés physiques macroscopiques** » a pour objectif de permettre l'identification des interactions entre entités moléculaires ou ioniques afin d'interpréter, de prévoir ou de comparer certaines propriétés physiques : température de changement d'état, miscibilité, solubilité.
De nombreuses illustrations et applications dans la vie courante, au niveau du laboratoire ou dans le domaine du vivant peuvent être proposées.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.2.2. Relations structure des entités - propriétés physiques macroscopiques	
Interaction entre entités Interactions de van der Waals. Liaison hydrogène ou interaction par pont hydrogène.	Citer les ordres de grandeur énergétiques des interactions de van der Waals et de liaisons hydrogène. Interpréter l'évolution de températures de changement d'état de corps purs moléculaires à l'aide de l'existence d'interactions de van der Waals ou par pont hydrogène.

Solubilité ; miscibilité. Grandeurs caractéristiques et propriétés de solvants moléculaires : moment dipolaire, permittivité relative, caractère protogène. Mise en solution d'une espèce chimique moléculaire ou ionique.	Associer une propriété d'un solvant moléculaire à une ou des grandeurs caractéristiques. Interpréter la miscibilité ou la non-miscibilité de deux solvants. Interpréter la solubilité d'une espèce chimique moléculaire ou ionique.

B. Second semestre

Thème 2 : mouvements et interactions (2)

Au second semestre, le thème « **Mouvements et interactions** » est structuré en quatre parties : mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétostatique, uniformes et stationnaires ; moment cinétique ; mouvements dans un champ de force centrale conservatif et mouvement d'un solide. Pour les trois dernières parties, l'accent est porté sur les lois conservation du moment cinétique, de l'énergie mécanique et de la quantité de mouvement comme outils d'étude des mouvements.

La partie **2.4.** « **Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétostatique, uniformes et stationnaires »** introduit l'expression de la force de Lorentz ainsi que deux situations de base sur lesquelles les étudiants doivent être autonomes dans la résolution, attestant en cela de l'acquisition d'une certaine aisance à ce stade de leur formation. Des situations physiques variées sont en capacité d'illustrer concrètement cette partie qui ne doit pas se réduire à des développements calculatoires ou des illustrations graphiques.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.4. Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétostatique, uniformes et stationnaires	
Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle ; champs électrique et magnétique.	Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.
Puissance de la force de Lorentz.	Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.	Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant. Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la valeur de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétostatique.	Déterminer le rayon de la trajectoire et le sens de parcours.

La partie **2.5.** « **Moment cinétique** » est l'occasion d'introduire les notions de moment cinétique et de moment d'une force. L'un des objectifs visés est que les étudiants disposent de représentations concrètes qui permettent de donner du sens aux grandeurs vectorielles et scalaires utilisées ; c'est notamment pour cela que le bras de levier est introduit. Comme souligné précédemment, l'accent est mis sur l'identification des situations où le moment cinétique est conservé.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
2.5. Moment cinétique	
Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté.	Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.
Moment cinétique d'un système discret de points par rapport à un axe orienté.	Utiliser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.
Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté.	Exprimer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.
Théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen. Conservation du moment cinétique.	Identifier les cas de conservation du moment cinétique.

La partie **2.6. « Mouvements dans un champ de force centrale conservatif »** est notamment motivée par ses nombreuses applications possibles. On discute la nature de la trajectoire sur un graphe donnant l'énergie potentielle effective et, dans le cas d'un champ newtonien (lois de Kepler), on ne poursuit l'étude que dans le cas d'une trajectoire circulaire. Le caractère elliptique des trajectoires associées à un état lié est affirmé sans qu'aucune étude géométrique des ellipses ne soit prévue ; on utilise dans ce cas les constantes du mouvement (moment cinétique et énergie mécanique) pour exprimer l'énergie de la trajectoire elliptique en fonction du demi-grand axe.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
2.6. Mouvements dans un champ de force centrale conservatif	
Point matériel soumis à un champ de force centrale.	Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique. Établir les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.
Point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif Conservation de l'énergie mécanique. Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.	Exprimer l'énergie mécanique d'un système conservatif ponctuel à partir de l'équation du mouvement. Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective. Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique. <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, obtenir des trajectoires d'un point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif.

Cas particulier du champ newtonien Lois de Kepler.	Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.
Cas particulier du mouvement circulaire : satellite, planète.	Établir que le mouvement est uniforme et déterminer sa période. Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.
Énergie mécanique dans le cas du mouvement circulaire et dans le cas du mouvement elliptique.	Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire. Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.
Satellites terrestres Satellites géostationnaire, de localisation et de navigation, météorologique.	Différencier les orbites des satellites terrestres en fonction de leurs missions. Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.

Concernant le solide en rotation autour d'un axe fixe dans la partie **2.7. « Mouvement d'un solide »**, il s'agit de définir le mouvement en remarquant que tout point du solide décrit un cercle autour de l'axe avec une même vitesse angulaire et de déterminer la vitesse de chaque point en fonction de celle-ci et de la distance à l'axe de rotation.
Des exemples de dynamique du solide sont introduits (translation et rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen), avec toutefois des limitations strictes : l'étude générale d'un mouvement composé d'une translation dans un référentiel galiléen et d'une rotation autour d'un axe fixe dans le référentiel barycentrique ne figure pas au programme. L'étude du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe gardant une direction fixe dans un référentiel galiléen mais pour lequel l'axe de rotation est en mouvement est exclue. Cette partie se termine par l'étude d'un système déformable pour souligner le rôle des forces intérieures dans le bilan énergétique d'un système.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
2.7. Mouvement d'un solide	
Description du mouvement d'un solide dans deux cas particuliers Définition d'un solide.	Différencier un solide d'un système déformable.
Translation.	Reconnaître et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire.
Rotation autour d'un axe fixe.	Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide mobile autour d'un axe fixe Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe : moment d'inertie.	Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni. Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
Couple.	Définir un couple.

Liaison pivot.	Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	Exploiter le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.
Pendule pesant.	Établir l'équation du mouvement. Établir une intégrale première du mouvement. **Réaliser l'étude énergétique d'un pendule pesant et mettre en évidence une diminution de l'énergie mécanique.** <u>Capacité numérique</u> **:** à l'aide d'un langage de programmation, mettre en évidence le non isochronisme des oscillations.
Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté, dans un référentiel galiléen Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.	 Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.
Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Établir, dans ce cas, l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.
Système déformable Théorème de l'énergie cinétique pour un système déformable.	 Prendre en compte le travail des forces intérieures. Utiliser sa nullité dans le cas d'un solide. **Conduire le bilan énergétique du tabouret d'inertie.**

Thème 3 : l'énergie : conversions et transferts

Après avoir mis l'accent sur le passage fondamental d'une réalité microscopique à des grandeurs mesurables macroscopiques, cette partie propose, en s'appuyant sur des exemples concrets, de poursuivre la description et l'étude de la matière à l'échelle macroscopique, et d'aborder les deux principes fondamentaux de la thermodynamique. Les capacités identifiées doivent être introduites en s'appuyant dès que possible sur des dispositifs expérimentaux qui permettent ainsi leur acquisition progressive et authentique.

On utilise les notations suivantes : pour une grandeur extensive « A », « a » sera la grandeur massique associée et « A_m » la grandeur molaire associée.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.1. Descriptions microscopique et macroscopique d'un système à l'équilibre	
Échelles microscopique, mésoscopique, et macroscopique. Libre parcours moyen.	Définir l'échelle mésoscopique et en expliquer la nécessité. Citer quelques ordres de grandeur de libres parcours moyens.

État microscopique et état macroscopique.	Préciser les paramètres nécessaires à la description d'un état microscopique et d'un état macroscopique sur un exemple.
Distribution des vitesses moléculaires d'un gaz (homogénéité et isotropie). Vitesse quadratique moyenne. Température cinétique. Exemple du gaz parfait monoatomique : Ec=3/2kT.	Calculer l'ordre de grandeur d'une vitesse quadratique moyenne dans un gaz parfait.
Système thermodynamique.	Identifier un système ouvert, un système fermé, un système isolé.
État d'équilibre d'un système soumis aux seules forces de pression. Pression, température, volume, équation d'état. Grandeur extensive, grandeur intensive. Exemples du gaz parfait et d'une phase condensée indilatable et incompressible.	Calculer une pression à partir d'une condition d'équilibre mécanique. Déduire une température d'une condition d'équilibre thermique. Citer quelques ordres de grandeur de volumes molaires ou massiques dans les conditions usuelles de pression et de température. Citer et utiliser l'équation d'état des gaz parfaits.
Énergie interne d'un système. Capacité thermique à volume constant dans le cas du gaz parfait.	Exprimer l'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique à partir de l'interprétation microscopique de la température. Exploiter la propriété $U_m=U_m(T)$ pour un gaz parfait.
Énergie interne et capacité thermique à volume constant d'une phase condensée considérée incompressible et indilatable.	Exploiter la propriété $U_m=U_m(T)$ pour une phase condensée incompressible et indilatable.
Approximation des phases condensées peu compressibles et peu dilatables.	Interpréter graphiquement la différence de compressibilité entre un liquide et un gaz à partir d'isothermes expérimentales.
Du gaz réel au gaz parfait.	Comparer le comportement d'un gaz réel au modèle du gaz parfait sur des réseaux d'isothermes expérimentales en coordonnées de Clapeyron ou d'Amagat.
Corps pur diphasé en équilibre. Diagramme de phases (P,T). Cas de l'équilibre liquide-vapeur : diagramme de Clapeyron (P,v), titre en vapeur.	Analyser un diagramme de phase expérimental (P,T). Proposer un jeu de variables d'état suffisant pour caractériser l'état d'équilibre d'un corps pur diphasé soumis aux seules forces de pression. Positionner les phases dans les diagrammes (P,T) et (P,v). Déterminer la composition d'un mélange diphasé en un point d'un diagramme (P,v).

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.2. Énergie échangée par un système au cours d'une transformation	
Transformation thermodynamique subie par un système. Évolutions isochore, isotherme, isobare, monobare, monotherme.	Définir un système adapté à une problématique donnée. Exploiter les conditions imposées par le milieu extérieur pour déterminer l'état d'équilibre final.
Travail des forces de pression. Transformations isochore, monobare.	Évaluer un travail par découpage en travaux élémentaires et sommation sur un chemin donné dans le cas d'une seule variable. Interpréter géométriquement le travail des forces de pression dans un diagramme de Clapeyron.
Transferts thermiques. Transformation adiabatique. Thermostat, transformations monotherme et isotherme.	Distinguer qualitativement les trois types de transferts thermiques : conduction, convection et rayonnement. Identifier dans une situation expérimentale le ou les systèmes modélisables par un thermostat.

Concernant les bilans d'énergie abordés dans la partie **3.3.** « **Premier principe. Bilans d'énergie »**, les expressions des fonctions d'état $U_m(T,V_m)$ et $H_m(T,P)$ sont données si le système ne relève pas du modèle gaz parfait ou du modèle de la phase condensée incompressible et indilatable.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.3. Premier principe. Bilans d'énergie	
Premier principe de la thermodynamique.	Définir un système fermé et établir pour ce système un bilan énergétique faisant intervenir travail et transfert thermique. Utiliser le premier principe de la thermodynamique entre deux états voisins. Exploiter l'extensivité de l'énergie interne. Distinguer le statut de la variation de l'énergie interne du statut des termes d'échange. Calculer le transfert thermique sur un chemin donné connaissant le travail et la variation de l'énergie interne.
Enthalpie d'un système. Capacité thermique à pression constante dans le cas du gaz parfait et d'une phase condensée incompressible et indilatable.	Exprimer le premier principe sous forme de bilan d'enthalpie dans le cas d'une transformation monobare avec équilibre mécanique dans l'état initial et dans l'état final. Exprimer l'enthalpie $H_m(T)$ du gaz parfait à partir de l'énergie interne. Justifier que l'enthalpie H_m d'une phase condensée peu compressible et peu dilatable peut être considérée comme une fonction de l'unique variable T. Citer l'ordre de grandeur de la capacité thermique massique de l'eau liquide.
Enthalpie associée à une transition de phase : enthalpie de fusion, enthalpie de vaporisation, enthalpie de sublimation.	Exploiter l'extensivité de l'enthalpie et réaliser des bilans énergétiques en prenant en compte des transitions de phases.

	Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure d'une grandeur thermodynamique énergétique (capacité thermique, enthalpie de fusion, etc.).

Concernant la partie **3.4.** « **Deuxième principe. Bilans d'entropie** », l'expression de la fonction d'état entropie est systématiquement donnée et sa construction n'est pas une capacité visée. On cite sans aucun développement quantitatif son interprétation en termes de désordre statistique, de façon à faciliter une interprétation intuitive des bilans d'entropie.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.4. Deuxième principe. Bilans d'entropie	
Fonction d'état entropie.	Interpréter qualitativement l'entropie en termes de désordre statistique à l'aide de la formule de Boltzmann fournie.
Deuxième principe de la thermodynamique : entropie créée, entropie échangée. $\Delta S = S_{ech} + S_{créé}$ avec $S_{ech} = \Sigma Q_i/T_i$.	Définir un système fermé et établir pour ce système un bilan entropique. Relier la création d'entropie à une ou plusieurs causes physiques de l'irréversibilité. Analyser le cas particulier d'un système en évolution adiabatique.
Variation d'entropie d'un système.	Utiliser l'expression fournie de la fonction d'état entropie. Exploiter l'extensivité de l'entropie.
Loi de Laplace.	Citer et utiliser la loi de Laplace et ses conditions d'application.
Cas particulier d'une transition de phase.	Citer et utiliser la relation entre les variations d'entropie et d'enthalpie associées à une transition de phase : Δh_{12} (T)=T Δs_{12} (T)

Dans la partie **3.5.** « **Machines thermiques** », l'enseignement de la thermodynamique est orienté vers des applications industrielles réelles et motivantes.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.5. Machines thermiques	
Application du premier principe et du deuxième principe de la thermodynamique aux machines thermiques cycliques dithermes : rendement, efficacité, théorème de Carnot.	Donner le sens des échanges énergétiques pour un moteur ou un récepteur thermique ditherme. Analyser un dispositif concret et le modéliser par une machine cyclique ditherme. Définir un rendement ou une efficacité et les relier aux énergies échangées au cours d'un cycle. Justifier et utiliser le théorème de Carnot. Citer quelques ordres de grandeur des rendements des machines thermiques réelles actuelles. Expliquer le principe de la cogénération. **Mettre en œuvre une machine thermique cyclique ditherme.**

Thème 1 : Onde et signaux (2)

La partie **1.7. « Induction et forces de Laplace »** s'appuie sur les nombreuses applications présentes dans notre environnement immédiat : boussole, moteur électrique, alternateur, transformateur, haut-parleur, plaques à induction, carte RFID... Il s'agit de restituer toute la richesse de ces applications dans un volume horaire modeste, ce qui limite les géométries envisagées et le formalisme utilisé. Le point de vue adopté cherche à mettre l'accent sur les phénomènes et sur la modélisation sommaire de leurs applications. Toute étude du champ électromoteur est exclue. L'induction et les forces de Laplace dans un circuit mobile sont introduites dans le cas d'un champ uniforme et stationnaire, soit dans le modèle des rails de Laplace, soit dans celui d'un cadre rectangulaire en rotation. Ce dernier modèle permet d'introduire la notion de dipôle magnétique et une analogie de comportement permet de l'étendre au cas de l'aiguille d'une boussole.
Le succès de cet enseignement suppose le respect de ces limitations : il ne s'agit pas d'une étude générale des phénomènes d'induction. Corrélativement, l'enseignement de cette partie doit impérativement s'appuyer sur une démarche expérimentale authentique, qu'il s'agisse d'expériences de cours ou d'activités expérimentales.

La partie **1.7.1** « **Champ magnétique** » vise à relier le champ magnétique et ses sources ; l'accent est mis sur le concept de champ vectoriel, l'analyse des symétries et des invariances, l'exploitation des représentations graphiques et la connaissance d'ordres de grandeur.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.1. Champ magnétique	
Sources de champ magnétique ; cartes de champ magnétique.	Exploiter une représentation graphique d'un champ vectoriel, identifier les zones de champ uniforme, de champ faible et l'emplacement des sources. Tracer l'allure des cartes de champs magnétiques pour un aimant droit, une spire circulaire et une bobine longue. Décrire un dispositif permettant de réaliser un champ magnétique quasi uniforme. Citer des ordres de grandeur de champs magnétiques : au voisinage d'aimants, dans un appareil d'IRM, dans le cas du champ magnétique terrestre.
Symétries et invariances des distributions de courant.	Exploiter les propriétés de symétrie et d'invariance des sources pour prévoir des propriétés du champ créé.
Lien entre le champ magnétique et l'intensité du courant.	Évaluer l'ordre de grandeur d'un champ magnétique à partir d'expressions fournies.
Moment magnétique.	Définir le moment magnétique associé à une boucle de courant plane. Associer à un aimant un moment magnétique par analogie avec une boucle de courant. Citer un ordre de grandeur du moment magnétique associé à un aimant usuel.

Dans la partie **1.7.2** « **Actions d'un champ magnétique** », l'enseignant est libre d'introduire la force de Laplace avec ou sans référence à la force de Lorentz. Il s'agit ici de se doter d'expressions opérationnelles pour étudier le mouvement dans un champ uniforme et stationnaire (soit d'une barre en translation, soit d'un moment magnétique en rotation modélisé par un cadre rectangulaire).

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.2. Actions d'un champ magnétique	
Densité linéique de la force de Laplace dans le cas d'un élément de courant filiforme.	Différencier le champ magnétique extérieur subi du champ magnétique propre créé par le courant filiforme.
Résultante et puissance des forces de Laplace.	Établir et citer l'expression de la résultante des forces de Laplace dans le cas d'une barre conductrice placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire. Exprimer la puissance des forces de Laplace.
Couple et puissance des actions mécaniques de Laplace dans le cas d'une spire rectangulaire, parcourue par un courant, en rotation autour d'un axe de symétrie de la spire passant par les deux milieux de côtés opposés et placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire orthogonal à l'axe.	Établir et exploiter l'expression du moment du couple subi en fonction du champ magnétique extérieur et du moment magnétique. Exprimer la puissance des actions mécaniques de Laplace.
Action d'un champ magnétique extérieur uniforme sur un aimant. Positions d'équilibre et stabilité.	**Mettre en œuvre un dispositif expérimental pour étudier l'action d'un champ magnétique uniforme sur une boussole.**
Effet moteur d'un champ magnétique tournant.	**Créer un champ magnétique tournant à l'aide de deux ou trois bobines et mettre en rotation une aiguille aimantée.**

La partie **1.7.3** « **Lois de l'induction** » repose sur la loi de Faraday qui se prête parfaitement à une introduction expérimentale et qui constitue un bel exemple d'illustration de l'histoire des sciences. On évoque, à ce sujet, les différents points de vue possibles sur le même phénomène selon le référentiel dans lequel on se place.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.3. Lois de l'induction	
Flux d'un champ magnétique Flux d'un champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté.	Évaluer le flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan.
Loi de Faraday Courant induit par le déplacement relatif d'une boucle conductrice par rapport à un aimant ou un circuit inducteur. Sens du courant induit.	**Décrire, mettre en œuvre et interpréter des expériences illustrant les lois de Lenz et de Faraday.**
Loi de modération de Lenz.	Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.
Force électromotrice induite, loi de Faraday.	Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'algébrisation.

La partie **1.7.4** « **Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps** » aborde le phénomène d'auto-induction puis le couplage par mutuelle inductance entre deux circuits fixes. Elle traite du modèle du transformateur de tensions.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.4. Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps	

Auto-induction Flux propre et inductance propre.	 Différencier le flux propre des flux extérieurs. Utiliser la loi de modération de Lenz. Évaluer et citer l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur. **Mesurer la valeur de l'inductance propre d'une bobine.**
Étude énergétique.	Réaliser un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.
Cas de deux bobines en interaction Inductance mutuelle entre deux bobines.	 Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en « influence totale ».
Circuits électriques à une maille couplés par le phénomène de mutuelle induction en régime sinusoïdal forcé.	Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante. Établir le système d'équations en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents.
Transformateur de tension.	Établir la loi des tensions.
Étude énergétique.	Réaliser un bilan de puissance et d'énergie.

La partie **1.7.5** « **Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire** » est centrée sur la conversion de puissance. Des situations géométriques simples permettent de dégager les paramètres physiques pertinents afin de modéliser le principe d'un moteur à courant continu ou un dispositif de freinage.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.5. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire	
Conversion de puissance mécanique en puissance électrique Rail de Laplace. Spire rectangulaire soumise à un champ magnétique extérieur uniforme et en rotation uniforme autour d'un axe fixe orthogonal au champ magnétique.	 Interpréter qualitativement les phénomènes observés. Écrire les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe. Effectuer un bilan énergétique. Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante.
Freinage par induction.	Expliquer l'origine des courants de Foucault et en citer des exemples d'utilisation. **Mettre en évidence qualitativement les courants de Foucault.**
Conversion de puissance électrique en puissance mécanique Moteur à courant continu à entrefer plan.	 Analyser le fonctionnement du moteur à courant continu à entrefer plan en s'appuyant sur la configuration des rails de Laplace.

	Citer des exemples d'utilisation du moteur à courant continu.

Thème 4 : constitution et transformations de la matière (2)

Les modèles de description microscopique des solides sont présentés dans la partie **4.3**. « **Structure et propriétés physiques des solides** » à partir de l'observation et des propriétés macroscopiques de différents solides cristallisés que l'enseignant est libre de choisir. L'introduction du modèle du cristal parfait se fait sur l'exemple de la maille cubique à faces centrées (CFC), seule maille dont la connaissance est exigible ; l'ensemble des notions associées à cette première étude est réinvesti pour étudier d'autres structures cristallines dont la constitution est alors fournie.
L'objectif principal de l'étude des cristaux métalliques, covalents et ioniques est d'aborder une nouvelle fois la notion de modèle : les allers-retours entre le niveau macroscopique (solides de différentes natures) et la modélisation microscopique (cristal parfait) permettent de montrer les limites du modèle du cristal parfait et de confronter les prédictions faites par ce modèle aux valeurs expérimentales mesurées sur le solide réel (distances internucléaires et interatomiques, masse volumique, etc). Ce chapitre constitue une occasion de revenir sur les positions relatives des éléments dans le tableau périodique, en lien avec la nature des interactions assurant la cohésion des édifices présentés, ainsi que sur les interactions intermoléculaires et la notion de solubilisation pour les solides ioniques et moléculaires.
Une réflexion sur les modèles conduisant à la détermination des différents types de rayons à partir des méthodes expérimentales d'analyse des structures des solides peut être proposée.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
4.3. Structure et propriétés physiques des solides	
Modèle du cristal parfait Solide amorphe, solide cristallin, solide semi-cristallin ; variétés allotropiques.	**Illustrer l'influence des conditions expérimentales sur la formation de solides et de solides cristallins.**
Description du cristal parfait ; population, coordinence, compacité, masse volumique. Rayons métallique, covalent, de van der Waals ou ionique.	Décrire un cristal parfait comme un assemblage de mailles parallélépipédiques. Déterminer la population, la coordinence et la compacité pour une structure fournie. Déterminer la valeur de la masse volumique d'un matériau cristallisé selon une structure cristalline fournie. Relier le rayon métallique, covalent, de van der Waals ou ionique, selon le cas, aux paramètres d'une maille donnée. **Utiliser un logiciel ou des modèles cristallins pour visualiser des mailles et des sites interstitiels et pour déterminer des paramètres géométriques.**
Description des modèles d'empilement compact de sphères identiques.	Localiser les interstices tétraédriques et octaédriques entre les plans d'empilement.
Maille conventionnelle CFC et ses sites interstitiels.	Localiser, dénombrer les sites tétraédriques et octaédriques d'une maille CFC et déterminer leur habitabilité.
Limites du modèle du cristal parfait.	Confronter des données expérimentales aux prévisions du modèle.

Métaux Cohésion et propriétés physiques des métaux.	 Positionner dans le tableau périodique et reconnaître les métaux et non métaux. Relier les caractéristiques de la liaison métallique (ordre de grandeur énergétique, non directionnalité) aux propriétés macroscopiques des métaux.
Solides covalents et moléculaires Cohésion et propriétés physiques des solides covalents et moléculaires.	 Relier les caractéristiques des liaisons covalentes, des interactions de van der Waals et des interactions par pont hydrogène (directionnalité ou non, ordre de grandeur des énergies mises en jeu) et les propriétés macroscopiques des solides correspondants.
Solides ioniques Cohésion et propriétés physiques des solides ioniques.	 Relier les caractéristiques de l'interaction ionique dans le cadre du modèle du solide ionique parfait (ordre de grandeur de l'énergie d'interaction, non directionnalité, charge localisée) avec les propriétés macroscopiques des solides ioniques.

4.4. Transformations chimiques en solution aqueuse

Les transformations chimiques en solution aqueuse jouent un rôle essentiel en chimie, en biochimie, dans le domaine du vivant et dans les procédés industriels. Un nombre considérable de développements technologiques et d'analyses environnementales (traitement des eaux, méthodes d'analyse, extraction d'ions métalliques des minerais, générateurs électrochimiques, lutte contre la corrosion, etc.) repose sur des transformations acido-basiques, de solubilisation-précipitation et d'oxydo-réduction en solution aqueuse dont la maîtrise est importante pour prévoir, interpréter et optimiser les phénomènes mis en jeu.
L'objectif de cette partie est donc de présenter différents types de réactions susceptibles d'intervenir en solution aqueuse, d'en déduire des diagrammes de prédominance ou d'existence d'espèces chimiques, notamment des diagrammes potentiel-pH, et de les utiliser comme outil de prévision et d'interprétation des transformations chimiques quel que soit le milieu donné. Les conventions de tracé seront toujours précisées.
Les choix pédagogiques relatifs au contenu des séances de travail expérimental permettront de contextualiser ces enseignements. Les dosages par titrage sont étudiés exclusivement en travaux pratiques. L'analyse des conditions choisies ou la réflexion conduisant à une proposition de protocole expérimental pour atteindre un objectif donné constituent des mises en situation des enseignements évoqués précédemment. Ces séances de travail expérimental constituent une nouvelle occasion d'aborder qualité et précision de la mesure.

Les différentes transformations en solution aqueuse abordées dans la partie **4.4.1.** « **Réactions acide-base et de précipitation** » constituent des illustrations de l'évolution des systèmes chimiques introduites au premier semestre, les étudiants étant amenés à déterminer l'état final d'un système en transformation chimique modélisée par une seule réaction chimique. On montrera qu'il est ainsi possible d'analyser et de simplifier une situation complexe pour parvenir à la décrire rigoureusement et quantitativement, en l'occurrence dans le cas des solutions aqueuses par une seule réaction. Il est cependant important de noter qu'on évite tout calcul inutile de concentration, en privilégiant l'utilisation des diagrammes pour valider le choix de la réaction mise en jeu. Dans ce cadre, aucune formule de calcul de pH n'est exigible.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.4.1. Réactions acide-base et de précipitation	
Réactions acido-basiques - constante d'acidité ; - diagramme de prédominance, de distribution ; - exemples usuels d'acides et bases : nom, formule et nature – faible ou forte – des acides sulfurique, nitrique, chlorhydrique, phosphorique, acétique, de la soude, l'ion hydrogénocarbonate, l'ammoniac. **Réactions de dissolution ou de précipitation** - constante de l'équation de dissolution, produit de solubilité K_s ; - solubilité et condition de précipitation ; - domaine d'existence ; - facteurs influençant la solubilité.	Identifier le caractère acido-basique d'une réaction en solution aqueuse. Écrire l'équation de la réaction modélisant une transformation en solution aqueuse en tenant compte des caractéristiques du milieu réactionnel (nature des espèces chimiques en présence, pH…) et des observations expérimentales. Déterminer la valeur de la constante d'équilibre pour une équation de réaction, combinaison linéaire d'équations dont les constantes thermodynamiques sont connues. Déterminer la composition chimique du système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. Prévoir l'état de saturation ou de non saturation d'une solution. Utiliser les diagrammes de prédominance ou d'existence pour prévoir les espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires. Exploiter des courbes d'évolution de la solubilité d'un solide en fonction d'une variable. **Mettre en œuvre une réaction acide-base et une réaction de précipitation pour réaliser une analyse quantitative en solution aqueuse.** **Illustrer un procédé de retraitement, de recyclage, de séparation en solution aqueuse.**

L'analyse de transformations mettant en jeu des oxydants et réducteurs usuels et des piles permettent d'aborder, dans la partie **4.4.2.** « **Réactions d'oxydo-réduction** » les différents concepts associés aux phénomènes d'oxydo-réduction en solution aqueuse. La relation de Nernst (admise en première année) ainsi que la relation entre la constante thermodynamique d'équilibre d'une réaction d'oxydo-réduction et les potentiels standard permettent de prévoir l'évolution des systèmes et le caractère favorisé des transformations.
Afin de pouvoir étudier l'influence du milieu sur les espèces oxydantes ou réductrices présentes, les acquis sur les réactions acido-basiques et de précipitation-solubilisation en solution aqueuse sont réinvestis.
Enfin, les diagrammes potentiel-pH sont présentés puis superposés pour prévoir ou interpréter thermodynamiquement des transformations chimiques ; la confrontation avec la réalité amenant à aborder éventuellement des blocages cinétiques en lien avec l'évolution temporelle des systèmes étudiée au premier semestre.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.4.2. Réactions d'oxydo-réduction	
Oxydants et réducteurs, réactions d'oxydo-réduction Nombre d'oxydation. Exemples d'oxydants et de réducteurs minéraux usuels : nom, nature et formule des ions thiosulfate, permanganate, hypochlorite, du peroxyde d'hydrogène.	Relier la position d'un élément dans le tableau périodique et le caractère oxydant ou réducteur du corps simple correspondant. Prévoir les nombres d'oxydation extrêmes d'un élément à partir de sa position dans le tableau périodique. Identifier l'oxydant et le réducteur d'un couple.
Pile, tension à vide, potentiel d'électrode, formule de Nernst, électrodes de référence.	Décrire le fonctionnement d'une pile à partir d'une mesure de tension à vide ou à partir des potentiels d'électrode.
Diagrammes de prédominance ou d'existence.	Utiliser les diagrammes de prédominance ou d'existence pour prévoir les espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires.
Aspect thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction. Dismutation et médiamutation.	Prévoir qualitativement ou quantitativement le caractère thermodynamiquement favorisé ou défavorisé d'une réaction d'oxydo-réduction à partir des potentiels standard des couples. **Mettre en œuvre une réaction d'oxydo-réduction pour réaliser une analyse quantitative en solution aqueuse.** **Réaliser une pile et étudier son fonctionnement.**
Diagrammes potentiel-pH Principe de construction, lecture et utilisation d'un diagramme potentiel-pH.	Identifier les différents domaines d'un diagramme fourni associés à des espèces chimiques données. Déterminer la valeur de la pente d'une frontière dans un diagramme potentiel-pH. Justifier la position d'une frontière verticale. Prévoir le caractère thermodynamiquement favorisé ou non d'une transformation par superposition de diagrammes
Diagramme potentiel-pH de l'eau	Prévoir la stabilité des espèces dans l'eau. Prévoir une dismutation ou médiamutation en fonction du pH du milieu. Confronter les prévisions à des données expérimentales et interpréter d'éventuels écarts en termes cinétiques. **Mettre en œuvre des réactions d'oxydo-réduction en s'appuyant sur l'utilisation de diagrammes potentiel-pH.**

Annexe 1 : matériel

La liste ci-dessous regroupe le matériel que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice simplifiée fournie sous forme de version papier ou numérique. Une utilisation de matériel hors de cette liste lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'une introduction guidée suffisamment détaillée.

1. Domaine optique

- Goniomètre
- Viseur à frontale fixe
- Lunette auto-collimatrice
- Spectromètre à fibre optique
- Laser à gaz
- Lampes spectrales
- Source de lumière blanche à condenseur

2. Domaine électrique

- Oscilloscope numérique
- Carte d'acquisition et logiciel dédié
- Générateur de signaux Basse Fréquence
- Multimètre numérique
- Multiplieur analogique
- Émetteur et récepteur acoustique (domaine audible et domaine ultrasonore)
- Microcontrôleur

3. Domaines mécanique et thermodynamique

- Dynamomètre
- Capteur de pression
- Accéléromètre
- Stroboscope
- Webcam avec logiciel dédié
- Appareil photo numérique ou caméra numérique
- Thermomètre, thermocouple, thermistance, capteur infra-rouge
- Calorimètre
- Machines thermiques dithermes

4. Domaine constitution et transformations de la matière

- Verrerie classique de chimie analytique : burettes, pipettes jaugées et graduées, fioles jaugées, erlenmeyers, béchers, etc.
- Matériel classique du laboratoire de chimie : dispositifs de chauffage ou de refroidissement (bain-marie, bain froid, etc.), dispositifs d'agitation, matériel de filtration sous pression atmosphérique et sous pression réduite
- Spectrophotomètre UV-visible
- pH-mètre et électrodes de mesure
- Voltmètre et électrodes
- Conductimètre et cellule de mesure
- Thermomètre
- Balance de précision

Annexe 2 : outils mathématiques

L'utilisation d'outils mathématiques est indispensable en physique comme en chimie.
La capacité à mettre en œuvre de manière autonome certains de ces outils mathématiques dans le cadre des activités relevant de la physique-chimie fait partie des compétences exigibles à la fin de la première année. Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que le niveau de maîtrise attendu en fin de première année. Il est complété dans le programme de seconde année.
Cependant les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité sont traitées à l'aide d'outils numériques (calculatrices, logiciels de calcul numérique).

Outils mathématiques	Capacités exigibles
1. Équations algébriques	
Systèmes linéaires de n équations à p inconnues.	Identifier les variables (inconnues) nécessaires à la modélisation du problème sous forme d'un système d'équations linéaires. Donner l'expression formelle des solutions dans le seul cas $n = p = 2$.
Équations non linéaires.	Représenter graphiquement une équation de la forme $f(x) = g(x)$. Interpréter graphiquement la ou les solutions.
2. Équations différentielles	
Équations différentielles linéaires à coefficients constants.	Identifier l'ordre. Mettre l'équation sous forme canonique.
Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants : $y' + ay = f(x)$.	Trouver la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène). Trouver l'expression des solutions lorsque $f(x)$ est constante ou de la forme $A.\cos(\omega x+\varphi)$ (en utilisant la notation complexe).
Équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants : $y'' + ay' + by = f(x)$.	Utiliser l'équation caractéristique pour trouver la solution générale de l'équation sans second membre. Prévoir le caractère borné ou non de ses solutions (critère de stabilité). Trouver l'expression des solutions lorsque $f(x)$ est constante ou de la forme $A.\exp(\lambda x)$ avec λ complexe. Trouver la solution de l'équation complète correspondant à des conditions initiales données. Représenter graphiquement cette solution.
Autres équations différentielles d'ordre 1 ou 2.	Obtenir une intégrale première d'une équation de Newton $x'' = f(x)$ et l'exploiter graphiquement. Séparer les variables d'une équation du premier ordre à variables séparables. Faire le lien entre les conditions initiales et le graphe de la solution correspondante.
3. Fonctions	
Fonctions usuelles.	Exponentielle, logarithme népérien et décimal, cosinus, sinus, tangente, puissance réelle ($x \to x^a$).
Dérivée. Notation dx/dt.	Utiliser la formule de Taylor à l'ordre un ou deux ; interpréter graphiquement.

Développements limités.	Connaître et utiliser les développements limités à l'ordre 1 des fonctions $(1 + x)^{\alpha}$, e^x et $\ln(1 + x)$, et à l'ordre 2 des fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
Primitive et intégrale.	Interpréter l'intégrale comme une somme de contributions infinitésimales, en lien avec la méthode des rectangles en mathématiques.
Valeur moyenne.	Exprimer la valeur moyenne sous forme d'une intégrale. Connaître la valeur moyenne sur une période des fonctions cos, sin, $\cos^2$ et $\sin^2$.
Représentation graphique d'une fonction.	Déterminer un comportement asymptotique ; rechercher un extremum local. Utiliser des échelles logarithmiques ; identifier une loi de puissance à une droite en échelle log-log.
Développement en série de Fourier d'une fonction périodique.	Utiliser un développement en série de Fourier fourni par un formulaire.
4. Géométrie	
Vecteurs et système de coordonnées.	Exprimer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Utiliser les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
Projection d'un vecteur et produit scalaire.	Interpréter géométriquement le produit scalaire et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée. Utiliser la bilinéarité et le caractère symétrique du produit scalaire.
Produit vectoriel.	Interpréter géométriquement le produit vectoriel et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée directe. Utiliser la bilinéarité et le caractère antisymétrique du produit vectoriel. Faire le lien avec l'orientation des trièdres.
Transformations géométriques.	Utiliser les symétries par rapport à un plan, les translations et les rotations de l'espace. Utiliser leur effet sur l'orientation de l'espace.
Courbes planes.	Reconnaître l'équation cartésienne d'une droite, d'un cercle. Utiliser la représentation polaire d'une courbe plane ; utiliser un grapheur pour obtenir son tracé.
Courbes planes paramétrées.	Identifier une ellipse à l'aide de sa représentation paramétrique ($x = a.\cos(\omega t)$, $y = b.\cos(\omega t-\varphi)$) et la tracer dans les cas particuliers $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ et $\varphi = \pi$.
Longueurs, aires et volumes classiques.	Citer les expressions du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'une sphère, du volume d'une boule, du volume d'un cylindre.

Barycentre d'un système de points.	Énoncer la définition du barycentre. Utiliser son associativité. Exploiter les symétries pour prévoir la position du barycentre d'un système homogène.
5. Trigonométrie	
Angle orienté.	Définir une convention d'orientation des angles d'un plan (euclidien) et lire des angles orientés. Relier l'orientation d'un axe de rotation à l'orientation positive des angles d'un plan perpendiculaire à cet axe.
Fonctions cosinus, sinus et tangente.	Utiliser le cercle trigonométrique et l'interprétation géométrique des fonctions cosinus, sinus et tangente comme aide-mémoire : relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, relations entre fonctions trigonométriques et toutes relations du type $\cos(\pi \pm x)$ et $\cos(\pi/2 \pm x)$, parités, périodicité, valeurs des fonctions pour les angles usuels. Citer les formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus ; utiliser un formulaire dans les autres cas.
Nombres complexes et représentation dans le plan. Somme et produit de nombres complexes.	Calculer et interpréter géométriquement la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument d'un nombre complexe.
6. Analyse vectorielle	
Gradient d'un champ scalaire.	Citer le lien entre le gradient et la différentielle. Citer l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles. Citer l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes ; utiliser un formulaire fourni en coordonnées cylindriques ou sphériques. Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.

Annexe 3 : outils numériques

La prise en compte de capacités de codage en langage Python dans la formation des étudiants inclue l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques. Elle vise à une meilleure appréhension des principes mis en œuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée. Elle a aussi pour objectif de mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la physique et de la chimie. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la physique-chimie comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.

Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que les capacités exigibles en fin de première année. Il sera complété dans le programme de physique-chimie de seconde année.

Domaines numériques	Capacités exigibles
1. Outils graphiques	
Représentation graphique d'un nuage de points.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **matplotlib** pour représenter un nuage de points.

Représentation graphique d'une fonction.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **matplotlib** pour tracer la courbe représentative d'une fonction.
Courbes planes paramétrées.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **matplotlib** pour tracer une courbe plane paramétrée.
2. Équations algébriques	
Résolution d'une équation algébrique ou d'une équation transcendante : méthode dichotomique.	Déterminer, en s'appuyant sur une représentation graphique, un intervalle adapté à la recherche numérique d'une racine par une méthode dichotomique. Mettre en œuvre une méthode dichotomique afin de résoudre une équation avec une précision donnée. Utiliser la fonction **bisect** de la bibliothèque **scipy.optimize** (sa spécification étant fournie).
3. Intégration – Dérivation	
Calcul approché d'une intégrale sur un segment par la méthode des rectangles.	Mettre en œuvre la méthode des rectangles pour calculer une valeur approchée d'une intégrale sur un segment.
Calcul approché du nombre dérivé d'une fonction en un point.	Utiliser un schéma numérique pour déterminer une valeur approchée du nombre dérivé d'une fonction en un point.
4. Équations différentielles	
Équations différentielles d'ordre 1.	Mettre en œuvre la méthode d'Euler explicite afin de résoudre une équation différentielle d'ordre 1.
Équations différentielles d'ordre supérieur ou égal à 2	Transformer une équation différentielle d'ordre n en un système différentiel de n équations d'ordre 1. Utiliser la fonction **odeint** de la bibliothèque **scipy.integrate** (sa spécification étant fournie).
5. Probabilité – statistiques	
Variable aléatoire.	Utiliser les fonctions de base des bibliothèques **random** et/ou **numpy** (leurs spécifications étant fournies) pour réaliser des tirages d'une variable aléatoire. Utiliser la fonction **hist** de la bibliothèque **matplotlib.pyplot** (sa spécification étant fournie) pour représenter les résultats d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire. Déterminer la moyenne et l'écart-type d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire.
Régression linéaire.	Utiliser la fonction **polyfit** de la bibliothèque **numpy** (sa spécification étant fournie) pour exploiter des données. Utiliser la fonction **random.normal** de la bibliothèque **numpy** (sa spécification étant fournie) pour simuler un processus aléatoire.

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voies Physique, technologie et sciences de l'ingénieur (PTSI) et Physique et technologie (PT)

Annexe 3
Programmes de sciences industrielles de l'ingénieur

PROGRAMME DE SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR DANS LA FILIÈRE PTSI-PT

1. Objectifs de formation

1.1. Finalité

Le programme de sciences industrielles de l'ingénieur de la filière PTSI-PT s'inscrit dans un parcours de formation initiale pour accéder au titre d'ingénieur. Il trouve ses racines dans le choix de spécialités scientifiques au cycle terminal du lycée. L'objectif de ce programme est de proposer des contenus d'enseignements qui permettent de développer progressivement les compétences nécessaires à l'intégration dans une grande école et à l'exercice des métiers d'ingénieurs. Ce programme est ambitieux quant au développement de compétences scientifiques et technologiques qui soutiennent l'expertise du futur ingénieur. Il l'est aussi pour le développement de compétences transversales nécessaires pour communiquer, travailler en équipe, exercer un sens critique et des responsabilités de manière éthique et déontologique. En cohérence avec les objectifs du cycle initial de la formation aux métiers de l'ingénierie, ce programme contribue à l'approche pédagogique par les STEM (*Science, Technology, Engineering and Mathematics*).

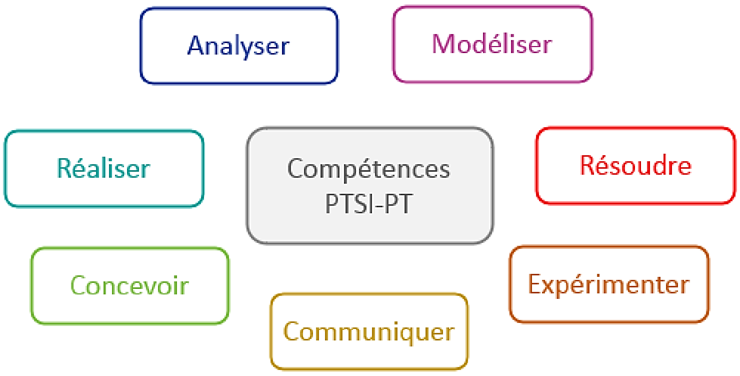
1.2. Objectifs généraux

Les ingénieurs doivent être en capacité de résoudre de façon innovante des problèmes inédits afin de répondre aux besoins des personnes et d'apporter un progrès dans leur qualité de vie. Ils participent aux processus de développement des systèmes à chaque étape de leur cycle de vie, de la caractérisation du besoin jusqu'au recyclage, en respectant les contraintes de développement durable et d'écoconception.

Cette capacité des ingénieurs à proposer des solutions innovantes est plus que jamais indispensable au développement d'une industrie capable de faire face aux grands enjeux sociétaux, économiques et environnementaux. Ces enjeux sont notamment ceux de la transition énergétique, la préservation de la qualité de l'environnement, la progression des technologies du numérique, la mutation des métropoles et des territoires, l'évolution des besoins alimentaires et des exigences en matière de santé pour des humains toujours plus nombreux sur notre planète. Dans un contexte de concurrence mondialisée, la capacité d'innovation des ingénieurs est nécessaire à l'industrie de notre pays qui doit demeurer compétitive et souveraine.

Les objectifs généraux du programme de PTSI-PT visent à développer les compétences clés dans le large domaine des sciences industrielles de l'ingénieur qui sont nécessaires à l'exercice du métier d'ingénieur. Celles-ci sont consolidées et complétées par la formation poursuivie jusqu'à l'obtention du titre d'ingénieur.

L'enseignement en PTSI-PT se donne également pour objectif d'apporter aux étudiants des méthodes et des outils qui leur permettront de s'adapter aux évolutions permanentes des sciences et des technologies et de communiquer avec l'ensemble des acteurs associés à l'exercice des métiers d'ingénieurs et scientifiques.

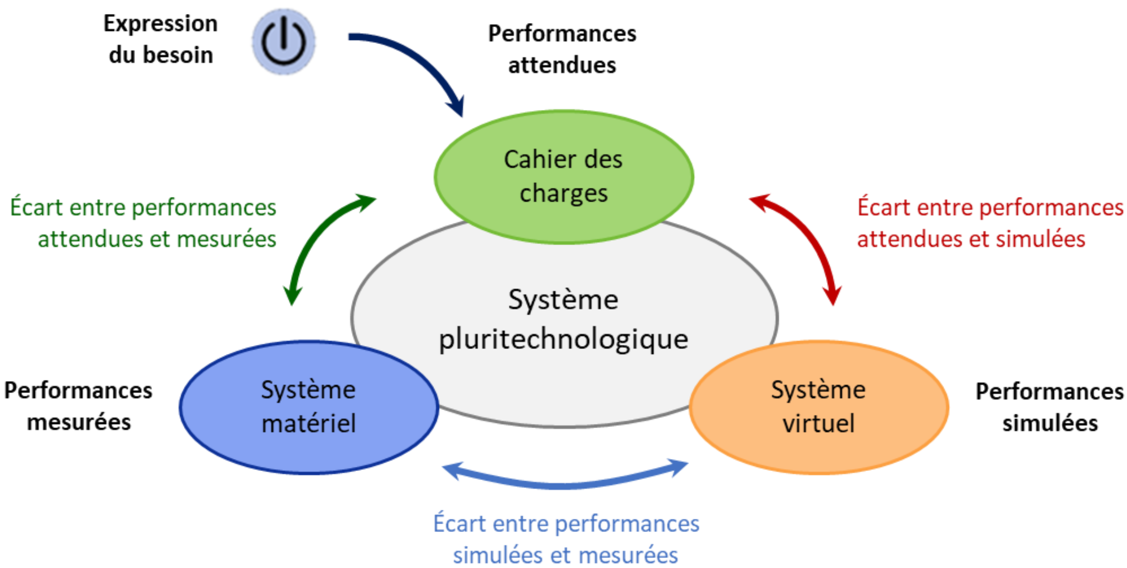


Les compétences générales de l'ingénieur développées en PTSI-PT

1.3. La démarche des enseignements en PTSI-PT

L'approche pédagogique et didactique des enseignements en PTSI-PT s'organise autour de systèmes pluritechnologiques. Chaque système est défini à partir de besoins fonctionnels et d'exigences, de modèles numériques et d'un système matériel. Un système sera étudié dans sa globalité à partir de ces trois approches imbriquées :

- la réalité du besoin ou exigences fonctionnelles. Elle se décline dans le cahier des charges défini avec un client ;
- la réalité virtuelle d'un système. Elle se traduit dans l'élaboration d'un modèle permettant de simuler son comportement afin d'en prévoir et d'en évaluer les performances, et de valider les organisations fonctionnelle et structurelle ;
- la réalité matérielle d'un système. Elle se traduit par la réalisation d'un prototype fonctionnel qui permet de valider par expérimentation les performances du produit ou système.



La démarche pédagogique et didactique en sciences industrielles de l'ingénieur

Les objets et les systèmes, dans leur complexité, mobilisent plusieurs formes d'énergie et sont communicants. Ils sont pluritechnologiques.

La démarche en sciences industrielles de l'ingénieur en PTSI-PT vise à :

- contribuer à l'élaboration des trois réalités du système pluritechnologique (le cahier des charges, le système virtuel et le système matériel) ;
- comparer les performances issues de ces trois réalités ;
- optimiser le système virtuel et le système matériel afin de faire converger leurs performances vers celles attendues au cahier des charges.

Les contenus du programme de PTSI-PT permettent aux étudiants d'investir complètement la démarche de l'ingénieur en s'intéressant à toutes les représentations des systèmes. Pour cela les enseignements en PTSI-PT installent progressivement l'ensemble des connaissances et des compétences nécessaires à la maitrise des différentes représentations d'un même objet ou système, à la comparaison des différentes performances, à l'optimisation des systèmes dans leurs réalités numérique et matérielle, afin de répondre aux attentes du client.

À partir de l'analyse du cahier des charges, des solutions innovantes sont conçues et réalisées. La réalisation consiste en la production de modèles à l'aide d'outils numériques et de prototypes matériels des systèmes, capables de valider tout ou partie du cahier des charges.

1.4. Usage de la liberté pédagogique

Le programme définit les obligations faites aux professeurs des contenus à enseigner, les mêmes pour tous les étudiants, garantes de l'équité d'une formation offrant à chacun les mêmes chances de réussite. Les finalités et objectifs généraux de la formation en sciences industrielles de l'ingénieur laissent aux enseignants le choix pédagogique de l'organisation des enseignements et de ses méthodes. La nature des enseignements en sciences industrielles de l'ingénieur suppose la mise en œuvre d'une didactique naturellement liée à la discipline qui impose une réflexion sur le développement des compétences, la transmission des connaissances et leur ordonnancement dans la programmation des apprentissages. Les supports d'enseignement sont choisis afin d'être représentatifs des solutions innovantes pour répondre aux besoins actuels. Les solutions contemporaines sont mises en perspective avec l'histoire des sociétés, des sciences et des techniques, avec les préoccupations de respect de l'environnement et des ressources naturelles, de façon à construire les bases d'une culture d'ingénieur éthique et responsable.

2. Programme

Le programme est organisé en sept compétences générales déclinées en compétences attendues qui pourront être évaluées en fin de cycle.

Partant de ces indications de fin de cycle, le programme détaille les compétences développées, précise les connaissances associées et fournit un indicateur de positionnement temporel dans le cycle.

Les compétences développées et les connaissances associées sont positionnées dans les semestres, cela signifie :

- qu’elles doivent être acquises en fin du semestre précisé ;
- qu’elles ont pu être introduites au cours des semestres précédents ;
- qu’elles peuvent être mobilisées aux semestres suivants.

Les compétences générales et compétences attendues sont détaillées ci-dessous.

A – Analyser
- A1 – Analyser le besoin et les exigences
- A2 – Définir les frontières de l'analyse
- A3 – Analyser l'organisation fonctionnelle et structurelle
- A4 – Analyser les performances et les écarts
- A5 – Analyser un compromis produit-procédés-matériaux

B – Modéliser
- B1 – Choisir les grandeurs physiques et les caractériser
- B2 – Proposer un modèle de connaissance et de comportement
- B3 – Valider un modèle

C – Résoudre
- C1 – Proposer une démarche de résolution
- C2 – Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique
- C3 – Mettre en œuvre une démarche de résolution numérique

D – Expérimenter
- D1 – Mettre en œuvre un système
- D2 – Proposer et justifier un protocole expérimental
- D3 – Mettre en œuvre un protocole expérimental

E – Communiquer
- E1 – Rechercher et traiter des informations
- E2 – Produire et échanger de l'information

F – Concevoir
- F1 – Concevoir l'architecture d'un système innovant
- F2 – Proposer et choisir des solutions techniques
- F3 – Dimensionner une solution technique choisie

G – Réaliser
- G1 – Réaliser tout ou partie d'un prototype
- G2 – Industrialiser un produit

Les liens avec l’enseignement d’informatique du tronc commun sont identifiés par le symbole $\leftrightarrows I$.

A – Analyser

A1 – Analyser le besoin et les exigences

<table>
<tr><th>Compétences développées</th><th>Connaissances associées</th><th>Semestre</th></tr>
<tr><td>Décrire le besoin et les exigences.</td><td>Ingénierie Système et diagrammes associés.
Cahier des charges.</td><td>S1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Commentaires
La connaissance de la syntaxe d’un langage d’Ingénierie Système n’est pas exigible. La structure des diagrammes d’Ingénierie Système (SysML) est fournie. Ils peuvent être proposés à lire ou à compléter.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Traduire un besoin fonctionnel en exigences.</td><td rowspan="4">Impact environnemental.
Analyse du cycle de vie (extraction, fabrication, utilisation, fin de vie, recyclage et transport).
Critères et niveaux.</td><td rowspan="4">S1</td></tr>
<tr><td>Définir les domaines d’application et les critères technico-économiques et environnementaux.</td></tr>
<tr><td>Qualifier et quantifier les exigences.</td></tr>
<tr><td>Évaluer l’impact environnemental et sociétal.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Commentaire
Il s’agit de prendre en compte les exigences liées au développement durable et sensibiliser aux aspects sociétaux.</td></tr>
</table>

A2 – Définir les frontières de l'analyse

<table>
<tr><th>Compétences développées</th><th>Connaissances associées</th><th>Semestre</th></tr>
<tr><td>Isoler un système et justifier l’isolement.</td><td rowspan="2">Frontière de l’étude.
Milieu extérieur.</td><td rowspan="2">S2</td></tr>
<tr><td>Définir les éléments influents du milieu extérieur.</td></tr>
<tr><td>Identifier la nature des flux échangés traversant la frontière d’étude.</td><td>Flux de matière, d’énergie et d’information (définition, nature et codage).</td><td>S2</td></tr>
</table>

A3 – Analyser l'organisation fonctionnelle et structurelle

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Associer les fonctions aux constituants.	Architecture fonctionnelle et structurelle. Diagramme de définition de blocs. Diagramme de bloc interne. Chaines fonctionnelles (chaine d'information et chaine de puissance). Fonctions acquérir, traiter et communiquer. Fonctions alimenter, moduler, convertir, transmettre et agir. Systèmes asservis et séquentiels.	S1
Justifier le choix des constituants dédiés aux fonctions d'un système.		S4
Identifier et décrire les chaines fonctionnelles du système.		S1
Identifier et décrire les liens entre les chaines fonctionnelles.		S1
Commentaires *La description des chaines fonctionnelles de différents systèmes permet de construire une culture technologique.* *Les chaines fonctionnelles, diagrammes de définition de blocs et diagrammes de bloc interne peuvent être à lire ou à compléter avec les éléments syntaxiques fournis.*		

Caractériser un constituant de la chaine de puissance.	Alimentation d'énergie. Association de préactionneurs et d'actionneurs : – caractéristiques ; – réversibilité ; – domaines d'application. Transmetteurs de puissance : – caractéristiques ; – réversibilité ; – domaines d'application.	S3
Caractériser un constituant de la chaine d'information.	Capteurs : – fonctions ; – nature des grandeurs physiques d'entrées et de sorties ; – nature du signal et support de l'information. Carte programmable.	S2
Analyser un algorithme. ⇆ *I*	Définition et appel d'une fonction. Variables (type et portée). Structures algorithmiques (boucles et tests).	S1

Analyser les principes d'intelligence artificielle. ⇆ *I*	Régression et classification, apprentissages supervisé et non supervisé. Phases d'apprentissage et d'inférence. Modèle linéaire monovariable ou multivariable. Réseaux de neurones (couches d'entrée, cachées et de sortie, neurones, biais, poids et fonction d'activation).	S3
Identifier les architectures matérielles et fonctionnelles d'un réseau de communication.	Caractéristiques d'un réseau (débit, dimension, robustesse et topologie). Supports de l'information. Caractéristiques d'un canal de transmission. Multiplexage temporel et fréquentiel. Protocole, trame et champs (rôle des champs dans une trame). Adressage physique et logique d'un constituant.	S2
Décoder une trame en vue d'analyser les différents champs et les données échangées.		
Commentaire *L'étude des réseaux de communication est focalisée sur les concepts communs aux protocoles de communication usuels.*		

Interpréter tout ou partie de l'évolution temporelle d'un système séquentiel.	Diagramme d'états. État, transition, événement, condition de garde, activité et action.	S2
Commentaires *La connaissance de la syntaxe d'un langage d'Ingénierie Système n'est pas exigible. La structure des diagrammes d'Ingénierie Système (SysML) est fournie. Ils peuvent être proposés à lire ou à compléter.* *L'évolution temporelle des états et des variables d'un diagramme d'états est représentée sous la forme d'un chronogramme.*		

Identifier la structure d'un système asservi.	Grandeurs d'entrée et de sortie. Capteur, chaine directe, chaine de retour, commande, comparateur, consigne, correcteur et perturbation. Poursuite et régulation.	S1

A4 – Analyser les performances et les écarts

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Extraire un indicateur de performance pertinent à partir du cahier des charges ou de résultats issus de l'expérimentation ou de la simulation.	Ordre de grandeur. Homogénéité des résultats. Matrice de confusion (tableau de contingence), sensibilité et spécificité d'un test.	S4
Caractériser les écarts entre les performances.		
Interpréter et vérifier la cohérence des résultats obtenus expérimentalement, analytiquement ou numériquement. ⇆ *I*		
Rechercher et proposer des causes aux écarts constatés.		

A5 – Analyser un compromis produit-procédés-matériaux

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Justifier le choix d'un indicateur de performance.	Propriétés physiques (acoustique, électrique, magnétique, mécanique et thermique). Classes des matériaux, domaines généraux d'application. Diagrammes d'Ashby. Impact environnemental.	S3
Comparer qualitativement les caractéristiques physiques des matériaux.		
Justifier le choix d'un matériau et/ou d'un procédé.		
Commentaires *Les propriétés physiques des matériaux sont caractérisées grâce aux essais de traction, dureté, résilience et fatigue.* *La connaissance des désignations normalisées des matériaux n'est pas au programme.*		

Justifier le besoin fonctionnel d'une spécification.	Principes (d'indépendance, de la pièce rigide, de l'élément, de dualité, d'invocation et de responsabilité). Modèles (nominal, extrait et skin model). Opérations (partition, collection, filtrage, extraction, construction et association). Définition d'une spécification (condition unilimite sur une caractéristique dimensionnelle). Spécifications géométriques par taille, par zone et par gabarit. Fiche GPS.	S2
Décoder les spécifications géométriques par taille, par zone et par gabarit.		
Analyser le lien entre la liaison mécanique et les systèmes de référence associés aux surfaces des composants participants.		
Commentaires *Les ajustements normalisés ne sont pas exigibles. Seule la nature des ajustements est à préciser (glissant, incertain et serré).* *Le seul modificateur au programme est l'exigence de l'enveloppe.*		

B – Modéliser

B1 – Choisir les grandeurs physiques et les caractériser

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Identifier les performances à prévoir ou à évaluer.	Grandeurs flux, grandeurs effort.	S4
Identifier les grandeurs d'entrée et de sortie d'un modèle.		
Identifier les paramètres d'un modèle.		
Proposer des hypothèses nécessaires à la modélisation.		

B2 – Proposer un modèle de connaissance et de comportement

<table>
<tr><th>Compétences développées</th><th>Connaissances associées</th><th>Semestre</th></tr>
<tr><td>Choisir un modèle adapté aux performances à prévoir ou à évaluer.</td><td>Phénomènes physiques.
Domaine de validité.
Solides indéformable et déformable.</td><td>S4</td></tr>
<tr><td>Compléter un modèle multiphysique.</td><td rowspan="2">Paramètres d'un modèle.
Grandeurs flux et effort.
Sources parfaites.</td><td rowspan="2">S3</td></tr>
<tr><td>Associer un modèle aux composants des chaines fonctionnelles.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Commentaires
Un logiciel de modélisation multiphysique permettant d'assembler des composants technologiques issus d'une bibliothèque est privilégié pour la modélisation des systèmes pluritechnologiques. Les modèles mis en œuvre couvrent différents domaines (électrique, mécanique, thermique, hydraulique et pneumatique).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert.</td><td>Systèmes linéaires continus et invariants :
– causalité ;
– modélisation par équations différentielles ;
– transformées de Laplace ;
– fonction de transfert ;
– forme canonique ;
– gain, ordre, classe, pôles et zéros.</td><td>S1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Commentaires
L’utilisation des transformées de Laplace ne nécessite aucun prérequis. Leur présentation se limite à leurs énoncés et aux propriétés du calcul symbolique strictement nécessaires. Les théorèmes de la valeur finale, de la valeur initiale et du retard sont donnés sans démonstration.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Modéliser le signal d'entrée.</td><td>Signaux canoniques d’entrée :
– impulsion ;
– échelon ;
– rampe ;
– signaux périodiques.</td><td>S1</td></tr>
<tr><td>Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle. ⇆ I</td><td>Premier ordre, deuxième ordre, dérivateur, intégrateur, gain et retard.
Paramètres caractéristiques.
Allures des réponses indicielle et fréquentielle.
Diagramme de Bode.</td><td>S2</td></tr>
</table>

Modéliser un système par schéma-blocs.	Schéma-blocs organique d'un système. Élaboration, manipulation et réduction de schéma-blocs. Fonctions de transfert : – chaîne directe et chaîne de retour ; – boucle ouverte et boucle fermée.	S1
Simplifier un modèle.	Linéarisation d'un modèle autour d'un point de fonctionnement. Pôles dominants et réduction de l'ordre du modèle : – principe ; – justification ; – limites.	S3
Modéliser un correcteur numérique. ⇆ *I*	Caractérisation des signaux à temps discret (échantillonnage et quantification). Modélisation par équations aux différences (équations de récurrence) d'un correcteur numérique (proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase).	S4
Commentaires *L'augmentation de la période d'échantillonnage permet de mettre en évidence les limites du modèle continu.* *Les transformées en z ne sont pas au programme.*		

Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.	Solide indéformable : – définition ; – repère ; – équivalence solide/repère ; – volume et masse ; – centre d'inertie ; – matrice d'inertie.	S3
Commentaire *Les calculs intégraux des éléments d'inertie (matrice et centre d'inertie) ne donnent pas lieu à évaluation.*		

Intégrer ou modifier une pièce dans un assemblage à l'aide d'un modeleur volumique 3D.	Esquisse (contrainte, robustesse et paramétrage). Fonctions (ajout et enlèvement de matière).	S2

Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques. Proposer un modèle cinématique paramétré à partir d'un système réel, d'une maquette numérique ou d'un plan d'ensemble.	Liaisons : – liaisons parfaites ; – degrés de liberté ; – classe d'équivalence cinématique ; – géométrie des contacts entre deux solides ; – liaisons normalisées entre solides, caractéristiques géométriques et repères d'expression privilégiés ; – paramètres géométriques linéaires et angulaires ; – symboles normalisés. Graphe de liaisons. Schéma cinématique.	S1
Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.	Vecteur position. Mouvements simple (translation et rotation) et composé. Trajectoire d'un point. Définition du vecteur vitesse et du vecteur taux de rotation. Définition du vecteur accélération. Composition des mouvements. Définition du contact ponctuel entre deux solides (roulement et glissement). Torseur cinématique (champ des vecteurs vitesse).	S1
Modéliser les petits déplacements.	Torseur des petits déplacements.	S3
Modéliser une action mécanique.	Modèle local (densités linéique, surfacique et volumique d'effort). Actions à distance et de contact. Modèle global. Passage d'un modèle local au modèle global. Frottements sec (lois de Coulomb) et visqueux. Résistance au roulement et au pivotement. Torseur des actions mécaniques transmissibles. Torseur d'une action mécanique extérieure. Torseurs couple et glisseur.	S2
Simplifier un modèle de mécanisme.	Associations de liaisons en série et en parallèle. Liaisons équivalentes (approches cinématique et statique). Conditions et limites de la modélisation plane.	S2

Modifier un modèle pour le rendre isostatique.	Mobilité du modèle d'un mécanisme. Hyperstatisme du modèle. Substitution de liaisons et ajout de solide. Conditions géométriques associées à l'hyperstatisme.	S2
Associer un modèle poutre à un solide.	Hypothèses de géométrie. Fibre neutre et section droite. Hypothèses de continuité, d'élasticité, d'homogénéité et d'isotropie des matériaux. Hypothèses de Navier-Bernoulli et de Barré de Saint-Venant. Hypothèse des petites perturbations (petites déformations et petits déplacements).	S3
Décrire le comportement d'un système séquentiel.	Diagramme d'états.	S2
Commentaire *La description graphique permet de s'affranchir d'un langage de programmation spécifique.*		

Modéliser les convertisseurs statiques d'énergie.	Modèles des interrupteurs parfaits. Synthèse des convertisseurs. Association des interrupteurs (cellule élémentaire de commutation). Caractéristiques des convertisseurs : – nature des grandeurs d'entrée-sortie ; – réversibilité.	S2
Commentaires *La modélisation se limite à :* *– l'étude fonctionnelle des interrupteurs deux ou trois segments ;* *– l'étude structurelle des convertisseurs à deux ou trois cellules de commutation.* *La synthèse des convertisseurs (modulateurs d'énergie) impose de s'intéresser aux règles d'association des sources parfaites, à leur réversibilité et à la bidirectionnalité des interrupteurs. Elle se limite aux fonctions de conversion continu-continu (hacheur), continu-alternatif (onduleur) et alternatif-continu (redresseur)*		

Modéliser un convertisseur électromécanique.	Modèle électromécanique de la machine à courant continu. Modèle statique monophasé de la machine synchrone (FEM induite, réactance synchrone et résistance). Modèle statique monophasé équivalent de la machine asynchrone (inductance magnétisante en parallèle avec la résistance et l'inductance de fuite du rotor). Bilan des puissances du convertisseur électromécanique en régime permanent.	S4
Commentaires *La physique des convertisseurs électromécaniques (machines électriques) n'est pas au programme. Les modèles des machines alternatives sont fournis. Le comportement des machines alternatives est étudié en alimentation en fréquence fixe (ou lentement variable) utilisant les modèles linéaires continus statiques.* *Pour les machines alternatives, seule la commande scalaire est étudiée (commande en « U/f » constant).* *Le fonctionnement des machines alimentées en grandeurs alternatives est qualifié en régime permanent dans les quatre quadrants.*		

Modéliser la commande d'un ensemble asservi constitué du modulateur d'énergie, de la machine électrique et de sa charge.	Commande des machines en couple. Commande des machines en vitesse. Modèle dynamique dans le plan (d,q) des machines synchrones et asynchrones.	S4
Commentaires *Les modèles dynamiques des machines électriques dans le plan (d,q) sont fournis.*		

B3 – Valider un modèle

Compétences développées	**Connaissances associées**	**Semestre**
Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.	Critères de performances.	S2
Préciser les limites de validité d'un modèle.	Point de fonctionnement. Non-linéarités (courbure, hystérésis, saturation et seuil) et retard pur.	S4
Modifier les paramètres et enrichir le modèle pour minimiser l'écart entre les résultats analytiques et/ou numériques et les résultats expérimentaux.		S4

C – Résoudre

C1 – Proposer une démarche de résolution

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.	Critères du cahier des charges : – stabilité (marges de stabilité, amortissement et dépassement relatif) ; – précision (erreur/écart statique et erreur de trainage) ; – rapidité (temps de réponse à 5 %, bande passante, temps de montée et retard de trainage).	S2
Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.	Compensation de pôles, réglage de marges, amortissement, rapidité et bande passante. Application aux correcteurs de type proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase.	S3
Choisir une démarche de résolution d’un problème d'ingénierie numérique ou d'intelligence artificielle. ⇆ *I*	Décomposition d'un problème complexe en sous problèmes simples. Choix des algorithmes (réseaux de neurones, *k* plus proches voisins et régression linéaire multiple).	S3
Proposer une démarche permettant d'obtenir une loi entrée-sortie géométrique. ⇆ *I*	Fermetures géométriques.	S1
Proposer une démarche permettant la détermination d’une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.	Graphe de structure. Choix des isolements. Choix des équations à écrire pour appliquer le principe fondamental de la statique ou le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen. Théorème de l'énergie cinétique.	S3
Proposer une démarche permettant de déterminer des grandeurs électriques.	Lois de Kirchhoff. Théorème de superposition.	S1

Proposer une démarche permettant de déterminer les contraintes et/ou les déplacements le long d'une poutre.	Tronçons. Méthode des coupures. Théorème de superposition.	S3
Commentaire *Les méthodes de résolution des problèmes hyperstatiques en résistance des matériaux ne sont pas au programme.*		

C2 – Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique

Compétences développées	**Connaissances associées**	**Semestre**
Déterminer la réponse temporelle. ⇆ *I*	Expressions des solutions des équations différentielles pour les systèmes d'ordre 1 et 2 soumis à une entrée échelon. Allures des solutions des équations différentielles d'ordre 1 et 2 pour les entrées de type impulsion, échelon, rampe et sinus (en régime permanent).	S1
Commentaire *La résolution d'équations différentielles et les transformées inverses de Laplace ne sont pas au programme.*		

Déterminer la réponse fréquentielle. ⇆ *I*	Allures des diagrammes réel et asymptotique de Bode.	S2
Déterminer les performances d'un système asservi.	Stabilité d'un système asservi : – définition ; – amortissement ; – position des pôles dans le plan complexe ; – marges de stabilité. Rapidité d'un système : – temps de réponse à 5 % ; – temps de montée ; – bande passante. Précision d'un système asservi : – théorème de la valeur finale ; – écart/erreur statique (consigne ou perturbation) ; – erreur de trainage vis-à-vis de la consigne ; – lien entre la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte et l'écart statique.	S2

Commentaire
Les critères de Routh et de Nyquist, ainsi que les diagrammes de Black-Nichols et de Nyquist, ne sont pas au programme.

Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.	Correcteurs proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase.	S4
Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère.	Trajectoire d'un point. Mouvements de translation et de rotation. Mouvement composé.	S1
Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques. $\leftrightarrows I$	Loi entrée-sortie géométrique. Loi entrée-sortie cinématique. Transmetteurs de puissance (vis-écrou, roue et vis sans fin, trains d'engrenages simples, trains épicycloïdaux, pignon-crémaillère et poulies-courroie).	S2
Déterminer les actions mécaniques en statique.	Référentiel galiléen. Principe fondamental de la statique. Principe des actions réciproques.	S2
Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.	Torseurs cinétique et dynamique d'un solide ou d'un ensemble de solides, par rapport à un référentiel galiléen. Principe fondamental de la dynamique en référentiel galiléen. Énergie cinétique. Inertie et masse équivalentes. Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ou à un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport au repère galiléen. Puissance intérieure à un ensemble de solides. Théorème de l'énergie cinétique. Rendement en régime permanent.	S3
Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.		
Déterminer les grandeurs relatives au comportement d'une poutre.	Torseur de cohésion. Sollicitations (traction, torsion, flexion et cisaillement). Contraintes dans une section droite, déplacements le long d'une ligne moyenne et déformations. Conditions aux limites.	S3

Déterminer les signaux électriques dans les circuits.	Circuits en régime alternatif sinusoïdal. Diagramme de Fresnel. Puissance active (continu, monophasé et triphasé en régime alternatif sinusoïdal). Puissances apparente et réactive, en monophasé et triphasé en régime alternatif sinusoïdal. Ondulation des grandeurs électriques en régime permanent dans les convertisseurs. Composants de filtrage.	S3

C3 – Mettre en œuvre une démarche de résolution numérique

Compétences développées	**Connaissances associées**	**Semestre**
Mener une simulation numérique. ⇆ *I*	Choix des grandeurs physiques. Choix du solveur et de ses paramètres (pas de discrétisation et durée de la simulation). Choix des paramètres de classification. Influence des paramètres du modèle sur les performances.	S4
Résoudre numériquement une équation ou un système d'équations. ⇆ *I*	Réécriture des équations d'un problème. Résolution de problèmes du type *f(x) = 0* (méthodes de dichotomie et de Newton). Résolution d'un système linéaire du type $A \cdot X = B$. Résolution d'équations différentielles (schéma d'Euler explicite). Intégration et dérivation numérique (schémas arrière et avant).	S3
Commentaires *La « réécriture des équations » signifie :* *– remettre en forme des équations pour leurs traitements par une bibliothèque ;* *– mettre sous forme matricielle un problème (problème de Cauchy et système linéaire).* *Les méthodes numériques sont introduites au fur et à mesure, en fonction des besoins de la formation. Pour la résolution d'un système d'équations du type A·X = B, l'utilisation d'une bibliothèque préimplémentée est privilégiée.* *Les aspects théoriques liés aux méthodes numériques ne sont pas exigibles (stabilité, convergence, conditionnement de matrices…).*		

Résoudre un problème en utilisant une solution d'intelligence artificielle. ⇆ ***I***	Apprentissage supervisé. Choix des données d'apprentissage. Mise en œuvre des algorithmes (réseaux de neurones, *k* plus proches voisins et régression linéaire multiple). Phases d'apprentissage et d'inférence.	S3
Commentaire *Des bibliothèques préimplémentées sont utilisées.*		

D – Expérimenter

D1 – Mettre en œuvre un système

Compétences développées	**Connaissances associées**	**Semestre**
Mettre en œuvre un système en suivant un protocole.		S1
Repérer les constituants réalisant les principales fonctions des chaines fonctionnelles.	Fonctions acquérir, traiter et communiquer. Fonctions alimenter, moduler, convertir, transmettre et agir.	S1
Identifier les grandeurs physiques d'effort et de flux.		S2

D2 – Proposer et justifier un protocole expérimental

Compétences développées	**Connaissances associées**	**Semestre**
Choisir le protocole en fonction de l'objectif visé.		S4
Choisir les configurations matérielles et logicielles du système en fonction de l'objectif visé par l'expérimentation.		S2
Choisir les réglages du système en fonction de l'objectif visé par l'expérimentation.		
Choisir la grandeur physique à mesurer ou justifier son choix.		

Choisir les entrées à imposer et les sorties pour identifier un modèle de comportement.		S2
Justifier le choix d'un capteur ou d'un appareil de mesure vis-à-vis de la grandeur physique à mesurer.		S3

D3 – Mettre en œuvre un protocole expérimental

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Régler les paramètres de fonctionnement d'un système.		S1
Mettre en œuvre un appareil de mesure adapté à la caractéristique de la grandeur à mesurer.		S3
Effectuer des traitements à partir de données. ⇆ *I*	Traitement de fichiers de données. Moyenne et écart type. Moyenne glissante et filtres numériques passe-bas du premier et du second ordre.	S3
Identifier les erreurs de mesure.	Incertitudes, résolution, quantification, échantillonnage, justesse, fidélité, linéarité et sensibilité.	S2
Identifier les erreurs de méthode.		
Commentaires *L'incertitude renvoie à la technologie des appareils de mesure et des capteurs. Il n'est pas souhaité de longs développements théoriques et calculs associés.*		

E – Communiquer

E1 – Rechercher et traiter des informations

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Rechercher des informations.	Outils de recherche. Mots-clefs.	S2
Distinguer les différents types de documents et de données en fonction de leurs usages.		S2
Vérifier la pertinence des informations (obtention, véracité, fiabilité et précision de l'information).		
Extraire les informations utiles d'un dossier technique.		
Lire et décoder un document technique.	Diagrammes SysML. Schémas cinématique, électrique, hydraulique et pneumatique. Représentation 2D normalisée (dessin de définition et plan d'ensemble). Représentation 3D.	S4
Commentaire *Les normes de représentation des schémas pneumatiques, hydrauliques et du langage SysML sont fournies.*		

Trier les informations selon des critères.		S2
Effectuer une synthèse des informations disponibles dans un dossier technique.		

E2 – Produire et échanger de l'information

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Choisir un outil de communication adapté à l'interlocuteur.		S2
Faire preuve d'écoute et confronter des points de vue.		
Présenter les étapes de son travail.		
Présenter de manière argumentée une synthèse des résultats.		
Produire des documents techniques adaptés à l'objectif de la communication. ⇆ *I*	Diagrammes SysML. Chaine fonctionnelle. Schéma-blocs. Schémas cinématique, électrique, pneumatique et hydraulique. Schéma d'architecture. Graphe de structure. Croquis, représentations 3D et normalisée 2D. Spécifications d'algorithmes.	S4
Commentaires *Les représentations effectuées « à la main » doivent traduire, sans ambiguïté, les intentions de conception sans se focaliser sur les détails de tracé. La représentation normalisée des éléments standards ne peut être exigée.* *L'écriture des diagrammes SysML se limite à leur complétion et à leur modification*.		

Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.	Grandeurs utilisées : – unités du système international ; – homogénéité des grandeurs.	S4

F – Concevoir

F1 – Concevoir l'architecture d'un système innovant

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Proposer une architecture fonctionnelle et organique.		S4
Commentaires *Cette proposition peut se faire sous forme d'association de blocs.* *Il s'agit d'allouer des composants à la satisfaction d'exigences fonctionnelles et éventuellement de décrire les interfaces entre ces composants.* *L'activité de projet est une modalité pédagogique à privilégier pour développer cette compétence.*		

Intégrer les contraintes d'écoconception dans les architectures proposées.	Cycle de vie.	S4
Commentaires *Les notions suivantes sont abordées :* *– développement d'un nouveau concept ;* *– sélection des matériaux ayant le moins d'impact environnemental ;* *– réduction de la quantité de matière ;* *– techniques de production ;* *– logistique ;* *– durée de vie du produit ;* *– fin de vie (recyclabilité et valorisation des produits).* *Aucune méthode normalisée ne donne lieu à évaluation.*		

F2 – Proposer et choisir des solutions techniques

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Proposer et hiérarchiser des critères de choix.	En relation avec le cahier des charges du système, les critères suivants sont abordés : – autonomie énergétique ; – coût ; – durée de vie ; – encombrement ; – impact environnemental ; – précision et rapidité ; – rendement ; – réversibilité ; – résistance et déplacement. Cette liste est non exhaustive.	S4

Choisir les composants de la chaine d'information.	Technologie de capteur. Carte de commande.	S4
Choisir les composants de la chaine de puissance.	Dispositifs de stockage d'énergie. Modulateur de puissance. Convertisseur de puissance. Transmetteur de puissance.	S4
Modifier la commande pour faire évoluer le comportement du système. ⇆ *I*	Modification d'un programme : – système séquentiel ; – structures algorithmiques. Choix et paramètres d'un correcteur.	S4

F3 – Dimensionner une solution technique choisie

Compétences développées	**Connaissances associées**	**Semestre**
Dimensionner un composant des chaines fonctionnelles à partir d'une documentation technique.	Chaine d'information : – capteurs (étendue de mesure, précision, justesse, fidélité et sensibilité) ; – carte de commande (résolution et mémoire) ; – débit de communication. Chaine de puissance : – durée de vie ; – capacité et consommation électrique ; – couple thermique équivalent ; – puissance ; – rapport de transmission.	S4
Concevoir et dimensionner une liaison mécanique.	Exigences techniques : – assemblage ; – guidage en rotation ; – guidage en translation. Critères de dimensionnement : – puissance, vitesse et effort ; – durée de vie ; – encombrement.	S4
Concevoir une pièce en optimisant le triptyque produit-procédés-matériaux.	Familles et propriétés des matériaux. Méthode de choix des matériaux et des procédés (fonction, objectif et contraintes). Indicateur de performances. Résistance et déplacement. Influence du procédé sur la géométrie du produit.	S4

Commentaires *Des bases de données et des outils logiciels associés permettent de conduire une analyse qualitative et quantitative en utilisant une démarche d'écoconception.* *Les critères économiques de sélection sont évoqués.* *Seule une connaissance des procédés figurant dans la compétence Réaliser peut être exigée.*

G – Réaliser

G1 – Réaliser tout ou partie d'un prototype

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Réaliser tout ou partie de la chaine de puissance.		S4
Intégrer les composants des chaines fonctionnelles dans un prototype.		
Implémenter et exécuter un programme sur une cible.		
Valider le fonctionnement du prototype.		
Commentaires *Ces compétences sont développées dans des activités de synthèse mobilisant des connaissances dans les différentes parties du programme.* *Les moyens de réalisation de l'établissement scolaire sont utilisés (par exemple les machines à commande numérique ou de prototypage rapide).* *Les compétences attendues sont limitées à :* *– la réalisation d'un prototype ;* *– l'intégration d'une carte de commande dans son environnement matériel.* *L'acquisition de savoir-faire professionnels est exclue.*		

G2 – Industrialiser un produit

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Choisir et ordonnancer des procédés de fabrication du matériau à la pièce finie.	Critères de choix des procédés (forme du produit, matériau, coûts, taille de la série et impact environnemental).	S3
Commentaire *Des bases de données et des outils logiciels associés permettent de conduire une analyse qualitative et quantitative en utilisant une démarche d'écoconception.*		

<table>
<tr><td>Évaluer la capacité d'un procédé à réaliser une pièce plastique.</td><td>Injection plastique et procédés additifs.
Domaines d'application.
Règles de conception.</td><td>S2</td></tr>
<tr><td>Évaluer la capacité d'un procédé à réaliser une pièce composite.</td><td>Mise en forme des matériaux composites et procédés additifs.
Domaines d'application.
Règles de conception.</td><td>S2</td></tr>
<tr><td>Évaluer la capacité d'un procédé à réaliser une pièce métallique.</td><td>Mise en forme des bruts par déformation plastique, moulage et découpage.
Procédés additifs.
Assemblage par soudage.
Traitements thermiques des aciers :
– principes physiques ;
– matériaux associés ;
– caractéristiques mécaniques modifiées par les traitements volumiques (trempe, revenu et recuit) et surfaciques (trempe, cémentation et nitruration).
Domaines d'application.
Règles de conception.</td><td>S3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Commentaires
L'analyse des procédés se limite à une approche qualitative.
La description des procédés et des matériaux associés s'appuie sur :
– les phénomènes physiques associés aux procédés ;
– les contraintes technologiques et économiques ;
– l'influence du procédé sur la géométrie des pièces.
Les traitements thermiques des aciers se limitent aux aspects fonctionnels. L'étude des phénomènes métallurgiques est exclue.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Évaluer la capacité d'un procédé à réaliser des opérations de finition.</td><td>Enlèvement de matière (principe de génération et cinématique).
Choix de cinématique de machine.
Choix des phases.
Choix d'une mise en position.</td><td>S3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Commentaires
Pour les moyens d'usinage, la classification des machines à commande numérique est mise en évidence (tours 2 et 3 axes, centres d'usinage 3, 4 et 5 axes).
La définition détaillée des phases de fabrication n'est pas au programme.
Pour la mise en position, seul le symbole d'élimination d'un degré de liberté en translation est utilisé.</td></tr>
</table>

Contrôler la conformité géométrique et dimensionnelle d'un produit.	Dispositifs de contrôle. Nuages de points. Méthodes d'association.	S3
Commentaires *La réalisation des gammes de mesure n'est pas au programme.* *La métrologie tridimensionnelle se limite aux géométries suivantes : plan, cercle, droite et cylindre de révolution.*		

Programme d'informatique des classes préparatoires scientifiques Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI), Physique, chimie et sciences de l'ingénieur (PCSI), Physique, technologie et sciences de l'ingénieur (PTSI), Mathématiques et physique (MP), Physique et chimie (PC), Physique et sciences de l'ingénieur (PSI), Physique et technologie (PT)

NOR : ESRS2035774A
arrêté du 5-1-2021 - JO du 7-2-2021
MESRI - DGESIP - A1-2

Vu Code de l'éducation, notamment articles D. 612-19 à D. 612-29 ; arrêtés du 10-2-1995 modifiés ; arrêtés du 3-7-1995 modifiés ; arrêtés du 20-6-1996 modifiés ; avis du CSE du 10-12-2020 ; avis du Cneser du 15-12-2020 ; avis de la ministre des Armées du 15-12-2020

Article 1 - Le programme d'informatique :
- des classes préparatoires scientifiques Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI), Physique, chimie et sciences de l'ingénieur (PCSI) et Physique, technologie et sciences de l'ingénieur (PTSI), figurant respectivement aux annexes 5, 5 et 5 des arrêtés du 3 juillet 1995 susvisés ;
- des classes préparatoires scientifiques Mathématiques et physique (MP), Physique et chimie (PC), Physique et sciences de l'ingénieur (PSI) et Physique et technologie (PT), figurant respectivement aux annexes 5a, 4, 5 et 5 des arrêtés du 20 juin 1996 susvisés,

est remplacé par celui annexé au présent arrêté.

Article 2 - Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie.

Article 3 - Les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021-2022 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023 pour les classes de seconde année.
Dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie, les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022 pour les classes de seconde année.

Article 4 - Le directeur général de l'enseignement scolaire, la directrice générale des outre-mer et la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle sont chargés, chacun en ce qui le concerne, de l'exécution du présent arrêté, qui sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait le 5 janvier 2021

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
Édouard Geffray

Pour le ministre des Outre-mer et par délégation,
La directrice générale des outre-mer,
Sophie Brocas

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Pour la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle,
Le chef de service, adjoint de la directrice générale,

Brice Lannaud

Annexe

↳ *Programme d'informatique commune*

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voies Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI), Physique, chimie et sciences de l'ingénieur (PCSI), Physique, technologie et sciences de l'ingénieur (PTSI), Mathématiques et physique (MP), Physique et chimie (PC), Physique et sciences de l'ingénieur (PSI), Physique et technologie (PT)

Annexe
Programme d'informatique commune

Programme d'informatique
Filières MP, PC, PSI, PT
Tronc commun
Première et deuxième années

Table des matières

Introduction au programme

Les objectifs du programme Le programme d'informatique de MPSI, PCSI, PTSI, MP, PC, PSI et PT s'inscrit en continuité en amont avec les programmes rénovés du lycée, et en aval avec les enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études universitaires. Il a pour objectif la formation de futurs ingénieures et ingénieurs, enseignantes et enseignants, chercheuses et chercheurs et avant tout des personnes informées, capables de gouverner leur vie professionnelle et citoyenne nourrie par les pratiques de la démarche scientifique, en pleine connaissance et maîtrise des techniques et des enjeux de l'informatique.
Le présent programme a pour ambition de poser les bases d'un enseignement cohérent et mesuré d'une science informatique encore jeune et dont les manifestations technologiques connaissent des cycles d'obsolescence rapide. On garde donc à l'esprit :

— de privilégier la présentation de concepts fondamentaux pérennes sans s'attacher outre mesure à la description de technologies, protocoles ou normes actuels ;
— de donner aux futurs diplômées et diplômés les moyens de réussir dans un domaine en mutation rapide et dont les technologies qui en sont issues peuvent sauter brutalement d'un paradigme à un autre très différent ;
— de préparer les étudiantes et étudiants à tout un panel de professions et de situations de la vie professionnelle qui les amène à remplir tour à tour une mission d'expertise, de création ou d'invention, de prescription de méthodes ou de techniques, de contrôle critique des choix opérés ou encore de décision en interaction avec des spécialistes ;
— que les concepts à enseigner sont les mêmes dans toutes les filières mais que le professeur ou la professeure d'informatique de chaque classe peut adapter la façon de les transmettre et les exemples concrets sur lesquels il ou elle s'appuie au profil de ses étudiantes et étudiants et aux autres enseignements qu'ils suivent.

Compétences visées Ce programme vise à développer les six grandes compétences suivantes :

analyser et modéliser un problème ou une situation, notamment en utilisant les objets conceptuels de l'informatique pertinents (table relationnelle, graphe, dictionnaire, etc.) ;

imaginer et concevoir une solution, décomposer en blocs, se ramener à des sous-problèmes simples et indépendants, adopter une stratégie appropriée, décrire une démarche, un algorithme ou une structure de données permettant de résoudre le problème ;

décrire et spécifier les caractéristiques d'un processus, les données d'un problème, ou celles manipulées par un algorithme ou une fonction ;

mettre en œuvre une solution, par la traduction d'un algorithme ou d'une structure de données dans un langage de programmation ou un langage de requête ;

justifier et critiquer une solution, que ce soit en démontrant un algorithme par une preuve mathématique ou en développant des processus d'évaluation, de contrôle, de validation d'un code que l'on a produit ;

communiquer à l'écrit ou à l'oral, présenter des travaux informatiques, une problématique et sa solution ; défendre ses choix ; documenter sa production et son implémentation.

La pratique régulière de la résolution de problèmes par une approche algorithmique et des activités de programmation qui en résultent constitue un aspect essentiel de l'apprentissage de l'informatique. Les exemples ou les exercices d'application peuvent être choisis au sein de l'informatique elle-même ou en lien avec d'autres champs disciplinaires.

Sur les partis pris par le programme Ce programme impose aussi souvent que possible des choix de vocabulaire ou de notation de certaines notions. Les choix opérés ne présument pas la supériorité de l'option retenue. Ils ont été précisés dans l'unique but d'aligner les pratiques d'une classe à une autre et d'éviter l'introduction de longues définitions récapitulatives préliminaires à un exercice ou un problème. De même, ce programme nomme aussi souvent que possible l'un des algorithmes possibles parmi les classiques qui répondent à un problème donné. Là encore, le programme ne défend pas la prééminence d'un algorithme ou d'une méthode par rapport à un autre mais il invite à faire bien plutôt que beaucoup.

Sur les langages et la programmation L'enseignement du présent programme repose sur un langage de manipulation de données (SQL) ainsi que le langage de programmation Python, pour lequel une annexe liste de façon limitative les éléments qui sont exigibles des étudiants ainsi que ceux auxquels les étudiants sont familiarisés et qui peuvent être attendus à condition qu'ils soient accompagnés d'une documentation. La poursuite de l'apprentissage du langage Python est vue en particulier par les étudiants pour adopter immédiatement une bonne discipline de programmation tout en se concentrant sur le noyau du langage plutôt que sur une API pléthorique.

Mode d'emploi Ce programme a été rédigé par semestre pour assurer une certaine homogénéité de la formation. Le premier semestre permet d'asseoir les bases de programmation vues au lycée et les concepts associés. L'organisation de la progression au sein des semestres relève de la responsabilité pédagogique de la professeure ou du professeur et le tissage de liens entre les thèmes contribue à la valeur de son enseignement. Les notions étudiées lors d'un semestre précédent sont régulièrement revisitées tout au long des deux années d'enseignement.

1 Programme du premier semestre

Les séances de travaux pratiques du premier semestre poursuivent les objectifs suivants :

— consolider l'apprentissage de la programmation en langage Python qui a été entrepris dans les classes du lycée ;
— mettre en place un environnement de travail ;
— mettre en place une discipline de programmation : spécification précise des fonctions et programmes, annotations et commentaires, jeux de tests ;
— introduire les premiers éléments de complexité des algorithmes : on ne présente que l'estimation asymptotique du coût dans le cas le pire ;
— introduire des outils de validation : variants et invariants.

Le tableau ci-dessous présente les thèmes qui sont abordés lors de ces séances, et, en colonne de droite, une liste, sans aucun caractère impératif, d'exemples d'activités qui peuvent être proposées aux étudiants. L'ordre de ces thèmes n'est pas impératif.

Aucune connaissance relative aux modules éventuellement rencontrés lors de ces séances n'est exigible des étudiants.

Thèmes	**Exemples d'activité, au choix du professeur et non exigibles des étudiants. *Commentaires.***
Recherche séquentielle dans un tableau unidimensionnel. Dictionnaire.	Recherche d'un élément. Recherche du maximum, du second maximum. Comptage des éléments d'un tableau à l'aide d'un dictionnaire. *Manipulations élémentaires d'un tableau unidimensionnel. Utilisation de dictionnaires en boîte noire. Notions de coût constant, de coût linéaire.*
Algorithmes opérant sur une structure séquentielle par boucles imbriquées.	Recherche d'un facteur dans un texte. Recherche des deux valeurs les plus proches dans un tableau. Tri à bulles. *Notion de complexité quadratique. On propose des outils pour valider la correction de l'algorithme.*
Utilisation de modules, de bibliothèques.	Lecture d'un fichier de données simples. Calculs statistiques sur ces données. Représentation graphique (histogrammes, etc.).
Algorithmes dichotomiques.	Recherche dichotomique dans un tableau trié. Exponentiation rapide. *On met en évidence une accélération entre complexité linéaire d'un algorithme naïf et complexité logarithmique d'un algorithme dichotomique. On met en œuvre des jeux de tests, des outils de validation.*
Fonctions récursives.	Version récursive d'algorithmes dichotomiques. Fonctions produisant à l'aide de `print` successifs des figures alphanumériques. Dessins de fractales. Énumération des sous-listes ou des permutations d'une liste. *On évite de se cantonner à des fonctions mathématiques (factorielle, suites récurrentes). On peut montrer le phénomène de dépassement de la taille de la pile.*
Algorithmes gloutons.	Rendu de monnaie. Allocation de salles pour des cours. Sélection d'activité. *On peut montrer par des exemples qu'un algorithme glouton ne fournit pas toujours une solution exacte ou optimale.*
Matrices de pixels et images.	Algorithmes de rotation, de réduction ou d'agrandissement. Modification d'une image par convolution : flou, détection de contour, etc. *Les images servent de support à la présentation de manipulations de tableaux à deux dimensions.*
Tris.	Algorithmes quadratiques : tri par insertion, par sélection. Tri par partition-fusion. Tri rapide. Tri par comptage. *On fait observer différentes caractéristiques (par exemple, stable ou non, en place ou non, comparatif ou non, etc).*

2 Programme du second semestre

2.1 Méthodes de programmation et analyse des algorithmes

On formalise par des leçons et travaux pratiques le travail entrepris au premier semestre concernant la discipline et les méthodes de programmation.
Même si on ne prouve pas systématiquement tous les algorithmes, on dégage l'idée qu'un algorithme doit se prouver et que sa programmation doit se tester.

Notions	**Commentaires**
Instruction et expression. Effet de bord.	On peut signaler par exemple que le fait que l'affectation soit une instruction est un choix des concepteurs du langage Python et en expliquer les conséquences.
Spécification des données attendues en entrée, et fournies en sortie/retour.	On entraîne les étudiants à accompagner leurs programmes et leurs fonctions d'une spécification. Les signatures des fonctions sont toujours précisées.
Annotation d'un bloc d'instructions par une précondition, une postcondition, une propriété invariante.	Ces annotations se font à l'aide de commentaires.
Assertion.	L'utilisation d'assertions est encouragée par exemple pour valider des entrées. La levée d'une assertion entraîne l'arrêt du programme. Ni la définition ni le rattrapage des exceptions ne sont au programme.
Explicitation et justification des choix de conception ou programmation.	Les parties complexes de codes ou d'algorithmes font l'objet de commentaires qui l'éclairent en évitant la paraphrase. Le choix des collections employées (par exemple, liste ou dictionnaire) est un choix éclairé.
Terminaison. Correction partielle. Correction totale. Variant. Invariant.	La correction est partielle quand le résultat est correct lorsque l'algorithme s'arrête, la correction est totale si elle est partielle et si l'algorithme termine. On montre sur plusieurs exemples que la terminaison peut se démontrer à l'aide d'un variant de boucle. Sur plusieurs exemples, on explicite, sans insister sur aucun formalisme, des invariants de boucles en vue de montrer la correction des algorithmes.
Jeu de tests associé à un programme.	Il n'est pas attendu de connaissances sur la génération automatique de jeux de tests ; un étudiant doit savoir écrire un jeu de tests à la main, donnant à la fois des entrées et les sorties correspondantes attendues. On sensibilise, par des exemples, à la notion de partitionnement des domaines d'entrée et au test des limites.
Complexité.	On aborde la notion de complexité temporelle dans le pire cas en ordre de grandeur. On peut, sur des exemples, aborder la notion de complexité en espace.

2.2 Représentation des nombres

On présente sans formalisation théorique les enjeux de la représentation en mémoire des nombres. Ces notions permettent d'expliquer certaines difficultés rencontrées et précautions à prendre lors de la programmation ou de l'utilisation d'algorithmes de calcul numérique dans les disciplines qui y recourent.

Notions	**Commentaires**
Représentation des entiers positifs sur des mots de taille fixe.	La conversion d'une base à une autre n'est pas un objectif de formation.
Représentation des entiers signés sur des mots de taille fixe.	Complément à deux.

Entiers multi-précision de Python.	On les distingue des entiers de taille fixe sans détailler leur implémentation. On signale la difficulté à évaluer la complexité des opérations arithmétiques sur ces entiers.
Distinction entre nombres réels, décimaux et flottants.	On montre sur des exemples l'impossibilité de représenter certains nombres réels ou décimaux dans un mot machine
Représentation des flottants sur des mots de taille fixe. Notion de mantisse, d'exposant.	On signale la représentation de 0 mais on n'évoque pas les nombres dénormalisés, les infinis ni les NaN. Aucune connaissance liée à la norme IEEE-754 n'est au programme.
Précision des calculs en flottants.	On insiste sur les limites de précision dans le calcul avec des flottants, en particulier pour les comparaisons. Le comparatif des différents modes d'arrondi n'est pas au programme.

2.3 Bases des graphes, plus courts chemins

Il s'agit de définir le modèle des graphes, leurs représentations et leurs manipulations.
On s'efforce de mettre en avant des applications importantes et si possible modernes : réseau de transport, graphe du web, réseaux sociaux, bio-informatique. On précise autant que possible la taille typique de tels graphes.

Notions	**Commentaires**
Vocabulaire des graphes.	Graphe orienté, graphe non orienté. Sommet (ou nœud); arc, arête. Boucle. Degré (entrant et sortant). Chemin d'un sommet à un autre. Cycle. Connexité dans les graphes non orientés. On présente l'implémentation des graphes à l'aide de listes d'adjacence (rassemblées par exemple dans une liste ou dans un dictionnaire) et de matrice d'adjacence. On n'évoque ni multi-arcs ni multi-arêtes.
Notations.	Graphe $G = (S, A)$, degrés $d(s)$ (pour un graphe non orienté), $d_+(s)$ et $d_-(s)$ (pour un graphe orienté).
Pondération d'un graphe. Étiquettes des arcs ou des arêtes d'un graphe.	On motive l'ajout d'information à un graphe par des exemples concrets.
Parcours d'un graphe.	On introduit à cette occasion les piles et les files; on souligne les problèmes d'efficacité posés par l'implémentation des files par les listes de Python et l'avantage d'utiliser un module dédié tel que `collections.deque`. Détection de la présence de cycles ou de la connexité d'un graphe non orienté.
Recherche d'un plus court chemin dans un graphe pondéré avec des poids positifs.	Algorithme de Dijkstra. On peut se contenter d'un modèle de file de priorité naïf pour extraire l'élément minimum d'une collection. Sur des exemples, on s'appuie sur l'algorithme A* vu comme variante de celui de Dijkstra pour une première sensibilisation à la notion d'heuristique.

3 Programme du troisième semestre

3.1 Bases de données

On se limite volontairement à une description applicative des bases de données en langage SQL. Il s'agit de permettre d'interroger une base présentant des données à travers plusieurs relations. On ne présente pas l'algèbre relationnelle ni le calcul relationnel.

Notions	Commentaires
Vocabulaire des bases de données : tables ou relations, attributs ou colonnes, domaine, schéma de tables, enregistrements ou lignes, types de données.	On présente ces concepts à travers de nombreux exemples. On s'en tient à une notion sommaire de domaine : entier, flottant, chaîne ; aucune considération quant aux types des moteurs SQL n'est au programme. Aucune notion relative à la représentation des dates n'est au programme ; en tant que de besoin on s'appuie sur des types numériques ou chaîne pour lesquels la relation d'ordre coïncide avec l'écoulement du temps. Toute notion relative aux collations est hors programme ; on se place dans l'hypothèse que la relation d'ordre correspond à l'ordre lexicographique usuel. `NULL` est hors programme.
Clé primaire.	Une clé primaire n'est pas forcément associée à un unique attribut même si c'est le cas le plus fréquent. La notion d'index est hors programme.
Entités et associations, clé étrangère.	On s'intéresse au modèle entité–association au travers de cas concrets d'associations $1-1, 1-*, *-*$. Séparation d'une association $*-*$ en deux associations $1-*$. L'utilisation de clés primaires et de clés étrangères permet de traduire en SQL les associations $1-1$ et $1-*$.
Requêtes `SELECT` avec simple clause `WHERE` (sélection), projection, renommage `AS`. Utilisation des mots-clés `DISTINCT`, `LIMIT`, `OFFSET`, `ORDER BY`.	Les opérateurs au programme sont `+`, `-`, `*`, `/` (on passe outre les subtilités liées à la division entière ou flottante), `=`, `<>`, `<`, `<=`, `>`, `>=`, `AND`, `OR`, `NOT`.
Opérateurs ensemblistes `UNION`, `INTERSECT` et `EXCEPT`, produit cartésien.	
Jointures internes T_1 `JOIN` T_2 … `JOIN` T_n `ON` ϕ. Autojointure.	On présente les jointures en lien avec la notion de relations entre tables. On se limite aux équi-jointures : ϕ est une conjonction d'égalités.
Agrégation avec les fonctions `MIN`, `MAX`, `SUM`, `AVG` et `COUNT`, y compris avec `GROUP BY`.	Pour la mise en œuvre des agrégats, on s'en tient à la norme SQL99. On présente quelques exemples de requêtes imbriquées.
Filtrage des agrégats avec `HAVING`.	On marque la différence entre `WHERE` et `HAVING` sur des exemples.

Mise en œuvre
La création de tables et la suppression de tables au travers du langage SQL sont hors programme. La mise en œuvre effective se fait au travers d'un logiciel permettant d'interroger une base de données à l'aide de requêtes SQL. Récupérer le résultat d'une requête à partir d'un programme n'est pas un objectif. Même si aucun formalisme graphique précis n'est au programme, on peut décrire les entités et les associations qui les lient au travers de diagrammes sagittaux informels. Sont hors programme : la notion de modèle logique *vs* physique, les bases de données non relationnelles, les méthodes de modélisation de base, les fragments DDL, TCL et ACL du langage SQL, les transactions, l'optimisation de requêtes par l'algèbre relationnelle.

3.2 Dictionnaires et programmation dynamique

Les dictionnaires sont utilisés en boîte noire dès la première année ; les principes de leur fonctionnement sont présentés en deuxième année. Ils peuvent être utilisés afin de mettre en mémoire des résultats intermédiaires quand on implémente une stratégie d'optimisation par programmation dynamique.

Notions	Commentaires
Dictionnaires, clés et valeurs.	On présente les principes du hachage, et les limitations qui en découlent sur le domaine des clés utilisables.
Usage des dictionnaires en programmation Python.	Syntaxe pour l'écriture des dictionnaires. Parcours d'un dictionnaire.
Programmation dynamique. Propriété de sous-structure optimale. Chevauchement de sous-problèmes. Calcul de bas en haut ou par mémoïsation. Reconstruction d'une solution optimale à partir de l'information calculée.	La mémoïsation peut être implémentée à l'aide d'un dictionnaire. On souligne les enjeux de complexité en mémoire. Exemples : partition équilibrée d'un tableau d'entiers positifs, ordonnancement de tâches pondérées, plus longue sous-suite commune, distance d'édition (Levenshtein), distances dans un graphe (Floyd-Warshall).

Mise en œuvre
Les exemples proposés ne forment une liste ni limitative ni impérative. Les cas les plus complexes de situations où la programmation dynamique peut être utilisée sont guidés. On met en rapport le statut de la propriété de sous-structure optimale en programmation dynamique avec sa situation en stratégie gloutonne vue en première année.

3.3 Algorithmique pour l'intelligence artificielle et l'étude des jeux

Cette partie permet notamment de revisiter les notions de programmation et de représentation de données par un graphe, qui sont vues en première année, en les appliquant à des enjeux contemporains.

Notions	Commentaires
Algorithme des k plus proches voisins avec distance euclidienne.	Matrice de confusion. Lien avec l'apprentissage supervisé.
Algorithme des k-moyennes.	Lien avec l'apprentissage non-supervisé. La démonstration de la convergence n'est pas au programme. On observe des convergences vers des minima locaux.
Jeux d'accessibilité à deux joueurs sur un graphe. Stratégie. Stratégie gagnante. Position gagnante. Détermination des positions gagnantes par le calcul des attracteurs. Construction de stratégies gagnantes.	On considère des jeux à deux joueurs (J_1 et J_2) modélisés par des graphes bipartis (l'ensemble des états contrôlés par J_1 et l'ensemble des états contrôlés par J_2). Il y a trois types d'états finals : les états gagnants pour J_1, les états gagnants pour J_2 et les états de match nul. On ne considère que les stratégies sans mémoire.
Notion d'heuristique. Algorithme min-max avec une heuristique.	L'élagage alpha-beta n'est pas au programme.

Mise en œuvre
La connaissance dans le détail des algorithmes de cette section n'est pas un attendu du programme. Les étudiants acquièrent une familiarité avec les idées sous-jacentes qu'ils peuvent réinvestir dans des situations où les modélisations et les recommandations d'implémentation sont guidées, notamment dans leurs aspects arborescents.

A Langage Python

Cette annexe liste limitativement les éléments du langage Python (version 3 ou supérieure) dont la connaissance est exigible des étudiants. Aucun concept sous-jacent n'est exigible au titre de la présente annexe. Aucune connaissance sur un module particulier n'est exigible des étudiants.
Toute utilisation d'autres éléments du langage que ceux que liste cette annexe, ou d'une fonction d'un module, doit obligatoirement être accompagnée de la documentation utile, sans que puisse être attendue une quelconque maîtrise par les étudiants de ces éléments.

Traits généraux

— Typage dynamique : l'interpréteur détermine le type à la volée lors de l'exécution du code.
— Principe d'indentation.
— Portée lexicale : lorsqu'une expression fait référence à une variable à l'intérieur d'une fonction, Python cherche la valeur définie à l'intérieur de la fonction et à défaut la valeur dans l'espace global du module.
— Appel de fonction par valeur : l'exécution de $f(x)$ évalue d'abord x puis exécute f avec la valeur calculée.

Types de base

— Opérations sur les entiers (`int`) : `+`, `-`, `*`, `//`, `**`, `%` avec des opérandes positifs.
— Opérations sur les flottants (`float`) : `+`, `-`, `*`, `/`, `**`.
— Opérations sur les booléens (`bool`) : **`not`**, **`or`**, **`and`** (et leur caractère paresseux).
— Comparaisons `==`, `!=`, `<`, `>`, `<=`, `>=`.

Types structurés

— Structures indicées immuables (chaînes, tuples) : `len`, accès par indice positif valide, concaténation `+`, répétition `*`, tranche.
— Listes : création par compréhension `[`*e* **`for`** *x* **`in`** *s*`]`, par `[`*e*`] *` *n*, par `append` successifs ; `len`, accès par indice positif valide ; concaténation `+`, extraction de tranche, copie (y compris son caractère superficiel) ; `pop` en dernière position.
— Dictionnaires : création `{`c_1 `:` v_1`,` …`,` c_n `:` v_n`}`, accès, insertion, présence d'une clé *k* **`in`** *d*, `len`, `copy`.

Structures de contrôle

— Instruction d'affectation avec `=`. Dépaquetage de tuples.
— Instruction conditionnelle : **`if`**, **`elif`**, **`else`**.
— Boucle **`while`** (sans **`else`**). **`break`**, **`return`** dans un corps de boucle.
— Boucle **`for`** (sans **`else`**) et itération sur `range(`*a*`,` *b*`)`, une chaîne, un tuple, une liste, un dictionnaire au travers des méthodes `keys` et `items`.
— Définition d'une fonction **`def`** f`(`p_1`,` …`,` p_n`)`, **`return`**.

Divers

— Introduction d'un commentaire avec `#`.
— Utilisation simple de `print`, sans paramètre facultatif.
— Importation de modules avec **`import`** *module*, **`import`** *module* **`as`** *alias*, **`from`** *module* **`import`** *f*, *g*, …
— Manipulation de fichiers texte (la documentation utile de ces fonctions doit être rappelée ; tout problème relatif aux encodages est éludé) : `open`, `read`, `readline`, `readlines`, `split`, `write`, `close`.
— Assertion : `assert` (sans message d'erreur).

Objectifs de formation en langues vivantes étrangères des classes préparatoires scientifiques Mathématiques, physique, ingénierie et informatique (MP2I), Mathématiques, physique, informatique (MPI), Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI), Physique, chimie et sciences de l'ingénieur (PCSI), Physique, technologie et sciences de l'ingénieur (PTSI), Technologie et sciences industrielles (TSI), Technologie, physique et chimie (TPC), Mathématiques et physique (MP), Physique et chimie (PC), Physique et sciences de l'ingénieur (PSI), Physique et technologie (PT), Biologie, chimie, physique et sciences de la Terre (BCPST) et Technologie et biologie (TB)

NOR : ESRS2035772A
arrêté du 5-1-2021 - JO du 7-2-2021
MESRI - DGESIP A1-2

Vu Code de l'éducation, notamment articles D. 612-19 à D. 612-29 ; arrêtés du 10-2-1995 modifiés ; arrêtés du 3-7-1995 modifiés ; arrêtés du 20-6-1996 modifiés ; arrêté du 3-5-2005 modifié ; avis du CSE du 10-12-2020 ; avis du Cneser du 15-12-2020 ; avis du ministre de l'Agriculture et de l'Alimentation du 31-12-2020 ; avis de la ministre des Armées du 15-12-2020

Article 1 - I. Les objectifs de formation en langues vivantes étrangères des classes préparatoires scientifiques Mathématiques, physique, ingénierie et informatique (MP2I) et Mathématiques, physique, informatique (MPI) figurent en annexe du présent arrêté.
II. Les objectifs de formation en langues vivantes étrangères :
- des classes préparatoires scientifiques de première année Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI), Physique, chimie et sciences de l'ingénieur (PCSI), Physique, technologie et sciences de l'ingénieur (PTSI), Technologie et sciences industrielles (TSI), Technologie, physique et chimie (TPC), figurant respectivement aux annexes 7, 7, 7, 8, 6 des arrêtés du 3 juillet 1995 susvisés ;
- des classes préparatoires scientifiques de seconde année Mathématiques et physique (MP), Physique et chimie (PC), Physique et sciences de l'ingénieur (PSI), Physique et technologie (PT), Technologie et sciences industrielles (TSI), Technologie, physique et chimie (TPC), figurant respectivement aux annexes 7, 6, 7, 7, 8 et 6 des arrêtés du 20 juin 1996 susvisés ;
- des classes préparatoires scientifiques de première et seconde années Biologie, chimie, physique et sciences de la Terre (BCPST) et Technologie et biologie (TB), figurant à l'annexe 7 de l'arrêté du 3 juillet 1995 susvisé définissant les objectifs de formation et le programme des classes préparatoires de première et seconde années de Biologie, chimie, physique et sciences de la Terre (BCPST), en application, pour les classes TB, de l'article 2 de l'arrêté du 3 mai 2005 susvisé,
sont remplacés par ceux figurant en annexe du présent arrêté.

Article 2 - Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie.

Article 3 - Les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021-2022 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023 pour les classes de seconde année.
Dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie, les dispositions du présent arrêté prennent effet à

compter de la rentrée de l'année scolaire 2021 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022 pour les classes de seconde année.

Article 4 - Le directeur général de l'enseignement scolaire, la directrice générale des outre-mer et la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle sont chargés, chacun en ce qui le concerne, de l'exécution du présent arrêté, qui sera publié au Journal officiel de la République française.
Fait le 5 janvier 2021

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
Édouard Geffray

Pour le ministre des Outre-mer et par délégation,
La directrice générale des outre-mer,
Sophie Brocas

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Pour la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle,
Le chef de service, adjoint de la directrice générale,
Brice Lannaud

Annexe

↳ *Objectifs de formation en langues vivantes étrangères*

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voies Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI), Mathématiques, physique, ingénierie et informatique (MP2I), Physique, chimie et sciences de l'ingénieur (PCSI), Physique, technologie et sciences de l'ingénieur (PTSI), Mathématiques et physique (MP), Mathématiques, physique, informatique (MPI), Physique et chimie (PC), Physique et sciences de l'ingénieur (PSI), Physique et technologie (PT), Technologie et sciences industrielles (TSI), Technologie, physique et chimie (TPC), Biologie, chimie, physique et sciences de la Terre (BCPST) et Technologie et biologie (TB)

Annexe

Objectifs de formation en langues vivantes étrangères

Classes préparatoires de la filière scientifique

Objectifs de formation en langues vivantes

L'enseignement des langues vivantes en classes préparatoires scientifiques constitue un volet essentiel de la formation générale. La raison en est claire : les échanges et relations auxquels sont appelés les ingénieurs, cadres, enseignants et chercheurs ont une dimension internationale et interculturelle.

Dans cette perspective, outre l'enseignement obligatoire de première langue, un enseignement optionnel de seconde langue vivante est proposé aux étudiants, afin qu'ils puissent préserver et développer leurs acquis du secondaire (tronc commun et, le cas échéant, enseignement de spécialité LLCER), se préparer aux enseignements dispensés dans les grandes écoles et demeurer ouverts au plurilinguisme du monde d'aujourd'hui.

Objectifs de formation

L'étude des langues vivantes dans toutes les classes préparatoires scientifiques, quelle que soit la filière choisie par l'étudiant (MPSI, MP2I, PCSI, PTSI, MP, MPI, PC, PSI, PT, TSI, TPC, BCPST, TB), a comme objectifs :

- de consolider et d'approfondir les compétences de l'enseignement du second degré, en tronc commun et, le cas échéant, en enseignement de spécialité LLCER, sur le plan linguistique et culturel ;
- de faire travailler la langue en contexte sur la base de supports variés ;
- de faire acquérir aux étudiants un niveau plus élevé de compréhension et d'expression, tant à l'écrit qu'à l'oral ; le développement des compétences orales, voire oratoires, en langue vivante – prise de parole en continu et en interaction – fait l'objet d'un entraînement régulier ;
- d'assurer la mise en place des repères culturels indispensables à la connaissance de la civilisation et de la culture des pays concernés, de façon à éclairer les réalités économiques, sociales et politiques du monde contemporain ; les avancées comme les enjeux scientifiques et technologiques font l'objet d'une attention particulière ;
- d'apprendre à utiliser des ouvrages et des outils de référence ; d'approfondir les compétences acquises précédemment pour rechercher, sélectionner et exploiter des documents ; les ressources et outils numériques sont utilisés avec profit ;
- d'entraîner à la traduction de textes variés, à la synthèse de documents et à différents types de production écrite.

Les niveaux de compétences ciblés en fin de 2de année sont C1 pour la LVA, notamment dans les compétences de réception, et B2 pour la LVB.

Il convient de rappeler que, dans ce cadre général, le premier semestre de la première année a une fonction essentielle : rendre plus homogène le niveau des étudiants en tenant compte de leur parcours antérieur en langue vivante. Pour cela, les premiers mois sont axés sur :

- un travail de la langue et sur la langue en contexte ;
- l'accès progressif à une compréhension fine, à l'écrit comme à l'oral ;
- l'acquisition d'une expression maîtrisée et adéquate ;
- l'acquisition d'une méthode adaptée aux différents savoir-faire visés.